

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОРСА

М.М. ПОСТНИКОВ



М. М. ПОСТНИКОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОРСА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.6

П 63

УДК 519.3

Введение в теорию Морса, Постников М. М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971 г.

Содержится подробное изложение основ вариационного исчисления в направлении, заложенном работами Морса.

Излагаются необходимые сведения из топологии (в частности, впервые в учебной литературе, излагаются определение и основные свойства клеточных разбиений). Следующие главы посвящены гладким многообразиям, тензорному исчислению, римановой геометрии и т. д.

ОГЛАВЛЕНИЕ

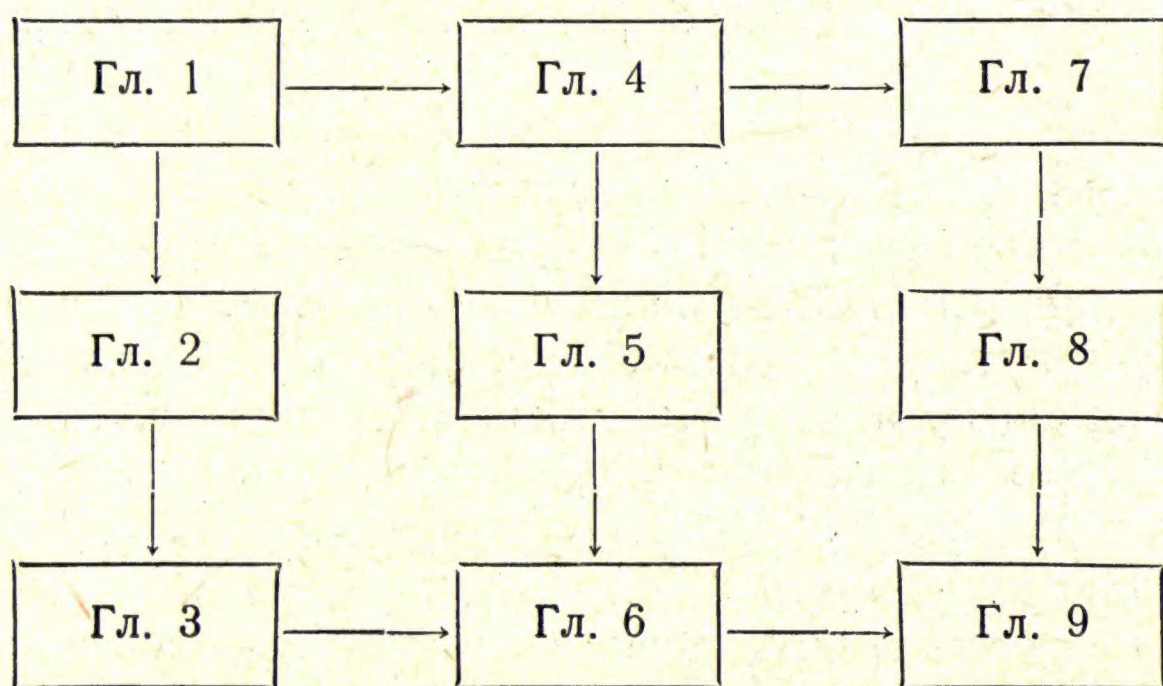
Предисловие	6
Глава 1. Необходимые сведения из общей топологии . .	9
1. Топологические пространства	9
2. Компактные и некоторые другие аналогичные им пространства	19
3. Непрерывные функции	37
4. Метрические пространства	46
5. Непрерывные отображения	54
6. Топологии отождествления, склеенные пространства, относительные гомеоморфизмы	69
Глава 2. Гомотопические эквивалентности	77
1. Гомотопии и распространения непрерывных отображений	77
2. Гомотопические эквивалентности и деформационные ретракты	88
3. Гомотопический тип склеенных пространств	96
4. Гомотопические группы и слабые гомотопические эквивалентности	102
5. Гомотопические пределы	119
Глава 3. Клеточные разбиения	136
1. Клеточные предразбиения	136
2. Клеточные разбиения	146
3. Теорема о паракомпактности	152
4. Непрерывные отображения клеточных разбиений . .	162
5. Доказательство теоремы о клеточных отображениях	173
6. Теорема Уайтхеда. Квазиполиэдры	184
Глава 4. Гладкие многообразия. I	187
1. Гладкие продмногообразия	188
2. Теорема об обратных функциях	192
3. Гладкие многообразия	198
4. E -многообразия	203
5. Векторные поля	212
6. Векторы	220

7. Линейные дифференциальные формы	231
8. Тензоры и тензорные поля	237
9. Операции над тензорами и тензорными полями . .	245
10. Римановы пространства	249
Глава 5. Гладкие многообразия. II	254
1. Кривые и поверхности	254
2. Продолжение тензорных полей	262
3. Однопараметрические группы диффеоморфизмов и интегральные кривые	265
4. Подмногообразия	274
5. Подмногообразия евклидовых пространств	286
6. Вложение компактных многообразий в евклидово пространство. Теорема Сарда	295
7. Вложение сепарабельных многообразий в евклидово пространство	302
Глава 6. Критические точки гладких функций	312
1. Критические точки и невырожденные критические многообразия	312
2. Функции, все критические точки которых невы- рождены	324
3. Теорема Морса	330
4. Гладкие многообразия и клеточные разбиения . . .	340
5. Теорема Ботта	347
Дополнение. Неравенства Морса	353
Глава 7. Элементы римановой геометрии	358
1. Аффинные связности	358
2. Ковариантное дифференцирование векторных полей	363
3. Параллельный перенос вдоль кривой	369
4. Ковариантное дифференцирование тензорных полей	373
5. Геодезические. Нормальные окрестности	378
6. Дифференциальные формы связности	388
7. Римановы связности	393
8. Риманов тензор кривизны и формы связности . .	397
9. Длины кривых и внутренняя метрика	402
10. Нормальные выпуклые окрестности	409
11. Полные римановы пространства	413
12. Условия полноты римановых пространств	417
Глава 8. Вариационная теория геодезических	421
1. Геодезические как линии стационарной длины . .	421
2. Вторая вариация длины дуги геодезической	427
3. Якобиевы вариации и поля Якоби	430
4. Сопряженные точки	435
5. Кусочно гладкие и разрывные векторные поля . .	443
6. Минимальные векторные поля	447
7. Существование минимальных полей	450
8. Ломанные поля Якоби	454
9. Теорема об изоморфизме	459

10. Квадратичная форма Морса	462
11. Вычисление индекса точки с помощью формы Морса	466
12. Вычисление индекса интервала с помощью формы Морса	469
13. Квадратичная форма Ботта. Окончательная формулировка теорем об индексах	476
Д о п о л н е н и е. Фокальные точки	485
1. Вторая квадратичная форма подмногообразия	485
2. Фокальные точки	489
3. Вычисление индекса λ_N	495
4. Доказательство неравенства (4)	502
Г л а в а 9. Исследование пространств путей. Приложения	507
1. Пространства путей	507
2. Пространства кусочно гладких кривых	517
3. Теорема редукции	528
4. Гомотопический тип пространств $\hat{\Omega}(p, q)$	539
5. Приложения к топологии. Теорема Фрейденталя	543
6. Приложения к геометрии римановых пространств. Теоремы Морса и Картана	549
Исторический и литературный комментарий	552
Литература	559
Предметный указатель	562

Схема зависимости глав

(несущественные связи случайного характера на схеме не отражены)



ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении теории Морса основную трудность для начинающих составляет «синтетический» характер этой теории, т. е. тот факт, что она находится на стыке по меньшей мере трех областей математики (топологии, анализа и геометрии). Цель данной книги и состоит в том, чтобы помочь начинающему преодолеть эту трудность. Собственно теории Морса посвящена лишь меньшая часть книги: большая ее часть занята изложением необходимых сведений из топологии и геометрии.

Первые три главы посвящены топологии.

Поскольку общая топология изложена во многих русских учебниках, первая глава (общетопологические вопросы) написана довольно сжато и с особым упором на факты, обычно в учебниках не затрагиваемые. Некоторые из рассмотренных в этой главе вопросов могут быть интересны и специалисту.

Вторая глава целиком посвящена гомотопическим эквивалентностям топологических пространств. Насколько автору известно, этот материал (хорошо знакомый специалистам) воедино еще никем собран не был.

В третьей главе рассматриваются клеточные разбиения. Представляется удивительным, что, несмотря на ту основную роль, которую клеточные разбиения играют в современной топологии, связного изложения их теории до сих пор нигде опубликовано не было.

Следующие две главы посвящены теории гладких многообразий. Хотя на русском языке имеется ряд изложений этой теории, ни одно из них не подходит для наших целей. Мы строим теорию гладких многообразий, следуя Шевалле, в бескоординатной форме; локальные координаты используются лишь тогда, когда это представляется уместным. С большим сожалением автор вынужден был ограничиться лишь конечномерными многообразиями — охват и бесконечномерных многообразий нарушил бы элементарный характер изложения. Это тем более достойно сожаления, что (как

стало ясно в последнее время) именно бесконечномерные многообразия представляют естественную область построения теории Морса.

К теории гладких многообразий относится, по существу, и шестая глава, посвященная теории критических точек гладких функций. Новшеством здесь является систематическое рассмотрение не только невырожденных критических точек, но и невырожденных критических многообразий. В Дополнении к этой главе доказываются известные неравенства Морса, связывающие числа критических точек данного индекса с числами Бетти многообразия. Это — единственное место книги (если не считать непосредственно связанной с ним первой половины п. 6 гл. 9), где мы выходим за рамки изложенного в первых трех главах топологического материала. Впрочем, все необходимые свойства чисел Бетти в этом Дополнении четко сформулированы.

Седьмая глава посвящена геометрии пространств аффинной связности и римановой геометрии. Изложение здесь ведется в основном в «классическом» духе, но с соблюдением всех современных требований строгости и с глобальной точки зрения. Мы касаемся здесь лишь самых основ римановой геометрии, так что многое, обычно приводимое в курсах геометрии, остается за рамками нашего изложения. С другой стороны, мы вынуждены были включить сюда некоторые существенные факты римановой геометрии (теорему Уайтхеда о существовании окрестностей, нормальных относительно любой своей точки, и теорему Хопфа — Ринова о полных римановых пространствах), которые в стандартных курсах римановой геометрии обычно не рассматриваются. Хотя все изложение римановой геометрии мы ведем в духе идей Картана, все же в связи с ограниченностью поставленных задач нам удалось обойтись без внешнего дифференцирования (правда, в одном месте, — а именно при выводе основных уравнений Картана, — понятие внешнего дифференциала, хотя и в неявном виде, все же, по существу, появляется).

В восьмой главе излагается теория так называемой «индексной формы». Изложение здесь мы ведем, придерживаясь в основном первоначальной конструкции Морса, и лишь в последнем пункте переходим к более современной трактовке, связанной с заменой функционала длины функционалом действия. Это, конечно, несколько удлиняет и усложняет

построения, но зато при этом удастся сохранить как историческую перспективу, так и геометрическую наглядность. В Дополнении к этой главе аналогичным образом рассматривается задача «с подвижным концом». Здесь первоначальные рассуждения Морса удалось значительно упростить.

В девятой, заключительной, главе доказывается основная теорема теории Морса, описывающая строение пространства кривых, соединяющих две данные точки полного риманова пространства. По существу, эта теорема представляет собой довольно простую переделку основных результатов предыдущей главы, имеющую своей целью придать этим результатам более инвариантный вид. В заключение этой главы мы даем простейшие приложения теории Морса к топологии и геометрии римановых пространств.

Более подробное представление о содержании книги можно получить из оглавления и кратких резюме, предгосланных каждой главе.

Формально от читателя не требуется никаких знаний, выходящих за пределы программы первых курсов математических отделений университетов и педвузов, хотя, конечно, предполагается определенный уровень математической культуры и умения работать с книгой.

При работе над рукописью данной книги автор позволил себе широко использовать свою предыдущую книгу (см. в списке литературы Постников [3]). В частности, главы седьмая и восьмая почти дословно воспроизводят соответствующие главы этой книги.

Список литературы в конце книги снабжен «Историческим и литературным комментарием», имеющим целью помочь читателю с большей легкостью ориентироваться в литературе. Ни на какую полноту список литературы не претендует.

Добавление при корректуре. Рукопись этой книги была закончена в 1965 г., но ее печатание задержалось. В настоящее время автор изложил бы многое совсем по-иному, с более современных позиций. Но это отложило бы опубликование книги на неопределенное время, и потому было решено оставить ее в первоначальном виде.

Автор

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

В этой вводной главе мы излагаем нужные нам сведения из общей теоретико-множественной топологии. Как правило, мы не стремимся исчерпать тот или иной затрагиваемый вопрос. Детально рассмотрены лишь вопросы, связного изложения которых в известной автору литературе не имеется.

В п. 1 изложено определение топологических пространств, введены классы пространств, выделяемые аксиомами счетности или отделимости, и описаны важнейшие операции над топологическими пространствами (свободные объединения, топологические суммы и топологические произведения).

В п. 2 рассмотрены компактные и близкие к ним пространства (паракомпактные, финально компактные, локально компактные и т. д.). Результаты этого пункта в основном известны, но до сих пор нигде вместе собраны не были.

В п. 3 излагаются классические теоремы о непрерывных функциях (теоремы Урысона и Титце и теорема о существовании разложения единицы).

В п. 4 изложение концентрируется в основном вокруг теоремы Стоуна о паракомпактности метрических пространств. В качестве следствия этой теоремы, в частности, доказывается (на основе общих результатов п. 2), известная теорема П. С. Александрова о сепарабельности связных локально компактных метрических пространств.

В п. 5 основное внимание уделено вопросу о построении непрерывных отображений. В связи с этим подробно рассматриваются отображения отождествления и, в частности, их топологические произведения.

В п. 6 собран довольно разнородный материал, группирующийся вокруг понятия топологии отождествления. В частности, в этом пункте описывается конструкция цилиндра произвольного непрерывного отображения.

1. Топологические пространства

Поскольку основные факты из общей топологии широко известны, мы в этой главе лишь напоминаем некоторые понятия и уточняем терминологию.

Говорят, что множество X определено как *топологическое пространство* или что в нем введена *топология*, если некоторые из его подмножеств объявлены *открытыми*, причем выполнены следующие аксиомы:

- 1) само множество X открыто;
- 2) пустое множество $\emptyset$ открыто;
- 3) объединение любого числа открытых множеств открыто;
- 4) пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.

Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства X . Каждое открытое множество U , содержащее A , называется его *окрестностью*. Точка a множества A называется его *внутренней точкой*, если некоторая его окрестность содержится в множестве A . Совокупность $\text{Int } A$ всех внутренних точек множества A называется его *внутренностью*. Внутренность $\text{Int } A$ представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в множестве A . Поэтому $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$. Множество A тогда и только тогда открыто, когда $\text{Int } A = A$, т. е. когда любая его точка является его внутренней точкой. Если $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$. Для любого семейства $\{A_\alpha\}$ подмножеств пространства X имеют место включения

$$\text{Int} \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \supset \bigcup_{\alpha} \text{Int } A_{\alpha}, \quad \text{Int} \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \subset \bigcap_{\alpha} \text{Int } A_{\alpha},$$

причем для конечного семейства $\{A_\alpha\}$ во втором из этих соотношений имеет место равенство.

Точка x топологического пространства X называется *изолированной*, если она, рассматриваемая как подмножество пространства X , является его открытым подмножеством. Топологическое пространство, все точки которого изолированы, называется *дискретным*. Пространство X тогда и только тогда дискретно, когда каждое его подмножество открыто.

Семейство $\{U_\alpha\}$ окрестностей U_α множества A называется его *фундаментальной системой окрестностей*, если для произвольной окрестности U множества A существует такое α , что $U_\alpha \subset U$. Топологическое пространство X называется пространством *счетного локального веса*, если любая его точка обладает счетной фундаментальной системой

окрестностей. В этом случае говорят также, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Базой (или *базой открытых множеств*) топологического пространства X называется любое семейство его открытых множеств, обладающее тем свойством, что объединениями множеств этого семейства исчерпываются все открытые множества пространства X . Для того чтобы некоторое семейство открытых множеств пространства X являлось базой, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки пространства X из этого семейства можно было выбрать фундаментальную систему окрестностей этой точки. Семейство открытых множеств пространства X , обладающее тем свойством, что всевозможные их конечные пересечения составляют базу пространства X , называется его *предбазой*. Задание некоторой предбазы полностью определяет топологию пространства X , причем любое семейство подмножеств множества X можно принять за предбазу некоторой топологии, определенной на этом множестве. Пространство X называется пространством со *счетной базой* (или *пространством счетного веса*) если оно обладает хотя бы одной базой (или, что равносильно, предбазой), содержащей не более счетного числа множеств. В этом случае говорят также, что пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Каждое пространство со счетной базой имеет счетный локальный вес.

Примером топологического пространства со счетной базой является числовая ось $\mathbb{R}$, рассматриваемая в обычной *евклидовой топологии*. По определению базой этой топологии служит семейство всевозможных открытых интервалов (a, b) , $a < b$. Чтобы получить счетную базу, достаточно ограничиться интервалами (a, b) с рациональными a и b .

Дополнения (в X) открытых множеств топологического пространства X называются его *замкнутыми* подмножествами. Множество X полностью определено как топологическое пространство, если указано, какие его подмножества замкнуты. Замкнутые множества обладают следующими основными свойствами, двойственными свойствам открытых множеств

- 1) пустое множество $\emptyset$ замкнуто;
- 2) все пространство X замкнуто;

3) пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;

4) объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $A \subset X$, если любая ее окрестность пересекается с A . Совокупность $\bar{A}$ всех точек прикосновения множества A называется его *замыканием*. Оно совпадает с $X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ и потому является наименьшим замкнутым множеством пространства X , содержащим множество A . В частности, множество A тогда и только тогда замкнуто, когда $\bar{A} = A$, т. е. когда оно содержит все свои точки прикосновения. Кроме того, $\bar{A} = A$ и $\bar{A} \subset \bar{B}$ при $A \subset B$. Для любого семейства $\{A_\alpha\}$ подмножеств пространства X имеют место включения

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} \supset \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}; \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} \subset \bigcap_{\alpha} \bar{A}_{\alpha},$$

причем для конечного семейства $\{A_\alpha\}$ в первом из этих соотношений имеет место равенство.

Если $\bar{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным* (в X). Пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество. Любое пространство со счетной базой сепарабельно.

Множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным* (в X), если $\text{Int } \bar{A} = \emptyset$, т. е. если дополнение его замыкания всюду плотно ($X \setminus \bar{A} = X$). Множество $A \subset X$ тогда и только тогда нигде не плотно, когда любое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит непустое открытое подмножество, не пересекающееся с A (или, иными словами, когда любое отличное от X замкнутое множество $F \subset X$ содержится в отличном от X замкнутом множестве, содержащем множество A). Замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно и произвольное подмножество нигде не плотного множества также нигде не плотно. Объединение конечного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно. Пространство X называется пространством *первой категории*, если оно разложимо в объединение счетного числа нигде не плотных множеств (здесь, как и всюду в дальнейшем, под счетным множеством мы понимаем множество конечное или счетное). В противном случае пространство X называется пространством *второй категории*.

Точка a пространства X называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, если для каждой ее окрестности U существует такое целое число N , что $x_n \in U$ при любом $n \geq N$. В этом случае последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*. Вообще говоря, сходящаяся последовательность может иметь несколько различных пределов. Если все точки x_n сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат множеству $A \subset X$, то каждый предел a этой последовательности принадлежит замыканию $\bar{A}$ множества A . Если же пространство X имеет счетный локальный вес, то верно и обратное, т. е. для произвольного подмножества $A \subset X$ каждая точка $a \in \bar{A}$ является пределом некоторой последовательности $\{x_n\}$ точек из A .

Действительно, пусть $\{U_n, n \geq 1\}$ — счетная фундаментальная система окрестностей точки a . Построим последовательность $\{x_n\}$, принимая за точку x_n , $n = 1, 2, \dots$, произвольную точку множества A , принадлежащую пересечению $V_n = \bigcap_{i=1}^n U_i$ (такая точка непременно существует, ибо $a \in \bar{A}$, а пересечение V_n является окрестностью точки a). Ясно, что построенная таким образом последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке a .

Каждое подмножество A топологического пространства X определяется как топологическое пространство, если за его открытые множества принять пересечения с A открытых множеств пространства X . Эта топология множества A называется *индуцированной топологией*, а само множество A , снабженное индуцированной топологией, — *подпространством* пространства X . Любое подпространство B подпространства A является подпространством пространства X . Замкнутыми множествами подпространства A являются пересечения с A замкнутых множеств пространства X . Подпространство A тогда и только тогда открыто (соответственно замкнуто) в пространстве X , когда любое его открытое (соответственно замкнутое) подмножество открыто (соответственно замкнуто) в пространстве X . Каждое открытое подпространство пространства первой категории само является пространством первой категории. Поэтому, если пространство X содержит открытое подпространство, являющееся пространством второй категории, то оно само является пространством второй категории. Каждое подпространство пространства со счетной базой (или пространства счетного локального веса) является

пространством со счетной базой (или, соответственно пространством счетного локального веса). Каждое открытое подпространство сепарабельного пространства сепарабельно.

В частности, каждое подмножество числовой оси $\mathbf{R}$, например *единичный отрезок* $I = [0, 1]$, является топологическим пространством со счетной базой.

Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если любые две его различные точки обладают непересекающимися окрестностями, и *вполне хаусдорфовым*, если любые две его различные точки обладают окрестностями с непересекающимися замыканиями. Таким образом, каждое вполне хаусдорфово пространство хаусдорфово. Любая точка хаусдорфова пространства замкнута, т. е. является его замкнутым подмножеством. Каждая сходящаяся последовательность точек хаусдорфова пространства обладает единственным пределом. Любое подпространство хаусдорфова (вполне хаусдорфова) пространства хаусдорфово (вполне хаусдорфово).

Хаусдорфово пространство называется *регулярным*, если любое его замкнутое подмножество и любая не принадлежащая этому подмножеству точка обладают непересекающимися окрестностями, и *нормальным*, если любые его два непересекающихся замкнутых подмножества обладают непересекающимися окрестностями. Формально более сильное условие существования окрестностей с непересекающимися замыканиями приводит — в отличие от случая хаусдорфовости — к тем же самым классам пространств. Таким образом, например, в нормальном пространстве любые два непересекающихся замкнутых множества обладают окрестностями с непересекающимися замыканиями. Любое нормальное пространство регулярно. Любое регулярное пространство вполне хаусдорфово. Хаусдорфово пространство тогда и только тогда регулярно (соответственно нормально), когда для любой окрестности U произвольной его точки (произвольного замкнутого подмножества) существует такая окрестность V , что $\bar{V} \subset U$. Любое подпространство регулярного пространства регулярно и любое замкнутое подпространство нормального пространства нормально. Каждое дискретное пространство нормально. Любое подпространство числовой оси $\mathbf{R}$, в частности, *единичный отрезок* I , является нормальным пространством.

Пусть $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ — такое семейство подпространств X_α топологического пространства X , что

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Согласно определению подпространства для каждого замкнутого (открытого) множества $A \subset X$ и любого $\alpha \in A$ пересечение $A \cap X_\alpha$ замкнуто (открыто) в подпространстве X_α . В случае, когда верно обратное, т. е. когда любое множество $A \subset X$, для которого все множества $A \cap X_\alpha$ замкнуты (открыты) в соответствующих подпространствах X_α , само замкнуто (открыто) в пространстве X , мы будем говорить, что пространство X является *свободным объединением подпространств* X_α . Как легко видеть,

любое замкнутое или открытое подпространство A свободного объединения X подпространств X_α является свободным объединением подпространств $A \cap X_\alpha$.

Кроме того,

пространство $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ является свободным объединением своих подпространств X_α , $\alpha \in A$, если

- 1) все подпространства X_α открыты;*
- либо*
- 2) все подпространства X_α замкнуты и их число конечно.*

Действительно, если все подпространства X_α открыты (замкнуты), то каждое множество, открытое (замкнутое) в том или ином из подпространств X_α , открыто (замкнуто) во всем пространстве X . В частности, если для множества $A \subset X$ любое из пересечений $A \cap X_\alpha$ открыто (замкнуто) в соответствующем подпространстве X_α , то все эти пересечения открыты (замкнуты) в X , и потому множество

$$A = \bigcup_{\alpha \in A} (A \cap X_\alpha)$$

представляет собой объединение открытых (замкнутых) в X множеств $A \cap X_\alpha$. Следовательно, оно само открыто (замкнуто, ибо число слагаемых, по условию, конечно).

Семейство $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ подмножеств A_α пространства X мы будем называть *локально конечным*, если любая точка $x \in X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь

с конечным числом подмножеств A_α . Оказывается, что в условии 2) предыдущей теоремы требование конечности семейства $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ можно ослабить до требования локальной конечности, т. е.

пространство $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ является свободным объединением своих подпространств $X_\alpha, \alpha \in A$, если все эти подпространства замкнуты, а семейство $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ локально конечно.

Поскольку семейство $\{A \cap X_\alpha; \alpha \in A\}$ локально конечно вместе с семейством $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$, из приведенного выше рассуждения немедленно вытекает, что нам достаточно доказать лишь следующее (имеющее и самостоятельный интерес) предложение:

Объединение $F = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ любого локально конечного семейства $\{F_\alpha; \alpha \in A\}$ замкнутых множеств $F_\alpha \subset X$ замкнуто.

Мы докажем даже большее, а именно, что

для любого локально конечного семейства $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ подмножеств произвольного пространства X имеет место равенство

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}.$$

Действительно, поскольку всегда $\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} \supset \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}$, доказательства требует лишь включение

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}. \quad (1)$$

Пусть $A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ и пусть $x \in \bar{A}$. В силу локальной конечности семейства $\{A_{\alpha}\}$ точка x обладает окрестностью U_0 , пересекающейся лишь с конечным числом $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}$ множеств этого семейства. Поэтому для любой окрестности U точки x ее окрестность $V = U \cap U_0$ не пересекается с множествами A_{α} при $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Но $x \in \bar{A}$ и потому $V \cap A \neq \emptyset$. Следовательно, $V \cap \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i} \neq \emptyset$, т. е. $U \cap \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

В силу произвольности окрестности U отсюда следует, что $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_{\alpha_i} \subset \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}$. Тем самым включение (1) доказано.

В связи с доказанным предложением полезно отметить, что семейство $\{A_\alpha\}$ произвольных множеств тогда и только тогда локально конечно, когда локально конечно семейство $\{\bar{A}_\alpha\}$, состоящее из замыканий $\bar{A}_\alpha$ множеств A_α .

Действительно, ясно, что открытое множество U тогда и только тогда пересекается с некоторым множеством A , когда оно пересекается с замыканием $\bar{A}$ этого множества.

Рассмотренное нами понятие свободного объединения имело, так сказать, «внутренний» характер: оно относилось к подпространствам данного, «уже существующего», топологического пространства X . Можно рассматривать и когда пространство X наперед не задано.

Пусть произвольное множество X представлено как объединение

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$$

множеств X_α , каждое из которых является топологическим пространством. Легко видеть, что, объявив замкнутыми (открытыми) множествами те и только те множества $A \subset X$, для которых при любом $\alpha \in A$ пересечение $A \cap X_\alpha$ замкнуто (открыто) в пространстве X_α , мы определим множество X как топологическое пространство. Однако, вообще говоря, пространства X_α не будут подпространствами этого пространства. (Чтобы получить соответствующий пример, достаточно рассмотреть случай, когда все пространства X_α совпадают как множества с пространством X , но снабжены различными топологиями.) В случае, когда каждое пространство X_α является подпространством построенного пространства X , мы будем говорить, что пространства X_α *свободно объединяемы*, и будем пространство X называть *свободным объединением пространств X_α* . Оно будет свободным объединением в ранее определенном смысле своих подпространств X_α .

Ясно, что

если все пересечения $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, являются замкнутыми (открытыми) подпространствами каждого из пространств X_{α_1} и X_{α_2} , то пространства X_α свободно объединяемы и являются замкнутыми (соответственно открытыми) подпространствами их свободного объединения X .

В частности, пространства X_α свободно объединяемы, если они попарно не пересекаются. Свободное объединение непересекающихся топологических пространств мы будем называть их *топологической суммой*. Каждое слагаемое X_α топологической суммы X замкнуто и одновременно открыто в этой сумме. Обратно, если

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$$

и если каждое из подпространств X_α одновременно замкнуто и открыто в X , то пространство X является топологической суммой подпространств X_α . Если каждое из слагаемых топологической суммы хаусдорфово, вполне хаусдорфово, регулярно или нормально, то и топологическая сумма обладает тем же свойством. То же самое замечание относится и к топологическим суммам, слагаемые которых имеют счетный локальный вес. Для пространств со счетной базой и сепарабельных аналогичное утверждение справедливо лишь тогда, когда число слагаемых топологической суммы счетно.

Наряду с топологической суммой мы будем рассматривать также *топологическое произведение* $X \times Y$ двух любых (не обязательно непересекающихся) топологических пространств X и Y . Точками этого произведения являются, по определению, всевозможные пары вида (x, y) , где $x \in X$, $y \in Y$, а за базу его открытых множеств принимается совокупность всех подмножеств вида $U \times V$, где U — произвольное открытое подмножество пространства X , а V — произвольное открытое подмножество пространства Y (подмножество $U \times V$ состоит, как подсказывает его обозначение, из всех пар (x, y) , где $x \in U$, $y \in V$). Топологическое произведение любого (возможно бесконечного) числа топологических пространств X_α , $\alpha \in A$, определяется аналогично (при этом, в случае бесконечного числа сомножителей, при построении открытых множеств базы произведения следует во всех, кроме конечного числа, сомножителях выбирать открытые множества, совпадающие со всем пространством). Топологическое произведение любого числа хаусдорфовых, вполне хаусдорфовых или регулярных пространств соответственно хаусдорфово, вполне хаусдорфово и регулярно. Для пространств счетного локального веса, пространств со счетной базой или сепарабельных пространств соответствующее утверждение имеет место, если

число сомножителей счетно. Топологическое произведение нормальных пространств не является, вообще говоря, нормальным пространством.

Например, существуют нормальные пространства X , топологическое произведение $X \times I$ которых на отрезок $I = [0, 1]$ числовой оси $\mathbf{R}$ уже не является нормальным пространством. Нормальное пространство X , для которого произведение $X \times I$ также нормально, мы будем называть *устойчиво нормальным*.

2. Компактные и некоторые другие аналогичные им пространства

Семейство $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ подмножеств A_α топологического пространства X называется *покрытием* множества $B \subset X$, если

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha.$$

В частности (при $B = X$), семейство $\{A_\alpha\}$ называется *покрытием пространства X* , если

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha.$$

Покрытие $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ называется *открытым*, если все множества A_α открыты, и *замкнутым*, если все множества A_α замкнуты. В дальнейшем мы, как правило, рассматриваем лишь открытые покрытия.

Покрытие $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ пространства X называется *точечно конечным*, если любая точка $x \in X$ принадлежит лишь конечному числу множеств A_α , *локально конечным*, если любая точка $x \in X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств A_α (ср. п. 1), и *звездно конечным*, если любое множество A_α пересекается лишь с конечным числом других множеств покрытия. Любое локально конечное покрытие точечно конечно и любое открытое звездно конечное покрытие локально конечно.

Покрытие $\{B_\beta; \beta \in B\}$ мы будем называть *подпокрытием* покрытия $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$, если $B \subset A$ и $B_\beta = A_\beta$ для любого $\beta \in B$. Мы будем говорить, что покрытие $\{B_\beta; \beta \in B\}$ *вписано* в покрытие $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$, если для любого $\beta \in B$ существует такое $\alpha \in A$, что $B_\beta \subset A_\alpha$. Ясно, что любое подпокрытие покрытия $\{A_\alpha; \alpha \in A\}$ вписано в это покрытие.

Пространство X называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Каждое замкнутое подпространство паракомпактного пространства паракомпактно. Топологическая сумма любого числа паракомпактных пространств паракомпактна. Каждое дискретное пространство паракомпактно.

Для доказательства более глубоких свойств паракомпактных пространств полезно предварительно доказать, что:

чтобы для подмножества A и не пересекающегося с ним замкнутого подмножества F паракомпактного пространства X существовали непересекающиеся открытые окрестности, достаточно, чтобы множество F обладало таким открытым покрытием $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, что $\bar{U}_\alpha \cap A = \emptyset$ при каждом $\alpha \in A$.

Действительно, рассмотрим покрытие $\{X \setminus F, U_\alpha\}$ всего пространства X . Пусть $\{W_\beta; \beta \in B\}$ — локально конечное покрытие, вписанное в покрытие $\{X \setminus F, U_\alpha\}$, и пусть B' — множество всех индексов $\beta \in B$, для которых $W_\beta \cap F \neq \emptyset$. Поскольку $W_\beta \not\subset X \setminus F$, для каждого индекса $\beta \in B'$ существует такой индекс $\alpha \in A$, что $W_\beta \subset U_\alpha$, и потому $\bar{W}_\beta \cap A = \emptyset$ (ибо $\bar{W}_\beta \subset \bar{U}_\alpha$). Следовательно, множество $\bigcup_{\beta \in B'} \bar{W}_\beta$ не пересекается с множеством A . Но $\bigcup_{\beta \in B'} \bar{W}_\beta = \overline{\bigcup_{\beta \in B'} W_\beta}$ в силу локальной конечности семейства $\{W_\beta\}$. Следовательно, множество $U = X \setminus \bigcup_{\beta \in B'} \bar{W}_\beta$ открыто и содержит множество A , т. е. является открытой окрестностью множества A . Для завершения доказательства остается заметить, что множество $W = \bigcup_{\beta \in B'} W_\beta$ открыто, содержит множество F и не пересекается с множеством U .

Из этого предложения легко, в частности, следует, что *любое хаусдорфово паракомпактное пространство X нормально.*

Действительно, пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X . Поскольку пространство X хаусдорфово, для любых двух точек $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$ существуют непересекающиеся окрестности $U(x_1)$ и $U(x_2)$. В частности, точка x_2 не будет принадлежать замыканию $\overline{U(x_1)}$ окрестности $U(x_1)$ точки x_1 . Иными словами, покрытие

множества F_1 , состоящее из окрестностей $U(x_1)$, $x_1 \in F_1$, удовлетворяет условиям только что доказанного предложения (при $F = F_1$ и A состоящем из точки x_2). Следовательно, существуют непересекающиеся открытые множества V и $V(x_2)$, содержащие соответственно множество F_1 и точку x_2 . В частности, замыкание $\overline{V}(x_2)$ множества $V(x_2)$ не пересекается с множеством F_1 . Поэтому покрытие множества F_2 , состоящее из множеств $V(x_2)$, $x_2 \in F_2$, также удовлетворяет условиям нашего предложения (при $F = F_2$ и $A = F_1$). Следовательно, множества F_1 и F_2 можно разделить непересекающимися окрестностями.

Пространство X (или, более общо, некоторое его подмножество) называется *компактным* (соответственно *финально компактным*), если в любое его открытое покрытие можно вписать конечное (соответственно счетное) открытое покрытие, или, что равносильно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное (соответственно счетное) подпокрытие.

Каждое компактное пространство финально компактно. Любое дискретное компактное (финально компактное) пространство конечно (счетно). Любое конечное (счетное) пространство компактно (финально компактно). Подмножество произвольного пространства тогда и только тогда компактно (финально компактно), когда оно компактно (финально компактно) в индуцированной топологии. В хаусдорфовом пространстве X множество точек некоторой сходящейся последовательности вместе с пределом этой последовательности составляет компактное подмножество пространства X . Замкнутое подпространство A компактного (финально компактного) пространства X компактно (финально компактно). В частности, пересечение компактного множества с замкнутым компактно.

Классическая лемма Гейне — Бореля утверждает, что любое замкнутое ограниченное подмножество числовой оси $\mathbb{R}$ компактно. В частности, отрезок $I = [0, 1]$ компактен.

Ниже мы докажем, что в регулярных (и даже хаусдорфовых) пространствах все компактные множества замкнуты. В связи с этим полезно заметить, что компактные множества регулярных пространств обладают свойством, которым в нормальном пространстве обладают любые замкнутые множества,

а именно для любой окрестности U компактного подмножества C регулярного пространства X существует такая его окрестность V , что $\bar{V} \subset U$.

Действительно, поскольку пространство X регулярно, каждая точка $x \in C$ обладает такой окрестностью V_x , что $\bar{V}_x \subset U$. Поскольку множество C компактно, из его покрытия $\{V_x, x \in C\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$. Множество

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$$

открыто и его замыкание $\bar{V}$ (являющееся объединением замыканий $\bar{V}_{x_i}$ множеств V_{x_i}) содержится в окрестности U .

Топологическое пространство X мы будем называть *секвенциально компактным*, если каждая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность. Легко видеть, что

любое хаусдорфово компактное пространство счетного локального веса секвенциально компактно.

Действительно, пусть это не так, т. е. пусть существует компактное пространство счетного локального веса, содержащее последовательность $\{x_n\}$, никакая подпоследовательность которой не сходится. Легко видеть, что множество точек этой последовательности, во-первых, бесконечно, во-вторых, дискретно и, в-третьих, замкнуто. С другой стороны, любое замкнутое дискретное подмножество компактного пространства необходимо конечно.

Столь же легко доказывается, что

любое финально компактное и секвенциально компактное пространство компактно.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что из любого счетного открытого покрытия $\{U_i\}$ секвенциально компактного пространства X можно выбрать конечное подпокрытие. Рассмотрим множества $V_n = U_1 \cup \dots \cup U_n$, $n = 1, 2, \dots$. Если из покрытия $\{U_i\}$ нельзя выбрать конечное подпокрытие, то мы можем, очевидно, считать, что все множества V_n различны. Пусть $x_n \in V_{n+1} \setminus V_n$, $n = 1, 2, \dots$. Так как точка x_n может принадлежать множеству U_i только при $n < i$, то ни одно из множеств U_i не содержит предела никакой сходящейся подпоследовательности

последовательности $\{x_n\}$. Но это невозможно, ибо множества U_i покрывают, по условию, все пространство X . Полученное противоречие показывает, что из покрытия $\{U_i\}$ можно выбрать конечное подпокрытие.

В связи с этим утверждением полезно иметь в виду, что *любое пространство X со счетной базой финально компактно.*

Действительно, отобрав для произвольного открытого покрытия Γ пространства X в счетной базе этого пространства подсемейство всех ее элементов, содержащихся в элементах покрытия Γ , мы, очевидно, получим счетное покрытие пространства X , вписанное в покрытие Γ .

Компактность секвенциально компактных пространств вытекает не только из финальной компактности, но также и из паракомпактности, т. е.

паракомпактное и секвенциально компактное пространство компактно.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что

любое локально конечное покрытие $\{U_\alpha\}$ секвенциально компактного пространства X конечно.

Предположим противное, т. е. предположим, что покрытие $\{U_\alpha\}$ бесконечно, и рассмотрим некоторое его счетное подсемейство $\{U_i\}$. Пусть, как и выше, $V_n = U_1 \cup \dots \cup U_n$. Из локальной конечности покрытия $\{U_\alpha\}$ непосредственно вытекает, что семейство $\{V_n\}$ содержит бесконечно много различных множеств. Поэтому, переходя, если надо, к некоторому его подсемейству, мы можем считать, что все множества V_n различны. Пусть $x_n \in V_n \setminus V_{n-1}$ и пусть x — предел некоторой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$. По определению, любая окрестность точки x содержит бесконечно много точек последовательности $\{x_n\}$ и потому пересекается с бесконечным числом элементов покрытия $\{U_\alpha\}$. Поскольку это противоречит локальной конечности покрытия $\{U_\alpha\}$, предположение о бесконечности покрытия $\{U_\alpha\}$ ложно.

Объединение конечного (счетного) числа компактных (финально компактных) подпространств произвольного

пространства компактно (финально компактно). В частности, объединение счетного числа компактных множеств финально компактно. Топологическая сумма конечного (счетного) числа компактных (финально компактных) пространств является компактным (финально компактным) пространством. Топологическое произведение любого числа компактных пространств компактно.

Для двух (а потому и любого конечного числа сомножителей) это утверждение очевидно, ибо в каждое открытое покрытие произведения $X \times Y$ сомножителей можно вписать покрытие, состоящее из «прямоугольников» $U_\alpha \times V_\beta$, где U_α и V_β — элементы некоторых покрытий пространств X и Y соответственно. Для любого числа сомножителей нам это утверждение не понадобится и потому мы оставим его без доказательства.

Для паракомпактных и финально компактных пространств соответствующее утверждение, вообще говоря, неверно (даже для случая двух сомножителей). Однако можно показать, что *топологическое произведение паракомпактного и компактного пространств паракомпактно*.

Действительно, пусть Γ — произвольное открытое покрытие произведения $X \times Y$ паракомпактного пространства X и компактного пространства Y . Без ограничения общности мы можем считать, что элементы покрытия Γ имеют вид $U_\alpha \times V_\beta$, где $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$ — некоторые открытые покрытия пространств X и Y соответственно. Поскольку для каждой точки $x \in X$ «слой» $x \times Y$ произведения $X \times Y$, очевидно, компактен, из покрытия Γ можно выбрать такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_i, x} \times V_{\beta_i, x}; i = 1, 2, \dots, n_x\}$, что

$$x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} (U_{\alpha_i, x} \times V_{\beta_i, x}).$$

При этом можно, очевидно, считать, что $x \in U_{\alpha_i, x}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n_x$. Пусть

$$U_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{\alpha_i, x}.$$

Ясно, что множества $U_x \times V_{\beta_i, x}$, $i = 1, 2, \dots, n_x$, открыты в $X \times Y$ и по-прежнему покрывают слой $x \times Y$:

$$x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} (U_x \times V_{\beta_i, x}).$$

Кроме того, $x \in U_x$, так что семейство $\{U_x; x \in X\}$ является

открытым покрытием пространства X . Пусть $\{W_\delta; \delta \in \Delta\}$ — локально конечное открытое покрытие, вписанное в покрытие $\{U_x; x \in X\}$. Выбрав для каждого $\delta \in \Delta$ такую точку $x_\delta \in X$, что $W_\delta \subset U_{x_\delta}$, рассмотрим множества $W_\delta \times V_{\beta i, x_\delta}$, $i = 1, 2, \dots, n_{x_\delta}$. Ясно, что

$$W_\delta \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_{x_\delta}} (W_\delta \times V_{\beta i, x_\delta}).$$

Следовательно, семейство $\{W_\delta \times V_{\beta i, x_\delta}; \delta \in \Delta, i = 1, 2, \dots, n_{x_\delta}\}$ представляет собой открытое покрытие пространства $X \times Y$, вписанное, очевидно, в покрытие Γ . Поэтому для завершения доказательства остается лишь показать, что это покрытие локально конечно. Пусть (x, y) — произвольная точка пространства $X \times Y$. В силу паракомпактности пространства X точка x обладает в X окрестностью $U(x)$, пересекающейся лишь с конечным числом открытых множеств W_δ . Рассмотрим окрестность $U(x) \times V_{\beta i_0, x_{\delta_0}}$ точки (x, y) в пространстве $X \times Y$, где $V_{\beta i_0, x_{\delta_0}}$ — одно из множеств вида $V_{\beta i, x_\delta}$, содержащих точку y . Если эта окрестность пересекается с некоторым множеством $W_\delta \times V_{\beta i, x_\delta}$, то $U(x) \cap W_\delta \neq \emptyset$ и потому число таких множеств конечно. Следовательно, покрытие $\{W_\delta \times V_{\beta i, x_\delta}; \delta \in \Delta, i = 1, 2, \dots, n_{x_\delta}\}$ локально конечно.

Из доказанного предложения немедленно следует, что топологическое произведение хаусдорфова паракомпактного и хаусдорфова компактного пространств является хаусдорфовым паракомпактным и потому нормальным пространством. Поскольку отрезок $I = [0, 1]$ является хаусдорфовым компактным пространством, отсюда, в частности, вытекает, что

любое хаусдорфово паракомпактное пространство устойчиво нормально.

Ясно, что любое компактное пространство паракомпактно. Поэтому

любое хаусдорфово компактное пространство, устойчиво нормально.

В отличие от компактности, финальная компактность, вообще говоря, не обеспечивает паракомпактности. Однако

любое регулярное финально компактное пространство X паракомпактно (и, следовательно, нормально).

Доказательство этого утверждения мы начнем с того, что рассмотрим два непересекающихся замкнутых множества F_1 и F_2 пространства X . Поскольку пространство X регулярно, для любой точки $x \in X$, существует такая окрестность $U(x)$, что $\bar{U}(x) \cap F_i \neq \emptyset$, если $x \notin F_i$. Так как множество F_i , $i = 1, 2$, является замкнутым подмножеством финально компактного пространства X , то оно само финально компактно и потому из его покрытия $\{U(x); x \in F_i\}$ можно выбрать счетное подпокрытие, т. е. в множестве F_i существует такая счетная система точек $x_{i,1}, \dots, x_{i,n}, \dots$, что

$$F_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U(x_{i,n}), \quad i = 1, 2.$$

При этом $\bar{U}(x_{1,n}) \cap F_2 = \emptyset$ и аналогично $\bar{U}(x_{2,n}) \cap F_1 \neq \emptyset$. Определим теперь по индукции для любого $n \geq 1$ множества $V_{1,n}$ и $V_{2,n}$, полагая

$$V_{1,n} = U(x_{1,n}) \setminus \bigcup_{k=1}^n \bar{U}(x_{2,k}),$$

$$V_{2,n} = U(x_{2,n}) \setminus \bigcup_{k=1}^n \bar{U}(x_{1,k}).$$

Легко видеть, что $V_{1,n}$ и $V_{2,m}$ не пересекаются. Действительно, если $n \leq m$, то

$$V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset U(x_{1,n}) \cap (U(x_{2,m}) \setminus \bar{U}(x_{1,n})) = \emptyset,$$

а если $n > m$, то

$$V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset (U(x_{1,n}) \setminus \bar{U}(x_{2,m})) \cap U(x_{2,m}) = \emptyset.$$

Следовательно, множества

$$V_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{1,n}, \quad V_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{2,n}$$

также не пересекаются. С другой стороны, они, очевидно, содержат соответственно множества F_1 и F_2 . Таким образом, мы доказали, что любые два непересекающихся замкнутых множества F_1 и F_2 пространства X можно заключить в непересекающиеся открытые множества V_1 и V_2 . Иначе говоря, мы доказали, что пространство X нормально.

Пусть теперь Γ — произвольное открытое покрытие пространства X . Поскольку пространство X , по условию, регулярно, каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью $U(x)$, замыкание $\bar{U}(x)$ которой содержится в некотором элементе покрытия Γ . Поскольку пространство X еще и финально компактно, в нем существует такая счетная система точек $x_1, \dots, x_k, \dots$, что

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U(x_k).$$

Пусть U_k — элемент покрытия Γ , содержащий множество $\bar{U}(x_k)$. Используя уже доказанную нормальность пространства X , мы для любого $n \geq 1$ можем по индукции построить такое открытое множество U_k^n , что

$$\bar{U}(x_k) \subset U_k^n \subset U_k$$

и

$$\bar{U}_k^n \subset U_k^{n+1}, \quad n, k = 1, 2, \dots$$

Для каждого $n \geq 1$ мы теперь положим

$$V^n = \bigcup_{k=1}^n U_k^n.$$

Ясно, что $\bar{V}^n \subset V^{n+1}$ и что множества V^n составляют открытое покрытие пространства X . Рассмотрим множества

$$H^n = V^n \setminus \bar{V}^{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(при $m \leq 0$ мы условно считаем, что $V^m = \emptyset$). Легко видеть, что (очевидно, открытые) множества H^n составляют покрытие пространства X . (Действительно, для любой точки $x \in X$ существует такое n , что $x \in V^n$ и $x \notin V^{n-1}$. Но тогда $x \notin \bar{V}^{n-2}$ и потому $x \in H^n$.) Кроме того, ясно, что это покрытие звездно конечно (ибо $H^{n_1} \cap H^{n_2} = \emptyset$ при $n_2 \geq n_1 + 2$).

Пусть $k = 1, \dots, n$. Положим

$$W_k^n = H^n \cap U_k^n = U_k^n \setminus \bar{V}^{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как $H^n \subset V^n = \bigcup_{k=1}^n U_k^n$, то $\bigcup_{k=1}^n W_k^n = H^n$. Следовательно,

множества W_k^n составляют (открытие) покрытие пространства X .

Это покрытие вписано в покрытие Γ (ибо $W_k^n \subset U_k^n \subset U_k$) и звездно конечно (ибо оно получается из звездно конечного покрытия $\{H^n\}$ разложением каждого его элемента на конечное число множеств). Поскольку любое звездно конечное открытое покрытие локально конечно, тем самым доказано, что в любое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие, т. е. что пространство X паракомпактно.

Докажем теперь упоминавшийся выше факт, а именно, что *любое компактное подмножество C хаусдорфова пространства X замкнуто.*

С этой целью мы для любой точки $x \in X \setminus C$ и любой точки $c \in C$ выберем некоторые их непересекающиеся окрестности $U_c(x)$ и $U_x(c)$. Для каждой фиксированной точки $x \in X \setminus C$ множества $U_x(c)$, $c \in C$, образуют, очевидно, открытое покрытие подмножества C . Поэтому существует такая конечная система точек $c_1, \dots, c_n \in C$, что

$$C \subset \bigcup_{i=1}^n U_x(c_i).$$

Пусть

$$U(x) = \bigcup_{i=1}^n U_{c_i}(x).$$

Множество $U(x)$ открыто, содержит точку x и не пересекается с множеством C . Таким образом, каждая точка x множества $X \setminus C$ является его внутренней точкой, т. е. это множество открыто. Поэтому само множество C замкнуто.

Подмножество A топологического пространства X мы будем называть *компактно-замкнутым*, если его пересечение с любым компактным подмножеством $C \subset X$ замкнуто (в X). Из только что доказанного предложения непосредственно вытекает, что

любое замкнутое подмножество хаусдорфова пространства X компактно-замкнуто.

Таким образом, для хаусдорфовых пространств классы компактных, замкнутых и компактно-замкнутых подмножеств связаны простым отношением включения: каждый из этих классов шире предыдущего.

Пространство X мы будем называть *каонным* пространством, если оно является свободным объединением всех своих компактных подпространств, т. е. если его подмножество A тогда и только тогда замкнуто, когда для любого компактного подмножества $C \subset X$ пересечение $A \cap C$ замкнуто в C . В каонном пространстве любое компактно-замкнутое множество замкнуто. Согласно сказанному выше, если пространство X хаусдорфово, то верно и обратное. Таким образом, *хаусдорфово пространство X тогда и только тогда каонно, когда любое его компактно-замкнутое подмножество замкнуто.*

Далее, легко видеть, что

любое замкнутое (открытое) подпространство Y каонного (каонного и регулярного) пространства X также является каонным пространством.

Действительно, пусть множество $A \subset Y$ обладает тем свойством, что для любого компактного множества $C \subset Y$ пересечение $A \cap C$ замкнуто в C . Нам нужно доказать, что тогда A замкнуто в Y . Если Y замкнуто, то вместо этого мы будем доказывать, что A замкнуто в X . В силу каонности пространства X для этого достаточно доказать, что для любого компактного множества $C \subset X$ пересечение $A \cap C$ по-прежнему замкнуто в C . Но это пересечение совпадает с пересечением $A \cap (Y \cap C)$, а множество $Y \cap C$, будучи пересечением компактного и замкнутого множеств, компактно. Поэтому, по условию, пересечение $A \cap (Y \cap C)$ замкнуто в C .

Пусть теперь подпространство Y открыто. Рассмотрим произвольную точку прикосновения a множества A , принадлежащую подпространству Y . Так как пространство X , по условию, регулярно, то эта точка обладает такой окрестностью U , что $\bar{U} \subset Y$. Так как для любого компактного множества $C \subset X$ пересечение $\bar{U} \cap C \subset Y$ компактно, то пересечение $\bar{U} \cap C \cap A$ замкнуто в $\bar{U} \cap C$, а потому и в C . Следовательно, пересечение $\bar{U} \cap A$ замкнуто в пространстве X . Но ясно, что $a \in \overline{\bar{U} \cap A}$. Таким образом, $a \in \bar{U} \cap A$ и, значит, $a \in A$. Тем самым мы доказали, что каждая принадлежащая подпространству Y точка прикосновения множества A лежит в A . Но это и означает, что множество A замкнуто в подпространстве Y .

Ясно, что к числу каонных пространств принадлежат все компактные пространства. Кроме того, легко видеть, что

любое хаусдорфово пространство X , имеющее счетный локальный вес, каонно.

Действительно, пусть a — произвольная точка прикосновения некоторого компактно-замкнутого подмножества A пространства X и пусть $\{a_n\}$ — произвольная последовательность точек множества A , сходящаяся к точке a . Так как эта последовательность вместе со своим пределом a образует компактное множество, то пересечение этого множества с множеством A замкнуто. Но при $a \notin A$ это пересечение совпадало бы с последовательностью $\{a_n\}$ и было бы заведомо незамкнутым (ибо предел этой последовательности $a \notin A$ ей не принадлежал бы). Следовательно, $a \in A$. Таким образом, $\bar{A} = A$, т. е. множество A замкнуто.

Пространство X мы будем называть *счетно-компактным*, если оно является свободным объединением некоторого счетного семейства $\{X_n, n \geq 0\}$ его компактных подпространств X_n . Не ограничивая общности, можно при этом считать, что $X_n \subset X_{n+1}$ для всех $n \geq 0$. Каждое счетно-компактное пространство является каонным и финально компактным пространством. Любое замкнутое подпространство счетно-компактного пространства счетно-компактно. Топологическая сумма счетного числа счетно-компактных пространств является счетно-компактным пространством. Кроме того,

любое хаусдорфово счетно-компактное пространство X паракомпактно и, в частности, нормально.

Поскольку пространство X финально компактно, достаточно установить его регулярность. Впрочем, нам удобнее будет сразу же доказать его нормальность.

Пусть $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — произвольные непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X . Рассмотрим компактные (и, следовательно, замкнутые и нормальные подпространства

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots,$$

свободным объединением которых является пространство X . Оказывается, что для любого $n \geq 0$ существуют такие

открытые (в X_n) множества $U_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, что

$$X_n \cap F^{(i)} \subset U_n^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$\overline{U_n^{(1)}} \cap \overline{U_n^{(2)}} = \emptyset$$

и (при $n > 0$)

$$U_n^{(i)} \cap X_{n-1} = U_{n-1}^{(i)}.$$

При $n = 0$ существование таких множеств обеспечивается нормальностью пространства X_0 . Пусть для некоторого $n \geq 0$ множества $U_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, уже построены. Рассмотрим в подпространстве X_{n+1} множества $(X_{n+1} \cap F^{(i)}) \cup \overline{U_n^{(i)}}$, $i = 1, 2$. Эти множества замкнуты и их пересечение пусто. Поэтому они обладают окрестностями $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ с непересекающимися замыканиями $\overline{V^{(1)}}$ и $\overline{V^{(2)}}$. С другой стороны, так как множества $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$ открыты в подпространстве X_n пространства X_{n+1} , то в пространстве X_{n+1} существуют такие открытые множества $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, что

$$W^{(i)} \cap X_n = U_n^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

Мы положим

$$U_{n+1}^{(i)} = V^{(i)} \cap (W^{(i)} \cup (X_{n+1} \setminus X_n)), \quad i = 1, 2.$$

Построенные таким образом множества $U_{n+1}^{(i)}$, $i = 1, 2$, обладают, очевидно, всеми нужными свойствами.

Рассмотрим теперь множества

$$U^{(i)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку для любого $n \geq 0$ множества $U_n^{(i)} = U^{(i)} \cap X_n$ открыты в подпространстве X_n , множества $U^{(i)}$, $i = 1, 2$, открыты в пространстве X . Кроме того, они не пересекаются и содержат множества $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ соответственно. Таким образом, любые два непересекающихся замкнутых множества $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ пространства X обладают непересекающимися окрестностями $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$. Но это и означает, что пространство X нормально.

З а м е ч а н и е. В изложенном доказательстве мы пользовались только нормальностью и замкнутостью подпространств X_n . Поэтому

любое пространство, являющееся свободным объединением счетной возрастающей последовательности замкнутых нормальных подпространств, само является нормальным пространством.

Пространство X называется *локально компактным* (соответственно *локально счетно-компактным*), если каждая его точка обладает окрестностью, замыкание которой компактно (соответственно счетно-компактно). Любое компактное (счетно-компактное) пространство локально компактно (локально счетно-компактно). Любое дискретное пространство локально компактно. Для каждого компактного подмножества локально компактного (локально счетно-компактного) пространства существует окрестность, замыкание которой компактно (счетно-компактно). Каждое хаусдорфово локально счетно-компактное и, в частности, локально компактное, пространство регулярно (ибо хаусдорфово счетно-компактное пространство нормально). Любое замкнутое подпространство локально компактного (локально счетно-компактного) пространства X локально компактно (локально счетно-компактно). Соответствующее утверждение для открытых подпространств также справедливо, если только пространство X хаусдорфово. В частности, любое открытое подпространство хаусдорфова компактного пространства локально компактно. Обратно, любое хаусдорфово локально компактное пространство X является открытым подпространством некоторого хаусдорфова компактного пространства X' , причем пространство X' можно построить так, чтобы «нарост» $X \setminus X'$ состоял лишь из одной точки (теорема П. С. Александрова об односточечной компактификации).

Действительно, пусть ω — произвольная точка, не принадлежащая пространству X . Введем в множество $X' = X \cup \omega$ топологию, считая его открытыми множествами те и только те множества $A' \subset X'$, для которых множество $A = A' \setminus \omega$ открыто в пространстве X и — в случае, когда $\omega \in A'$, — является, кроме того, дополнением (в X) некоторого компактного множества. Без труда проверяется, что пространство X' компактно, хаусдорфово и топология, индуцированная на X топологией пространства X' , совпадает с исходной топологией пространства X .

Из теоремы об односточечной компактификации, в частности, непосредственно вытекает, что

любое хаусдорфово локально компактное пространство X является каонным пространством.

Это утверждение легко, впрочем, доказать и непосредственно. Действительно, пусть A — произвольное компактно-замкнутое подмножество локально компактного пространства X . Докажем, что A замкнуто. Пусть $x \in X \setminus A$. Поскольку пространство X локально компактно, точка x обладает окрестностью U , замыкание $\bar{U}$ которой компактно. Поскольку подмножество A компактно-замкнуто, пересечение $A \cap \bar{U}$ замкнуто и, значит, его дополнение $V = X \setminus (A \cap \bar{U})$ открыто. Таким образом, точка x обладает окрестностью V , не пересекающейся с $A \cap \bar{U}$. Но тогда $x \in U \cap V \subset X \setminus A$, т. е. $x \in \text{Int}(X \setminus A)$. Таким образом, множество $X \setminus A$ открыто и потому множество A замкнуто.

Последнее рассуждение почти дословно сохраняется и для локально счетно-каонных пространств. (Замкнутость множества $A \cap \bar{U}$ вытекает в этом случае из того легко доказываемого факта, что пересечение компактно-замкнутого множества с произвольным счетно-компактным подпространством замкнуто в этом подпространстве.) Таким образом,

любое хаусдорфово локально счетно-компактное пространство является каонным пространством.

Займемся теперь исключительно локально компактными пространствами (в основном хаусдорфовыми).

В первую очередь мы докажем, что

любое хаусдорфово локально компактное пространство X является пространством второй категории.

Более того,

любое подпространство первой категории хаусдорфова локально компактного пространства X обладает тем свойством, что его дополнение всюду плотно в пространстве X .

Действительно, пусть $\{A_n; n \geq 1\}$ — произвольное счетное семейство нигде не плотных подмножеств пространства X . Мы должны доказать, что в любой окрестности U произвольной точки x пространства X существуют точки, не принадлежащие ни одному из множеств A_n . С этой целью мы построим в пространстве X такое семейство $\{U_n; n \geq 0\}$ непустых открытых множеств U_n , что

1) замыкание множества $\bar{U}_0$ компактно и содержится в окрестности U ;

2) для любого $n \geq 1$ имеют место соотношения

$$\bar{U}_n \subset U_{n-1}, \quad U_n \cap A_n = \emptyset.$$

Существование множества U_0 непосредственно вытекает из локальной компактности и регулярности пространства X . Пусть для некоторого $n \geq 1$ множество U_{n-1} уже построено. Поскольку множество A_n нигде не плотно, в открытом множестве U_{n-1} существует такое непустое открытое множество V_n , что $V_n \cap A_n = \emptyset$. Так как пространство X регулярно, то существует такое непустое открытое множество $U_n \subset V_n$, что $\bar{U}_n \subset V_n$. Ясно, что $\bar{U}_n \subset U_{n-1}$ и $\bar{U}_n \cap A_n = \emptyset$. Тем самым множества U_n по индукции построены для всех $n \geq 0$.

Рассмотрим теперь открытые в подпространстве $\bar{U}_0$ множества

$$W_n = \bar{U}_0 \setminus \bar{U}_n, \quad n \geq 1.$$

Если пересечение множеств $\bar{U}_n$, $n \geq 1$, пусто, то множества W_n составляют покрытие подпространства $\bar{U}_0$. Поскольку это подпространство по построению компактно, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{W_{n_1}, \dots, W_{n_k}\}$. Соответствующие множества $\bar{U}_{n_1}, \dots, \bar{U}_{n_k}$ будут иметь тогда пустое пересечение. Последнее невозможно, ибо это пересечение равно $\bar{U}_m$, где $m = \max(n_1, \dots, n_k)$. Следовательно, пересечение множеств $\bar{U}_n$, $n \geq 1$, не пусто. Поскольку каждая точка последнего пересечения не принадлежит ни одному из множеств A_n , тем самым сформулированное выше предложение полностью доказано.

Напомним теперь, что любое хаусдорфово локально компактное пространство регулярно. Поэтому если оно к тому же финально-компактно, то оно и паракомпактно. Поскольку топологическая сумма паракомпактных пространств является паракомпактным пространством, отсюда непосредственно вытекает, что

любое хаусдорфово локально компактное пространство, являющееся топологической суммой финально-компактных подпространств, паракомпактно.

Оказывается, что обратное утверждение также справедливо (и притом даже без предложения хаусдорфовости), т. е.

любое локально компактное паракомпактное пространство X является топологической суммой финально-компактных подпространств.

Действительно, в силу локальной компактности пространства X любая его точка обладает окрестностью с компактным замыканием. Все эти окрестности образуют некоторое покрытие Σ пространства X . Поскольку пространство X паракомпактно, в покрытие Σ можно вписать локально конечное покрытие Γ . Это покрытие (как и покрытие Σ) обладает тем свойством, что замыкание каждого его элемента U компактно. С другой стороны, в силу локальной конечности покрытия Γ каждая точка $x \in \bar{U}$ обладает окрестностью $V(x)$, пересекающейся лишь с конечным числом элементов этого покрытия. Но, поскольку множество $\bar{U}$ компактно, существует такая конечная система точек $x_1, \dots, x_n \in \bar{U}$, что

$$\bar{U} \subset \bigcup_{i=1}^n V(x_i).$$

Следовательно, множество $\bar{U}$, а потому и множество U , пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия Γ , т. е. покрытие Γ звездно конечно.

Выбрав теперь некоторый элемент U_0 покрытия Γ , рассмотрим для любого $n \geq 1$ подмножество X_n пространства X , состоящее из всех точек $x \in X$, для которых существуют такие n множеств $U_1, \dots, U_n \in \Gamma$, что $x \in U_n$ и

$$U_0 \cap U_1 \neq \emptyset, \quad U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, \dots, U_{n-1} \cap U_n \neq \emptyset.$$

Ясно, что подмножество X_n не пусто, открыто и — в силу звездной конечности покрытия Γ — является объединением некоторого конечного числа элементов этого покрытия. Поэтому множество

$$X_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

также открыто и является объединением счетного числа элементов покрытия Γ . Объединение X_∞^* их замыканий

содержится, очевидно, в замыкании $\bar{X}_\infty$ подпространства X_∞ (на самом деле оно совпадает с этим замыканием). Являясь объединением счетного числа компактных множеств, подпространство X_∞^* финально-компактно.

Так как любой элемент покрытия Γ либо содержится в X_∞ , либо не пересекается с X_∞ , то дополнение $X \setminus X_\infty$ является объединением некоторых элементов $U \in \Gamma$ и потому открыто. Следовательно, подпространство X_∞ не только открыто, но и замкнуто, а потому $X_\infty^* = X_\infty$. Таким образом, подпространство X_∞ финально-компактно.

Для завершения доказательства остается заметить, что подпространства X_∞ , соответствующие различным элементам U_θ покрытия Γ , либо совпадают, либо не пересекаются и что их объединением является все пространство X .

Топологическое пространство X называется *связным*, если каждое его непустое замкнутое и одновременно открытое подпространство совпадает со всем пространством X . Другими словами, пространство X связно, если его нельзя разложить в объединение двух (или большего числа) непустых непересекающихся открытых (или замкнутых) множеств. Любое пространство X является объединением, вообще говоря, не свободным, непересекающихся замкнутых максимальных связных подпространств, называемых *компонентами связности* пространства X . Связное хаусдорфово пространство не имеет изолированных точек. В частности, дискретное пространство связно тогда и только тогда, когда оно состоит из одной точки.

Множество, получающееся из связного множества при соединении некоторых его точек прикосновения, связно. В частности, замыкание связного множества связно. Объединение связных множеств с непустым пересечением связно. Например, пространство X связно, если любые две его точки принадлежат связному множеству. Любой интервал (a, b) или отрезок $[a, b]$ числовой оси $\mathbf{R}$ связан. В частности, единичный отрезок $I = [0, 1]$ связан.

Из определения связного пространства и доказанной выше теоремы немедленно следует, что

любое связное паракомпактное локально компактное пространство финально-компактно.

3. Непрерывные функции

Числовая функция f , заданная на топологическом пространстве X , называется *непрерывной*, если для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки x_0 , что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

для всех точек $x \in U$. Такие функции обладают многими свойствами непрерывных функций числового аргумента. Например, любая непрерывная функция, определенная на компактном пространстве X , ограничена и принимает свои наибольшее и наименьшее значения. Любая непрерывная функция, определенная на связном пространстве X , принимает все промежуточные значения. Ограничение $f|_A$ на произвольном подпространстве $A \subset X$ любой непрерывной на X функции f является функцией, непрерывной на A .

Для числовой функции f , определенной на пространстве X , и произвольного числа a мы будем символом $[f \leq a]$ обозначать множество всех точек $x \in X$, для которых $f(x) \leq a$. Аналогичной смысл имеют обозначения $[f < a]$, $[f = a]$, $[a < f \leq b]$ и т. п. Функция f тогда и только тогда непрерывна, когда для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $[f \leq a]$ замкнуто или, что равносильно, когда для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $[f < a]$ открыто. Отсюда, в частности, следует, что для любой непрерывной функции f и любого числа a множество $[f = a]$ замкнуто, а множество $[f \neq a]$ открыто. Замыкание $\overline{[f \neq 0]}$ множества $[f \neq 0]$ мы будем называть *носителем* функции f .

Множества $[f = a]$ являются частным случаем *множеств коинцидентности* $[f = g]$, определенных для любой пары непрерывных (на пространстве X) функций f и g и состоящих, по определению, из всех точек $x \in X$, для которых $f(x) = g(x)$. Легко видеть, что

для любых двух непрерывных функций f и g множество $[f = g]$ замкнуто.

Действительно, если $x \notin [f = g]$, то $f(x) \neq g(x)$ и потому точки $f(x)$ и $g(x)$ обладают непересекающимися окрестностями U и V . Множество $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ открыто, содержит точку x и не пересекается с множеством $[f = g]$. Тем самым доказано, что дополнение $X \setminus [f = g]$ множества

$[f=g]$ открыто. Следовательно, само множество $[f=g]$ замкнуто.

Непрерывные функции существуют на любом топологическом пространстве X . Действительно, любая постоянная функция, т. е. функция, принимающая во всех точках $x \in X$ одно и то же значение, очевидно, непрерывна. Однако непостоянных непрерывных функций, вообще говоря, может и не быть. Для их существования достаточно, чтобы пространство X было нормально (и содержало более одной точки). Именно, можно показать, что для любых двух различных точек x_0 и x_1 нормального пространства X существует на X такая непрерывная функция f , что $f(x_0)=0$ и $f(x_1)=1$. Более того, как впервые доказал П. С. Урысон,

для любого замкнутого множества A нормального пространства X и любой его окрестности U существует на пространстве X непрерывная функция f , принимающая значения из отрезка $[0, 1]$, равная единице на A и нулю вне U , т. е. такая, что

$$A \subset [f=1], \quad U \supset [f \neq 0].$$

Это утверждение известно как лемма Урысона. Заметим, что здесь не исключаются случаи, когда $A=\emptyset$ или $U=X$ (впрочем, в этих случаях лемма тривиальна). Каждую функцию f , удовлетворяющую условиям леммы Урысона, мы будем называть *функцией Урысона* пары (U, A) .

Для доказательства леммы Урысона мы построим в пространстве X семейство $\{V_r\}$ содержащихся в окрестности U окрестностей V_r множества A , занумерованных двоично-рациональными числами $r \in (0, 1)$ (т. е. числами вида $\frac{m}{2^n}$, где $n=1, 2, \dots$ и $m=1, 2, \dots, 2^n-1$) и обладающих тем свойством, что

$$\bar{V}_r \subset V_{r'}, \text{ если } r < r'.$$

Такие окрестности V_r легко строятся индукцией по числу n . При $n=1$ за окрестность $V_{1/2}$ следует принять произвольную окрестность V множества A , для которой $\bar{V} \subset U$ (такая окрестность существует в силу нормальности пространства X). Пусть для некоторого $n \geq 1$ окрестности $V_{m/2^n}$ уже построены ($m=1, 2, \dots, 2^n-1$). Примем для каждого числа

$r = (2s + 1)/2^{n+1}$, $s = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, за окрестность V_r открытое множество V (существующее в силу нормальности пространства X), для которого $\bar{V}_{s/2^n} \subset V$ и $\bar{V} \subset \bar{V}_{(s+1)/2^n}$ (при $s = 0$ под множеством $\bar{V}_{s/2^n}$ подразумевается множество A , а при $s = 2^n - 1$ под окрестностью $V_{(s+1)/2^n}$ — окрестность U). Тем самым мы получим окрестности V_r и для $n + 1$.

Построив окрестности V_r , мы определим на пространстве X функцию g формулой

$$g(x) = \sup_{x \notin V_r} r, \quad x \in X.$$

Иначе говоря, значение $g(x)$ функции g в точке $x \in X$ равно верхней грани всех чисел r , для которых $x \notin V_r$. Функция g однозначно определена и непрерывна (ибо для любого $a \in \mathbf{R}$ множество $[g < a]$ совпадает с множеством $\bigcup_{r < a} V_r$ и потому открыто). Ее значения принадлежат отрезку $[0, 1]$ и она равна нулю на множестве A и единице вне окрестности U . Поэтому функция $f = 1 - g$ является искомой функцией Урысона.

Замечание. Лемма Урысона не утверждает, что $A = [f = 1]$ или что $U = [f \neq 0]$. Вообще говоря, функции f , для которой хотя бы одно из этих равенств имеет место, может и не существовать. Замкнутые множества, имеющие вид $[f = \text{const}]$, иногда называются *функционально замкнутыми*. Аналогично открытые множества вида $[f \neq \text{const}]$ называются *функционально открытыми*. Можно доказать, что замкнутое (открытое) множество нормального пространства тогда и только тогда функционально замкнуто (открыто), когда его можно представить в виде пересечения (соответственно объединения) счетного семейства открытых (соответственно замкнутых) множеств.

Этот факт нам не понадобится и мы его оставим без доказательства.

Покажем теперь, что

для любой непрерывной функции g , определенной на замкнутом подпространстве A нормального пространства

X , существует на пространстве X такая непрерывная функция f , что

$$f(x) = g(x)$$

для каждой точки $x \in A$.

Это утверждение известно как теорема Титце (иногда его называют также теоремой Брауэра — Урысона). Предусмотренную этой теоремой функцию f мы будем называть *распространением* функции g (с подпространства A на все пространство X).

Сначала мы докажем теорему Титце при дополнительном предположении, что

$$|g(x)| \leq 1 \quad (1)$$

для всех $x \in A$. Определим по индукции на множестве A последовательность $\{g_n\}$ непрерывных функций, полагая

$$\begin{aligned} g_0 &= g, \\ g_{n+1} &= g_n + \frac{2^n}{3^{n+1}} (2h_n - 1), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

где h_n — функция Урысона на пространстве X , построенная для замкнутого (в A , а потому и в X) множества $\left[g_n \leq -\frac{2^n}{3^{n+1}} \right]$ и его окрестности $X \setminus \left[g_n \geq \frac{2^n}{3^{n+1}} \right]$. По индукции для любой точки $x \in A$ легко доказывается оценка

$$|g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

(следует иметь в виду, что $g_{n+1}(x) = g_n(x) + \frac{2^n}{3^{n+1}}$ при $g_n(x) \leq -\frac{2^n}{3^{n+1}}$ и $g_{n+1}(x) = g_n(x) - \frac{2^n}{3^{n+1}}$ при $g_n(x) \geq \frac{2^n}{3^{n+1}}$).

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$$

для любой точки $x \in A$.

Составим теперь из непрерывных на пространстве X функций

$$f_n(x) = -\frac{2^n}{3^{n+1}} (2h_n(x) - 1)$$

бесконечный ряд

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2)$$

Поскольку для любой точки $x \in X$ имеет место неравенство $|f_n(x)| \leq \frac{2^n}{3^{n+1}}$ и поскольку числовой ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \dots \quad (3)$$

сходится, функциональный ряд (2) также сходится (во всех точках $x \in X$) и его сумма $f(x)$ непрерывна на X . Кроме того, при $x \in A$ для n -й частной суммы $s_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x)$ ряда (2) имеет место равенство

$$s_n(x) = g_0(x) - g_{n+1}(x).$$

Переходя в этом соотношении к пределу (при $n \rightarrow \infty$), мы немедленно получим, что для любой точки $x \in A$ имеет место равенство

$$f(x) = g(x).$$

Тем самым теорема Титце при дополнительном предположении (1) полностью доказана. При этом, построенная функция f во всех точках удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| \leq 1, \quad x \in X$$

(ибо сумма ряда (3) равна единице).

Рассмотрим теперь случай, когда для всех точек $x \in A$ выполнено строгое неравенство

$$|g(x)| < 1, \quad (4)$$

и покажем, что тогда существует распространение f функции g , для которого аналогичное строгое неравенство

$$|f(x)| < 1 \quad (5)$$

выполнено во всех точках $x \in X$.

Действительно, по доказанному, существует распространение f_0 функции g , удовлетворяющее в любой точке $x \in X$ неравенству $|f_0(x)| \leq 1$. Пусть $A_1 = A \cup [f_0 = -1] \cup [f_0 = 1]$. Определим на множестве A_1 числовую функцию g_1 , полагая

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in A, \\ 1, & \text{если } x \in [f_0 = -1], \\ -1, & \text{если } x \in [f_0 = 1]. \end{cases}$$

Так как множества $A_1[f = -1]$ и $[f = 1]$ замкнуты и попарно не пересекаются, то функция g_1 однозначно определена и непрерывна. Кроме того,

$$|g_1(x)| \leq 1$$

для любой точки $x \in A_1$. Следовательно, по доказанному выше, на пространстве X существует такое распространение f_1 функции g_1 , что

$$|f_1(x)| \leq 1$$

для любой точки $x \in X$. Но тогда функция

$$f(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}$$

будет распространением на X функции g , удовлетворяющим условию (5).

Для доказательства теоремы Титце в общем случае достаточно теперь заметить, что для любой непрерывной на A функции $g(x)$ функция $g_*(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} g(x)$ непрерывна на A и удовлетворяет условию (4). Пусть $f_*(x)$ — ее распространение, удовлетворяющее условию (5). Ясно, что функция $f(x) = \operatorname{tg} \left\{ \frac{\pi}{2} f_*(x) \right\}$ непрерывна на X и представляет собой распространение функции $g(x)$.

Тем самым теорема Титце полностью доказана.

В дополнение к теореме Титце полезно заметить, что если для любой точки $x \in A$ имеют место неравенства

$$a \leq g(x) \leq b$$

(или соответственно неравенства $a < g(x) < b$), то распространение f функции g можно построить так, чтобы для любой точки $x \in X$ имели место неравенства

$$a \leq f(x) \leq b$$

(соответственно неравенства $a < f(x) < b$).

Действительно, при $a = -1$, $b = 1$ это утверждение фактически уже доказано выше. Общий случай сводится к этому специальному очевидным линейным преобразованием.

Пусть теперь $\Gamma = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$ — произвольное открытое локально конечное покрытие пространства X . Семейство $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$ непрерывных на X функций f_α мы будем называть *разложением единицы, подчиненным покрытию Γ* , если

- 1) для любого $\alpha \in A$ функция f_α неотрицательна и ее носитель $[f_\alpha \neq 0]$ содержится в элементе U_α покрытия Γ ;
- 2) для любой точки $x \in X$ имеет место равенство

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$$

(ввиду локальной, а потому и точечной конечности покрытия Γ в последней сумме для любой точки $x \in X$ лишь конечное число слагаемых отлично от нуля).

Оказывается, что

для любого локально конечного покрытия $\Gamma = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$ нормального пространства X существует подчиненное ему разложение единицы $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что

для любого локально конечного покрытия $\Gamma = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$ нормального пространства X существует такое покрытие $\Delta = \{V_\alpha; \alpha \in A\}$, что

$$\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$$

для любого $\alpha \in A$.

В самом деле, поскольку пространство X нормально, для любого элемента V_α покрытия Δ существует такое открытое множество W_α , что

$$\bar{V}_\alpha \subset W_\alpha, \quad \bar{W}_\alpha \subset U_\alpha.$$

Но тогда, как легко видеть, функции

$$f_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{\sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x)}, \quad \alpha \in A, \quad x \in X,$$

где g_α — функция Урысона пары $(W_\alpha, \bar{V}_\alpha)$, однозначно определены, непрерывны (в силу локальной конечности покрытия Γ) и составляют разложение единицы, подчиненное покрытию Γ .

Нам остается, таким образом, лишь построить покрытие Δ . С этой целью мы рассмотрим множество $\mathfrak{G}$ всех (открытых) покрытий $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ пространства X , для которых при любом $\alpha \in A$ либо $\bar{G}_\alpha \subset U_\alpha$, либо $G_\alpha = U_\alpha$. Это множество не пусто (например, оно содержит данное покрытие Γ). Для любого такого покрытия $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ мы будем символом A_0 обозначать множество всех $\alpha \in A$, для которых $\bar{G}_\alpha \subset U_\alpha$. Введем в множество $\mathfrak{G}$ частичную упорядоченность, считая, что $\{G_\alpha\} < \{G'_\alpha\}$, если $A_0 \subset A'_0$ и если $G_\alpha = G'_\alpha$ для любого $\alpha \in A_0$. Грубо говоря, чтобы получить из покрытия $\{G_\alpha\}$ «большее» покрытие $\{G'_\alpha\}$, нужно, не трогая уже построенных множеств G_α , заменить некоторые U_α меньшими множествами G_α .

Ясно, что это отношение действительно является отношением частичной упорядоченности (т. е. обладает свойством транзитивности).

Рассмотрим теперь в множестве $\mathfrak{G}$ произвольное линейно упорядоченное подмножество. Обозначив элементы этого подмножества символами Γ^β , где β пробегает некоторое множество индексов B , и положив $\Gamma^\beta = \{G_\alpha^\beta; \alpha \in A\}$, мы определим для каждого $\alpha \in A$ множество $G_\alpha \subset X$ формулой

$$G_\alpha = \bigcap_{\beta \in B} G_\alpha^\beta.$$

Ясно, что для любого $\alpha \in A$ все множества $G_\alpha^\beta \neq U_\alpha$ (если такие множества существуют) совпадают друг с другом. Поэтому существует такой индекс $\beta_\alpha \in B$, что $G_\alpha = G_\alpha^{\beta_\alpha}$. Следовательно, множество G_α открыто и обладает тем свойством, что либо $G_\alpha = U_\alpha$, либо $\bar{G}_\alpha \subset U_\alpha$. Покажем, что семейство $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ является покрытием пространства X .

Пусть x — произвольная точка пространства X и пусть A_x — подмножество множества A , состоящее из всех индексов $\alpha \in A$, для которых $x \in U_\alpha$. Поскольку в силу локальной конечности покрытия Γ множество A_x конечно, среди индексов β_α , $\alpha \in A_x$, существует наибольший (по отношению к упорядочению множества B , индуцированному упорядочением множества $\mathfrak{G}$) индекс β_{α_0} . Так как семейство $\Gamma^{\beta_{\alpha_0}} = \{G_\alpha^{\beta_{\alpha_0}}, \alpha \in A\}$ является покрытием, то существует такой индекс $\alpha_* \in A$, что $x \in G_{\alpha_*}^{\beta_{\alpha_0}}$. Поскольку $G_{\alpha_*}^{\beta_{\alpha_0}} \subset U_{\alpha_*}$, индекс α_* принадлежит подмножеству A_x . Но ясно, что для любого

индекса $\alpha \in A_x$ имеет место равенство $G_{\alpha}^{\beta_{\alpha_0}} = G_{\alpha}^{\beta} = G_{\alpha}$. Следовательно, $x \in G_{\alpha_*}$.

Построенное покрытие $\{G_{\alpha}; \alpha \in A\}$ принадлежит, согласно сказанному выше, множеству $\mathfrak{G}$ и является, как легко видеть, наименьшим его элементом, следующим за всеми элементами Γ^{β} , т. е. оно представляет собой верхнюю грань рассматриваемого линейно упорядоченного подмножества.

Таким образом, мы доказали, что любое линейно упорядоченное подмножество множества $\mathfrak{G}$ обладает верхней гранью. Следовательно, согласно лемме Цорна¹⁾ это множество содержит хотя бы один максимальный элемент $\{V_{\alpha}; \alpha \in A\}$.

Для завершения доказательства остается показать, что покрытие $\Delta = \{V_{\alpha}; \alpha \in A\}$ обладает тем свойством, что для любого его элемента V_{α} имеет место включение

$$\bar{V}_{\alpha} \subset U_{\alpha}.$$

Пусть это не так. Тогда существует такой индекс $\alpha_0 \in A$, что $V_{\alpha_0} = U_{\alpha_0}$. Рассмотрим замкнутое множество

$$F = X \setminus \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} U_{\alpha}.$$

Ясно, что $F \subset U_{\alpha_0}$. Поэтому, поскольку пространство X нормально, существует такое открытое множество V , что

$$F \subset V, \quad \bar{V} \subset U_{\alpha_0}.$$

Легко видеть, что семейство $\Delta' = \{V, V_{\alpha}; \alpha \in A \setminus \alpha_0\}$ является покрытием пространства X , принадлежит множеству $\mathfrak{G}$, отлично от покрытия Δ и обладает тем свойством, что $\Delta < \Delta'$. Но ввиду максимальнойности покрытия Δ это невозможно.

Тем самым сформулированная выше теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Локальная конечность покрытия Γ нам была нужна лишь для того, чтобы все множества A_x были конечны. Следовательно, покрытие Δ существует и для точечно-конечных покрытий Γ .

¹⁾ Эта лемма утверждает, что частично упорядоченное множество, каждое линейно упорядоченное подмножество которого обладает верхней гранью, содержит максимальный элемент.

4. Метрические пространства

Говорят, что множество X определено как *метрическое пространство* или что в него введена *метрика*, если любым двум его точкам $x, y \in X$ отнесено неотрицательное вещественное число $\rho(x, y)$ (называемое *расстоянием* между этими точками), причем выполнены следующие аксиомы:

1) равенство $\rho(x, y) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) для любых двух точек $x, y \in X$ имеет место равенство

$$\rho(x, y) = \rho(y, x);$$

3) для любых трех точек $x, y, z \in X$ имеет место равенство

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Аксиома 1) называется аксиомой невырожденности метрики, аксиома 2) — аксиомой симметричности, а аксиома 3) — аксиомой треугольника.

Примером метрического пространства служит n -мерное арифметическое пространство R^n с обычной евклидовой метрикой (в этой метрике за расстояние $\rho(u, v)$ между точками $u = (u^1, \dots, u^n) \in R^n$ и $v = (v^1, \dots, v^n) \in R^n$ принимается длина $|u - v| = \sqrt{(u^1 - v^1)^2 + \dots + (u^n - v^n)^2}$ вектора $u - v$).

Расстоянием $\rho(A, B)$ между двумя подмножествами A и B метрического пространства X называется точная нижняя грань $\inf \rho(x, y)$ расстояний $\rho(x, y)$, где x и y — произвольные точки подмножеств A и B соответственно. Это расстояние может быть равно нулю и без того, чтобы множества A и B пересекались. Для любого $\varepsilon > 0$ совокупность $S_\varepsilon(A)$ всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, A) < \varepsilon$, называется *шаровой ε -окрестностью* подмножества $A \subset X$. В любом метрическом пространстве можно ввести одну и только одну топологию, в которой все шаровые окрестности каждой его точки открыты и составляют фундаментальную систему ее окрестностей. В этой топологии множество $A \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда любая точка $x \in X$, для которой $\rho(x, A) = 0$, принадлежит этому множеству. Мы будем называть эту топологию *естественной топологией* метрического

пространства X и будем в дальнейшем каждое метрическое пространство (например, евклидово пространство R^n) рассматривать как топологическое пространство с этой естественной топологией.

Топологию пространства R^n можно описать и по другому, заметив, что оно представляет собой топологическое произведение n экземпляров числовой оси R . Поэтому базой этого пространства является, например, семейство всех параллелепипедов

$$a^1 < t^1 < b^1, \dots, a^n < t^n < b^n, \quad (t^1, \dots, t^n) \in R^n,$$

где a^i и $b^i > a^i$, $i = 1, \dots, n$, — произвольные вещественные числа. Параллелепипеды, для которых все числа a^i и b^i рациональны, очевидно, также образуют базу пространства R^n .

По определению естественная топология метрического пространства X обладает тем свойством, что для любой точки $x \in X$ система всевозможных шаровых окрестностей $S_\varepsilon(x)$ является фундаментальной системой окрестностей точки x . Аналогичное утверждение имеет место и для компактных подмножеств, т. е. для любого компактного подмножества $C \subset X$ окрестности $S_\varepsilon(C)$ составляют фундаментальную систему его окрестностей. Другими словами, для любого открытого множества $U \supset C$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $S_\varepsilon(C) \subset U$. Для произвольных замкнутых подмножеств соответствующее утверждение, вообще говоря, неверно.

В естественной топологии пространства X метрика $\rho(x, y)$ представляет собой непрерывную функцию на произведении $X \times X$. Кроме того, для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $A \subset X$ функция $\rho(x, A)$ непрерывна на X . Для любого замкнутого множества $A \subset X$ и любой его окрестности U функция

$$f(x) = \frac{\rho(x, X \setminus U)}{\rho(x, A) + \rho(x, X \setminus U)}$$

представляет собой функцию Урысона пары (U, A) . Для этой функции множество $[f = 1]$ в точности совпадает с множеством A (а множество $[f \neq 0]$ — с множеством U). Множество $[f \geq 1/2]$ представляет собой окрестность множества A , замыкание $[f \geq 1/2]$ которой содержится в окрестности U . Таким образом, любое метрическое пространство, будучи, очевидно, хаусдорфовым, нормально. При этом, в отличие от произвольных нормальных пространств, в метрическом про-

пространстве X любое замкнутое множество функционально замкнуто и любое открытое множество функционально открыто.

Топологическое пространство X называется *метризуемым*, если на нем существует (вообще говоря, не единственная) метрика, *согласованная* с топологией пространства X , т. е. такая, что определяемая ею естественная топология совпадает с топологией пространства X . Эту метрику всегда можно выбрать так, чтобы получающееся метрическое пространство было *ограниченным*, т. е. чтобы расстояние между двумя любыми его точками не превышало некоторого фиксированного числа $K > 0$.

Действительно, любую метрику ρ можно преобразовать в ограниченную (числом K) метрику ρ' , определяющую ту же топологию, положив

$$\rho'(x, y) = K \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

для любых точек $x, y \in X$.

Каждое дискретное пространство метризуемо. Топологическая сумма любого числа и топологическое произведение счетного числа метризуемых пространств метризуемы.

Метрика в топологическое произведение счетного числа метризуемых пространств вводится посредством очевидного бесконечного ряда. Для того чтобы этот ряд сходил, достаточно в n -м сомножителе выбрать метрику, ограниченную, скажем, числом $1/n^2$. Проверка того, что построенная таким образом метрика согласована с топологией произведения, не представляет никаких затруднений и мы ее опустим.

Из метризуемости произведения метрических пространств немедленно вытекает, в частности, что любое метрическое пространство устойчиво нормально.

Каждое подмножество A метрического пространства X естественным образом определяется как метрическое пространство, причем метрика подмножества A согласована с его топологией, индуцированной естественной топологией всего пространства X .

В частности, любое подмножество евклидова пространства R^n является метрическим пространством. Среди этих подмножеств для нас в дальнейшем особую роль будет играть *единичный шар* E^n пространства R^n , состоящий из всех точек

$v \in R^n$, для которых $|v| \leq 1$ (здесь и далее мы отождествляем точки пространства R^n с их радиусами-векторами). Шар E^n замкнут в пространстве R^n и является замыканием *открытого единичного шара* E^n , состоящего из точек $v \in R^n$, для которых $|v| < 1$. Границей шара E^n служит *единичная сфера* S^{n-1} , состоящая из точек $u \in R^n$, для которых $|u| = 1$. Каждая точка шара E^n имеет вид vu , где $0 \leq v \leq 1$ и $u \in S^{n-1}$, причем при $v \neq 0$ это представление однозначно.

В изложенных определениях предполагалось, что $n > 0$. Иногда нам будет удобно распространять их и на случай $n = 0$, считая, что шар E^0 состоит из одной точки. При этом мы будем считать, что $E^0 = E^0$ и что $S^{-1} = \emptyset$.

Нетрудно показать, что шар E^n (а также шар E^n) и сфера S^{n-1} (при $n > 1$) связны. Кроме того, шар E^n и сфера S^{n-1} компактны, а шар E^n локально компактен. Наконец, пространство R^n (а потому и все его подпространства) является пространством со счетной базой и, следовательно, имеет счетный локальный вес, сепарабельно и финально-компактно.

Легко, впрочем, видеть, что

любое метрическое пространство X является пространством счетного локального веса.

Действительно, для каждой точки $x \in X$ окрестности $S_{1/n}(x)$ составляют, очевидно, фундаментальную систему окрестностей. В частности,

каждое метрическое пространство является каонным пространством.

Кроме того,

для любого метрического пространства X следующие свойства равносильны:

- 1) *пространство X обладает счетной базой;*
- 2) *пространство X сепарабельно;*
- 3) *пространство X финально-компактно.*

Действительно, импликации $1) \Rightarrow 2)$ и $1) \Rightarrow 3)$ имеют место для любых топологических пространств. Для доказательства импликации $2) \Rightarrow 1)$ достаточно заметить, что для любого счетного всюду плотного множества $\{x_n\}$ открытые множества вида $S_{1/m}(x_n)$, где $n, m = 1, 2, \dots$, составляют базу пространства X . Для доказательства импликации $3) \Rightarrow 2)$ мы, выбрав произвольное $n > 0$, рассмотрим семейство всех

подмножеств пространства X , каждое из которых обладает тем свойством, что попарные расстояния между любыми его двумя точками не меньше чем $1/n$. Ясно, что это семейство (частично упорядоченное по включению) удовлетворяет условиям леммы Цорна и, следовательно, в нем существует максимальное подмножество $C_{1/n}$. Это подмножество дискретно и потому (в силу финальной компактности) счетно. Следовательно, множество

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{1/n}$$

также счетно. Для завершения доказательства остается заметить, что множество C всюду плотно (ибо для любой точки $x \in X$ и любого $n > 0$ в множестве $C_{1/n}$ — в силу его максимальной, — а потому и в множестве C , существует такая точка y , что $\rho(x, y) < 1/n$).

Поскольку любое компактное пространство финально-компактно, из этой теоремы вытекает, что

любое компактное метрическое пространство сепарабельно.

Локальная компактность, однако, уже недостаточна для сепарабельности метрического пространства. Тем не менее

любое связное локально компактное метрическое пространство сепарабельно.

Эта теорема принадлежит П. С. Александрову. Она немедленно вытекает из результатов п. 2 и того факта, что

любое метрическое пространство X паракомпактно.

Последнее утверждение впервые было доказано Стоуном. Для его доказательства мы должны установить, что в любое покрытие $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ пространства X можно вписать локально конечное покрытие. С этой целью мы предположим, что множество индексов A рассматриваемого покрытия вполне упорядочено. Пусть α_0 — его первый элемент. Обозначая для любого множества $A \subset X$ и любого $n > 0$ символом $[A]_n$ множество (очевидно, замкнутое) всех точек $x \in X$, для которых $S_{2^{-n}}(x) \subset A$, мы по индукции построим для каждого $\alpha \in A$ и любого $n > 0$ замкнутое множество F_α^n , полагая

$$F_{\alpha_0}^n = [U_{\alpha_0}]_n, \quad F_\alpha^n = \left[U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta^n \right]_n.$$

Пусть x — произвольная точка пространства X и пусть α — наименьший индекс из A , для которого $x \in U_\alpha$, а n — такое число, что $S_{2^{-n}}(x) \subset U_\alpha$. Если $x \notin F_\alpha^n$, то $S_{2^{-n}}(x) \not\subset U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta^n$, и потому существует такой индекс $\alpha_1 < \alpha$, что $S_{2^{-n}}(x) \cap F_{\alpha_1}^n \neq \emptyset$. Но тогда

$$x \in S_{2^{-n}}(F_{\alpha_1}^n) = S_{2^{-n}}\left(\left[U_{\alpha_1} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha_1} F_\beta^n\right]_n\right) \subset U_{\alpha_1} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha_1} F_\beta^n \subset U_{\alpha_1},$$

что ввиду выбора индекса α невозможно. Следовательно, $x \in F_\alpha^n$. Тем самым доказано, что

$$X = \bigcup_{n, \alpha} F_\alpha^n.$$

Рассмотрим, далее, множества

$$\Phi_\alpha^n = \overline{S_{2^{-(n+3)}}(F_\alpha^n)}, \quad G_\alpha^n = S_{2^{-(n+2)}}(F_\alpha^n).$$

Ясно, что замкнутое множество Φ_α^n содержится в открытом множестве G_α^n . Далее, так как

$$S_{2^{-n}}(F_\alpha^n) \subset U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta^n,$$

то для любого $\beta < \alpha$ пересечение $S_{2^{-n}}(F_\alpha^n) \cap F_\beta^n$ пусто и потому $\rho(F_\alpha^n, F_\beta^n) \geq 2^{-n}$. Следовательно, $\rho(G_\alpha^n, G_\beta^n) \geq 2^{-(n+1)}$. Поскольку $\Phi_\alpha^n \subset G_\alpha^n$, отсюда вытекает, что для любого $n > 0$ множество

$$\Phi^n = \bigcup_\alpha \Phi_\alpha^n$$

замкнуто.

Определим теперь по индукции открытые множества V_α^n , полагая

$$V_\alpha^1 = G_\alpha^1, \quad V_\alpha^n = G_\alpha^n \setminus \bigcup_{m < n} \Phi_\alpha^m.$$

Пусть $x \in X$. Так как $\bigcup_{n, \alpha} F_\alpha^n = X$ и, значит, $\bigcup_{n, \alpha} \Phi_\alpha^n = X$, то существуют такое $n \geq 0$ и такое $\alpha \in A$, что $x \in \Phi_\alpha^n$. Если n выбрано (при данном α) наименьшим возможным, то

$$x \in \Phi_\alpha^n \setminus \bigcup_{m < n} \Phi_\alpha^m = \Phi_\alpha^n \setminus \bigcup_{m < n} \Phi^m$$

(как мы знаем, $\Phi_\alpha^n \subset G_\alpha^n$ и потому $\Phi_\alpha^m \cap \Phi_\beta^m \neq \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$). Следовательно,

$$x \in G_\alpha^n \setminus \bigcup_{m < n} \Phi^m = V_\alpha^n.$$

Это показывает, что множества V_α^n составляют покрытие пространства X .

Так как

$$V_\alpha^n \subset G_\alpha^n \subset S_{2^{-n}}(F_\alpha^n) \subset U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta^n \subset U_\alpha,$$

то покрытие $\{V_\alpha^n\}$ вписано в покрытие $\{U_\alpha\}$.

Наконец, пусть $x \in X$ и пусть $x \in F_{\alpha'}^n$. Так как

$$S_{2^{-(n+3)}}(x) \subset \Phi_{\alpha'}^n \subset \Phi^n, \text{ то } S_{2^{-(n+3)}}(x) \cap V_\alpha^m = \emptyset$$

для любого $\alpha \in A$ и любого $m > n$. С другой стороны, так как $\rho(G_\alpha^m, G_\beta^m) \geq 2^{-(m+1)}$ при $\alpha \neq \beta$, а $2 \cdot 2^{-(m+3)} < 2^{-(n+1)}$ при $m \leq n$, то для каждого $m \leq n$ существует не более одного индекса $\alpha \in A$, для которого $S_{2^{-(n+3)}}(x) \cap G_\alpha^m \neq \emptyset$, а значит, и не более одного индекса $\alpha \in A$, для которого $S_{2^{-(n+3)}}(x) \cap V_\alpha^n = \emptyset$. Таким образом, окрестность $S_{2^{-(n+3)}}(x)$ точки x пересекается не более чем с n элементами покрытия $\{V_\alpha^n\}$. Следовательно, это покрытие локально конечно.

Тем самым теорема Стоуна полностью доказана.

Из теоремы Стоуна и результатов п. 2 немедленно вытекает, в частности, что

метрическое пространство тогда и только тогда компактно, когда оно секвенциально компактно.

Все рассмотренные выше свойства метрических пространств относились не столько к метрическим, сколько к метризуемым пространствам и потому имели, по существу, топологический характер. Рассмотрим теперь некоторые «метрические» свойства метрических пространств, т. е. свойства, существенно зависящие от заданной в пространстве метрики.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, когда $n, m > N$. Ясно, что любая сходящаяся последовательность фундаментальна. Если верно обратное, т. е. если любая фундаментальная

последовательность точек пространства X сходится, то это пространство называется *полным пространством*. Очевидно, что каждое замкнутое подпространство полного пространства само является полным пространством. Если любое замкнутое ограниченное подпространство метрического пространства X компактно, то пространство X полно.

Действительно, пусть $\{x_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность точек пространства X . Если среди ее точек имеется лишь конечное число различных, то эта последовательность, очевидно, сходится. Пусть среди точек x_n имеется бесконечно много различных. Множество этих точек, будучи, очевидно, дискретным и ограниченным, не может быть замкнутым (ибо в противном случае оно было бы компактным, а любое дискретное компактное множество конечно). Поэтому для этого множества существует точка прикосновения a , ему не принадлежащая. Эта точка является пределом некоторой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$, а потому и всей последовательности $\{x_n\}$ (поскольку эта последовательность, по условию, фундаментальна).

Условиям этой теоремы удовлетворяет, в частности, евклидово пространство R^n . Поэтому пространство R^n (а следовательно, и любое его замкнутое подпространство) полно.

С другой стороны, каждое компактное метрическое пространство также удовлетворяет этим условиям. Следовательно, *любое компактное метрическое пространство полно*.

Требование локальной компактности для полноты уже не достаточно, если даже дополнительно предположить существование счетной базы. Однако в любое локально компактное топологическое пространство X со счетной базой можно ввести метрику, согласованную с топологией этого пространства, относительно которой пространство X является полным метрическим пространством. Этот результат нам не понадобится и потому мы оставим его без доказательства.

Можно показать, что любое полное метрическое пространство является пространством второй категории. Доказательство этого утверждения, по существу, повторяет доказательство аналогичного предложения для хаусдорфовых локально компактных пространств (см. п. 2). Следует лишь вместо компактности множеств $\bar{U}_n$ потребовать, чтобы их диаметры стремились к нулю. Поскольку это утверждение нам также не понадобится, мы детально приводить это доказательство не будем.

5. Непрерывные отображения

Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. Легко видеть, что

для любого однозначного отображения

$$f: X \rightarrow Y$$

пространства X в пространство Y следующие свойства равносильны:

1) полный прообраз $f^{-1}(B)$ при отображении f произвольного замкнутого множества $B \subset Y$ замкнут в пространстве X ;

2) полный прообраз $f^{-1}(V)$ при отображении f произвольного открытого множества $V \subset Y$ открыт в пространстве X ;

2') полный прообраз $f^{-1}(V)$ при отображении f произвольного элемента V некоторой предбазы открытых множеств пространства Y открыт в пространстве X ;

3) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности V точки $f(x)$ в пространстве Y существует в пространстве X такая окрестность U точки x , что $f(U) \subset V$;

3') для любой точки $x \in X$ и любой окрестности V точки $f(x)$ в пространстве Y , принадлежащей некоторой фундаментальной системе окрестностей этой точки, существует в пространстве X такая окрестность U точки x , что $f(U) \subset V$;

4) для любого множества $A \subset X$ имеет место включение

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Отображения $f: X \rightarrow Y$, обладающие этими свойствами, называются *непрерывными*. К ним относятся, в частности, все *постоянные отображения*, т. е. отображения, переводящие все пространство X в некоторую фиксированную точку y_0 пространства Y .

Рассмотренные в п. 3 непрерывные функции представляют собой не что иное, как непрерывные отображения пространства X в числовую ось R .

Определение множества *коинцидентности* $[f = g]$ дословно переносится с непрерывных функций на любые непрерывные отображения $f, g: X \rightarrow Y$. Однако, в отличие от

случая числовых функций, это множество может быть и незамкнутым. Можно лишь утверждать, что

если пространство Y хаусдорфово, то для любых двух непрерывных отображений $f, g: X \rightarrow Y$ множество $[f=g]$ замкнуто.

Действительно, в доказательстве для непрерывных функций, приведенном в п. 3, использовалась лишь хаусдорфовость вещественной прямой.

Частным случаем множества коинцидентности является множество $[f=1_X]$ всех неподвижных точек отображения $f: X \rightarrow X$ (т. е. точек $x \in X$, для которых $f(x)=x$). Согласно только что сказанному

множество неподвижных точек произвольного непрерывного отображения $f: X \rightarrow X$ хаусдорфова пространства X в себе замкнуто в этом пространстве.

Композиция ¹⁾

$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

любых двух непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ также является непрерывным отображением. Кроме того, для любого пространства X тождественное отображение

$$1_X: X \rightarrow X$$

(определенное формулой $1_X(x)=x$) непрерывно. На языке теории категорий эти утверждения означают, что совокупность $\mathcal{X}$ всех топологических пространств и всех их непрерывных отображений образует категорию. Изоморфизмы этой категории, т. е. биективные ²⁾ непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$, для которых обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ также непрерывно, называются *гомеоморфизмами*. Пространства X и Y , для которых существует хотя бы один гомеоморфизм $X \rightarrow Y$, называются *гомеоморфными*. Как правило, гомеоморфные пространства мы в дальнейшем будем рассматривать как одинаковые.

¹⁾ Отображение $h: X \rightarrow Z$ называется *композицией* отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, если $h(x)=g(f(x))$ для любой точки $x \in X$. Композиция отображений f и g обозначается символом $g \circ f$.

²⁾ Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *инъективным*, если $f(x_1) \neq f(x_2)$, когда $x_1 \neq x_2$, *надъективным*, если $f(X)=Y$, и *биективным*, если оно одновременно инъективно и надъективно.

Замечание. В п. 1 мы определили понятие топологической суммы любых непересекающихся пространств. Только что введенное соглашение позволяет определить *топологическую сумму* произвольных, в том числе и пересекающихся, пространств как топологическую сумму пространств им гомеоморфных, но уже непересекающихся. Построенная таким образом топологическая сумма определена с точностью до гомеоморфизма.

Пространство Y называется *непрерывным образом* пространства X , если существует хотя бы одно непрерывное надъективное отображение $X \rightarrow Y$. Легко видеть, что непрерывный образ любого компактного (финально- или счетно-компактного) пространства компактен (соответственно финально- или счетно-компактен). Аналогично непрерывный образ связного пространства связан.

Непрерывные отображения

$$u: I \rightarrow X$$

в пространство X единичного отрезка $I = [0, 1]$ мы будем называть *путями* пространства X . Точки $x_0 = u(0)$ и $x_1 = u(1)$ мы будем называть соответственно *началом* и *концом* пути u и будем говорить, что путь u *соединяет* точку x_0 с точкой x_1 . Пространство X мы будем называть *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить хотя бы одним путем. Любое линейно связное пространство X связно.

Действительно, для каждого пути $u: I \rightarrow X$ множество $u(I) \subset X$ связно (ибо отрезок I связан). Таким образом, любые две точки линейно связного пространства X принадлежат связному множеству. Поэтому пространство X связно.

Произвольное топологическое пространство X распадается в объединение непересекающихся линейно связных подпространств, называемых *компонентами линейной связности* пространства X . Множество всех компонент линейной связности пространства X мы будем обозначать символом $\pi_0(X)$.

Пусть пространство X представлено в виде объединения некоторого семейства $\{X_\mu; \mu \in M\}$ своих подпространств:

$$X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu.$$

Тогда для любого непрерывного отображения

$$f: X \rightarrow Y$$

и каждого $\mu \in M$ частичное отображение

$$f|_{X_\mu}: X_\mu \rightarrow Y,$$

как мы знаем, непрерывно. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. из непрерывности частичных отображений $f|_{X_\mu}$ непрерывность отображения f не вытекает. Однако легко видеть, что

если пространство X является свободным объединением своих подпространств X_μ , $\mu \in M$, то для любого пространства Y отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывны все частичные отображения

$$f|_{X_\mu}: X_\mu \rightarrow Y.$$

Это предложение позволяет конструировать непрерывные отображения $X \rightarrow Y$ из непрерывных отображений

$$f_\mu: X_\mu \rightarrow Y$$

подпространств X_μ , $\mu \in M$, пространства X , свободным объединением которых оно является. При этом лишь требуется, чтобы отображения f_μ были *согласованы*, т. е. чтобы

$$f_{\mu_1}|_{X_{\mu_1} \cap X_{\mu_2}} = f_{\mu_2}|_{X_{\mu_1} \cap X_{\mu_2}}$$

для любых $\mu_1, \mu_2 \in M$. Действительно, положив

$$f(x) = f_\mu(x), \text{ если } x \in X_\mu,$$

где x — произвольная точка пространства X , мы получим однозначное отображение

$$f: X \rightarrow Y,$$

для которого

$$f|_{X_\mu} = f_\mu$$

при любом $\mu \in M$. Согласно предыдущему предложению, построенное таким образом отображение f непрерывно.

Как правило, мы будем использовать эту конструкцию лишь в случае, когда число подпространств X_μ конечно и каждое из них замкнуто. Как мы знаем, в этом случае пространство X автоматически является свободным объединением подпространств X_μ .

В другом (еще более важном) методе построения непрерывных отображений используется отображение α^{-1} (вообще говоря, многозначное), обратное к данному надъективному непрерывному отображению

$$\alpha: P \rightarrow X.$$

Пусть $g: P \rightarrow Y$ — такое непрерывное отображение, что составное отображение

$$f = g \circ \alpha^{-1}: X \rightarrow Y$$

однозначно. При каких условиях отображение f непрерывно?

Имея в виду дать (хотя бы и неполный) ответ на этот вопрос, мы будем называть непрерывное надъективное отображение $\alpha: P \rightarrow X$ *отображением отождествления*, если каждое подмножество $A \subset X$, полный прообраз $\alpha^{-1}(A)$ которого при отображении α замкнут (открыт) в P , само замкнуто (открыто) в X . Ясно, что

если отображение α является отображением отождествления, то отображение $f = g \circ \alpha^{-1}$ (предполагаемое однозначным) тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывное отображение $g = f \circ \alpha$.

Подмножество $S \subset P$ мы будем называть *насыщенным* по отношению к отображению $\alpha: P \rightarrow X$, если оно является полным прообразом своего образа, т. е. если

$$S = \alpha^{-1}(\alpha(S)).$$

Для насыщенности множества S достаточно требовать, чтобы $S \supset \alpha^{-1}(\alpha(S))$, ибо всегда $S \subset \alpha^{-1}(\alpha(S))$. Объединение и пересечение насыщенных множеств насыщенно. Кроме того, полный прообраз $\alpha^{-1}(A)$ произвольного множества $A \subset X$ насыщен по отношению к отображению $\alpha: P \rightarrow X$.

При любом непрерывном надъективном отображении $\alpha: P \rightarrow X$ каждое замкнутое (открытое) множество $A \subset X$ является образом некоторого замкнутого (открытого) насыщенного множества $S \subset P$ (например, множества $S = \alpha^{-1}(A)$).

Оказывается, что обратное свойство характеризует отображения отождествления, т. е.

непрерывное надъективное отображение $\alpha: P \rightarrow X$ тогда и только тогда является отображением отождествления, когда для любого замкнутого (открытого) насыщенного множества $S \subset P$ множество $\alpha(S)$ замкнуто (открыто) в X .

Действительно, если α является отображением отождествления, то для любого насыщенного замкнутого (открытого) множества S множество $\alpha(S)$ замкнуто (открыто), ибо замкнуто (открыто) множество $\alpha^{-1}(\alpha(S)) = S$. Обратно, пусть для любого замкнутого (открытого) насыщенного множества S множество $\alpha(S)$ замкнуто (открыто). Рассмотрим произвольное множество $A \subset X$, для которого множество $S = \alpha^{-1}(A)$ замкнуто (открыто) в P . Тогда, поскольку множество S насыщенно, множество $A = \alpha(S)$ будет, по условию, замкнутым (открытым) и потому отображение α будет отображением отождествления.

Из доказанного утверждения непосредственно следует, что *любое непрерывное отображение α компактного пространства P на хаусдорфово пространство X является отображением отождествления.*

Действительно, пусть замкнутое насыщенное множество $S \subset P$ является полным прообразом подмножества $A \subset X$. Являясь замкнутым подмножеством компактного пространства P , множество S компактно и потому его образ $\alpha(S) = A$ также компактен, а следовательно, и замкнут (ибо пространство X хаусдорфово).

Вообще говоря, непрерывное биективное отображение может и не быть гомеоморфизмом. Однако

любое биективное отображение отождествления $\alpha: P \rightarrow X$ является гомеоморфизмом.

Действительно, любое множество $T \subset P$ насыщено по отношению к биективному отображению α и потому, если оно замкнуто (в P), то замкнуто (в X) и множество $(\alpha^{-1})^{-1}T = \alpha(T)$. Но это и означает, что обратное отображение $\alpha^{-1}: X \rightarrow P$ непрерывно.

В частности,

любое биективное непрерывное отображение α компактного пространства P на хаусдорфово пространство X является гомеоморфизмом.

Пусть, например, P — произвольное ограниченное выпуклое тело, лежащее в евклидовом пространстве R^n , т. е. произвольное ограниченное замкнутое (и потому компактное) выпуклое подмножество пространства R^n , содержащее внутренние точки. Легко видеть, что всякое такое тело звездно относительно любой своей внутренней точки x_0 , т. е. каждый луч

$$x_0 + ut, \quad u \in S^{n-1}, \quad 0 \leq t < \infty$$

исходящий из точки x_0 , пересекает границу тела P в одной точке. Другими словами, для любого вектора $u \in S^{n-1}$ существует такое число $\varphi(u) > 0$, что $x_0 + ut \in P$ при $0 \leq t \leq \varphi(u)$ и $x_0 + ut \notin P$ при $t > \varphi(u)$. При этом элементарно-геометрические соображения показывают, что функция $\varphi(u)$ вектора $u \in S^{n-1}$ непрерывна на сфере S^{n-1} . Так как, кроме того, любая точка $x \in P$ имеет вид $x_0 + ut$, где $u \in S^{n-1}$, $0 \leq t \leq \varphi(u)$, причем при $x \neq x_0$ это представление однозначно, то формула

$$\alpha(x_0 + ut) = \frac{t}{\varphi(u)} u$$

определяет биективное непрерывное отображение

$$\alpha: P \rightarrow E^n$$

тела P на единичный шар E^n . Поскольку тело P компактно, а шар E^n хаусдорфов, это отображение гомеоморфно. Тем самым мы доказали, что

любое ограниченное выпуклое тело $P \subset R^n$ гомеоморфно шару E^n .

Отсюда, в частности, следует, что

для любых $n \geq 0$ и $m \geq 0$ произведение $E^n \times E^m$ шаров E^n и E^m гомеоморфно шару E^{n+m} .

Действительно, произведение $E^n \times E^m$ является, очевидно, ограниченным выпуклым телом пространства $R^{n+m} = R^n \times R^m$.

Заметим, кстати, что

при различных n шары E^n не гомеоморфны.

Доказательство этого утверждения, несмотря на его наглядную «очевидность», совсем не просто и требует глубокого исследования топологии евклидовых пространств. Поскольку это утверждение нам, по существу, не понадобится, мы его здесь доказывать не будем.

Непрерывное отображение $f: P \rightarrow X$ мы будем называть *отображением компактного характера*, если прообраз $f^{-1}(C)$ любого компактного множества $C \subset X$ является компактным подмножеством пространства P . Оказывается, что

если пространство X хаусдорфово и каонно, то для любого отображения $f: P \rightarrow X$ компактного характера подмножество $f(P)$ замкнуто в пространстве X , а если, кроме того, пространство P также хаусдорфово, то отображение f , рассматриваемое как отображение на подмножество $f(P)$, является отображением отождествления.

Действительно, пусть C — произвольное компактное подмножество пространства X . Поскольку множество $f^{-1}(C)$, по условию, компактно, множество $f(f^{-1}(C))$ также компактно и потому замкнуто. С другой стороны, так как

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(C \cap f(P)),$$

то $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(P)$. Таким образом, подмножество $f(P)$ компактно-замкнуто. Следовательно, оно и замкнуто.

Аналогично, если для некоторого подмножества $A \subset f(P)$ подмножество $f^{-1}(A) \subset P$ замкнуто, то для любого компактного множества $C \subset X$ множество $f^{-1}(A \cap C) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(C)$ компактно, а потому компактно и множество $A \cap C = f(f^{-1}(A \cap C))$. Таким образом, множество A компактно-замкнуто и, следовательно, замкнуто.

В частности, мы видим, что

инъективное отображение компактного характера хаусдорфова пространства в хаусдорфово каонное пространство является гомеоморфизмом на замкнутое подпространство.

Пусть P, Q, X, Y — произвольные топологические пространства и

$$\alpha: P \rightarrow X, \quad \beta: Q \rightarrow Y$$

— произвольные непрерывные отображения. Легко видеть, что формула

$$(\alpha \times \beta)(p, q) = (\alpha(p), \beta(q)), \quad p \in P, q \in Q,$$

однозначно определяет некоторое непрерывное отображение

$$\alpha \times \beta: P \times Q \rightarrow X \times Y.$$

Это отображение мы будем называть *топологическим произведением* отображений α и β . Оно надъективно (инъективно), если отображения α и β надъективны (инъективны).

Наряду с произведением $\alpha \times \beta$ мы будем рассматривать также *топологическую сумму*

$$\alpha \cup \beta : P \cup Q \rightarrow X \cup Y$$

отображений α и β . Эта сумма определена, когда определены пространства $P \cup Q$ и $X \cup Y$ (т. е. когда $P \cap Q = \emptyset$ и $X \cap Y = \emptyset$), и, по определению, представляет собой отображение, совпадающее на P с отображением α , а на Q — с отображением β . Она также надъективна (инъективна), когда отображения α и β надъективны (инъективны). Кроме того, если отображения α и β представляют собой отображения отождествления, то их сумма $\alpha \cup \beta$ также является отображением отождествления.

Для отображения $\alpha \times \beta$ аналог последнего утверждения, вообще говоря, места не имеет. Имея в виду указать достаточные условия, при выполнении которых произведение $\alpha \times \beta$ двух отображений отождествления также является отображением отождествления, мы будем непрерывное надъективное отображение $\alpha : P \rightarrow X$ называть *локально компактным* (соответственно *локально счетно-компактным*), если любая точка $p \in P$ обладает насыщенной по отношению к отображению α окрестностью, замыкание которой содержится в замкнутом, насыщенном и компактном (соответственно счетно-компактном) множестве $C \subset P$. Если пространство X локально компактно, то любое надъективное отображение $P \rightarrow X$ компактного характера локально компактно. Если локально компактное (локально счетно-компактное) отображение $P \rightarrow X$ существует, то пространство P необходимо локально компактно (соответственно локально счетно-компактно). С другой стороны, если пространство P компактно (счетно-компактно), то для каждого пространства X любое непрерывное надъективное отображение $P \rightarrow X$ локально компактно (соответственно локально счетно-компактно).

Легко видеть, что

если пространство X регулярно и отображение $\alpha : P \rightarrow X$ локально компактно (локально счетно-компактно), то

для любой точки $p \in P$ и любой ее насыщенной по отношению к отображению α окрестности S^* существует насыщенная окрестность S точки p , замыкание $\bar{S}$ которой компактно (соответственно счетно-компактно) и содержится в окрестности S^* .

Действительно, по условию, точка p обладает насыщенной окрестностью T , замыкание $\bar{T}$ которой содержится в компактном (счетно-компактном) множестве и потому само компактно (счетно-компактно). Рассмотрим множество $U = \alpha(T \cap S^*)$. Так как множество $T \cap S^*$ насыщено по отношению к отображению α , то множество U открыто, т. е. является окрестностью точки $\alpha(p)$ в пространстве X . Но тогда в силу регулярности пространства X точка $\alpha(p)$ обладает такой окрестностью V , что $\bar{V} \subset U$. Пусть $S = \alpha^{-1}(V)$. Множество S насыщено и является окрестностью точки p . Кроме того, так как $\bar{S} \subset \alpha^{-1}(\bar{V}) \subset \alpha^{-1}(U) = T \cap S^*$, то, во-первых, $\bar{S} \subset S^*$ и, во-вторых, $\bar{S} \subset T$, так что множество $\bar{S}$ компактно (счетно-компактно) и содержится в S^* .

Покажем теперь, что

если отображение отождествления $\alpha: P \rightarrow X$ локально компактно и пространство X регулярно, то для любого отображения отождествления $\beta: Q \rightarrow Y$ отображение

$$\alpha \times \beta: P \times Q \rightarrow X \times Y$$

также является отображением отождествления.

Действительно, пусть W — произвольное подмножество произведения $X \times Y$, прообраз $(\alpha \times \beta)^{-1}(W)$ которого при отображении $\alpha \times \beta$ открыт в пространстве $P \times Q$. Мы должны доказать, что каждое такое множество W открыто в пространстве $X \times Y$, т. е. что любая его точка (x_0, y_0) является его внутренней точкой. Другими словами, мы должны доказать, что в пространствах X и Y существуют такие окрестности U и V точек x_0 и y_0 соответственно, что

$$(x_0, y_0) \in U \times V \subset W.$$

Пусть p_0 и q_0 — такие точки пространств P и Q соответственно, что $\alpha(p_0) = x_0$, $\beta(q_0) = y_0$. Ясно, что для доказательства существования окрестностей U и V достаточно доказать, что точки p_0 и q_0 обладают (в пространствах P и Q

соответственно) такими насыщенными (по отношению к соответственно, отображениям α и β) окрестностями S и T , что

$$(p_0, q_0) \in S \times T \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

С этой целью мы рассмотрим множество S^* всех точек $p \in P$, для которых

$$(p, q_0) \in (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

Ясно, что множество S^* содержит точку p_0 , открыто в пространстве P и насыщенно по отношению к отображению α . Поэтому в силу доказанного выше предложения точка p_0 обладает насыщенной по отношению к отображению α окрестностью S , замыкание $\bar{S}$ которой компактно и содержится в окрестности S^* .

Пусть, далее, T — множество всех точек $q \in Q$, обладающих тем свойством, что для любой точки $p \in \bar{S}$ имеет место включение

$$(p, q) \in (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

Иными словами, T представляет собой максимальное подмножество пространства Q , для которого

$$\bar{S} \times T \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

В частности,

$$S \times T \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

Кроме того, $q_0 \in T$ (ибо $\bar{S} \subset S^*$). Далее,

$$\begin{aligned} \bar{S} \times \beta^{-1}(\beta(T)) &\subset \alpha^{-1}(\alpha(\bar{S})) \times \beta^{-1}(\beta(T)) = \\ &= (\alpha \times \beta)^{-1}(\alpha \times \beta)(\bar{S} \times T) \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W), \end{aligned}$$

откуда ввиду максимальнойности множества T следует, что $\beta^{-1}(\beta(T)) \subset T$, т. е. что множество T насыщенно по отношению к отображению β .

Следовательно, для завершения доказательства нам осталось только доказать, что множество T открыто в пространстве Q .

С этой целью мы заметим, что, поскольку множество $(\alpha \times \beta)^{-1}(W)$, по условию, открыто, каждая его точка является его внутренней точкой и потому для точек p и q

существуют (в пространствах P и Q соответственно) такие окрестности $S_q(p)$ и $T_p(q)$, что

$$(p, q) \in S_q(p) \times T_p(q) \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

Для каждой точки $q \in T$ всевозможные множества вида $S_q(p) \cap \bar{S}$, $p \in \bar{S}$, составляют, очевидно, открытое покрытие подпространства $\bar{S} \subset P$. Следовательно, поскольку это подпространство, по построению, компактно, существует такая конечная система точек $p_1, \dots, p_n \in \bar{S}$, что

$$\bar{S} \subset \bigcup_{i=1}^n S_q(p_i).$$

Пусть

$$T(q) = \bigcap_{i=1}^n T_{p_i}(q).$$

Ясно, что множество $T(q)$ открыто (в Q), содержит точку q и обладает тем свойством, что

$$p \times T(q) \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W)$$

для любой точки $p \in \bigcup_{i=1}^n S_q(p_i)$, а потому, в частности, и для любой точки $p \in \bar{S}$. Следовательно, $T(q) \subset T$, т. е. $q \in \text{Int } T$. Таким образом, множество T , как и утверждалось, открыто. Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Можно указать и другие условия, при выполнении которых произведение отображений отождествления является отображением отождествления. Например,

если отображения отождествления $\alpha: P \rightarrow X$ и $\beta: Q \rightarrow Y$ локально счетно-компактны, пространства P и Q хаусдорфовы, а пространства X и Y регулярны, то отображение

$$\alpha \times \beta: P \times Q \rightarrow X \times Y$$

является отображением отождествления.

Действительно, в этом случае точки p_0 и q_0 обладают (в пространствах P и Q соответственно) насыщенными по отношению к отображениям α и β окрестностями S^* и T^* , замыкания $\bar{S}^*$ и $\bar{T}^*$ которых содержатся в замкнутых

насыщенных счетно-компактных множествах $C \subset P$ и $D \subset Q$. Пусть

$$C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n \subset \dots,$$

$$D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$$

— возрастающие последовательности компактных подмножеств $C_n \subset P$ и $D_n \subset Q$, свободными объединениями которых являются множества C и D соответственно. Без ограничения общности мы можем считать, что

$$p_0 \in C_0, \quad q_0 \in D_0.$$

Заметим также, что, поскольку пространства P и Q , по условию, хаусдорфовы, все множества C_n и D_n замкнуты.

В первую очередь мы построим для любого $n \geq 0$ такие насыщенные по отношению к отображениям $\alpha|_{C_n}$ и $\beta|_{D_n}$ открытые (в пространствах C_n и D_n соответственно) множества $S_n \subset C_n$ и $T_n \subset D_n$, что

$$p_0 \in S_n, \quad q_0 \in T_n, \quad \bar{S}_n \subset S_{n+1}, \quad \bar{T}_n \subset T_{n+1}$$

и

$$\bar{S}_n \times \bar{T}_n \subset W_n, \tag{1}$$

где

$$W_n = (\alpha|_{C_n} \times \beta|_{D_n})^{-1}(W) = (C_n \times D_n) \cap (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

С этой целью мы заметим, что, поскольку пространство C_n компактно, отображение $\alpha|_{C_n}$ локально компактно. Следовательно, отображения $\alpha|_{C_n} : C_n \rightarrow X$ и $\beta|_{D_n} : D_n \rightarrow Y$ удовлетворяют условиям предыдущего предложения. Поэтому для любой точки $(p, q) \in W_n$ в пространствах C_n и D_n существуют такие насыщенные (по отношению к отображениям $\alpha|_{C_n}$ и $\beta|_{D_n}$) окрестности $S_{q,n}^*(p)$ и $T_{p,n}^*(q)$ точек p и q , что

$$(p, q) \in S_{q,n}^*(p) \times T_{p,n}^*(q) \subset W_n.$$

Далее, поскольку пространства X и Y , по условию, регулярны, точки p и q обладают в пространствах C_n и D_n такими насыщенными окрестностями $S_{q,n}(p)$ и $T_{p,n}(q)$, что $\bar{S}_{q,n}(p) \subset S_{q,n}^*(p)$ и $\bar{T}_{p,n}(q) \subset T_{p,n}^*(q)$ (здесь имеются в виду замыкания в пространствах C_n и D_n ; впрочем,

поскольку подпространства C_n и D_n замкнуты, эти замыкания совпадают с замыканиями в пространствах P и Q). Таким образом, мы для любой точки $(p, q) \in W_n$ построили в пространствах C_n и D_n такие насыщенные по отношению к отображениям $\alpha|_{C_n}$ и $\beta|_{D_n}$ окрестности $S_{q, n}(p)$ и $T_{p, n}(q)$ точек p и q , что

$$(p, q) \in \bar{S}_{q, n}(p) \times \bar{T}_{p, n}(q) \subset W_n.$$

В частности, при $n = 0, p = p_0, q = q_0$ мы получаем окрестности

$$S_0 = S_{q_0, 0}(p), \quad T_0 = T_{p_0, 0}(q)$$

точек p_0 и q_0 (в пространствах C_0 и D_0), обладающие свойством (1).

Рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого $n > 0$ уже построены окрестности S_{n-1} и T_{n-1} , обладающие свойством (1). Ясно, что для любой точки $q \in \bar{T}_{n-1}$ все множества вида $\bar{S}_{n-1} \cap S_{q, n}(p), p \in \bar{S}_{n-1}$, составляют открытое покрытие пространства $\bar{S}_{n-1}$. Поскольку это пространство, будучи замкнутым подпространством компактного пространства C_{n-1} , компактно, существует такая конечная система точек $p_1, \dots, p_s \in \bar{S}_{n-1}$, что

$$\bar{S}_{n-1} \subset S_{q, n},$$

где

$$S_{q, n} = \bigcup_{i=1}^s S_{q, n}(p_i).$$

Пусть

$$T_n(q) = \bigcap_{i=1}^s T_{p_i, n}(q).$$

Ясно, что множества $S_{q, n}$ и $T_n(q)$ насыщены (по отношению к отображениям $\alpha|_{C_n}$ и $\beta|_{D_n}$), открыты (в пространствах C_n и D_n) и обладают тем свойством, что

$$\bar{S}_{q, n} \times \bar{T}_n(q) \subset W_n.$$

Кроме того, $q \in T_n(q)$, так что всевозможные множества вида $\bar{T}_{n-1} \cap T_n(q), q \in \bar{T}_{n-1}$, образуют открытое покрытие пространства $\bar{T}_{n-1}$. Поскольку пространство $\bar{T}_{n-1}$ (аналогично пространству $\bar{S}_{n-1}$) компактно, существует такая конечная

система точек $q_1, \dots, q_t \in \bar{T}_{n-1}$, что

$$\bar{T}_{n-1} \subset T_n$$

где

$$T_n = \bigcup_{i=1}^t T_n(q_i).$$

Ясно, что множество T_n вместе с множеством

$$S_n = \bigcap_{i=1}^n S_{q_i, n}$$

удовлетворяет всем условиям, наложенным на окрестности S_n и T_n .

Тем самым окрестности S_n и T_n построены для всех $n \geq 0$.

Пусть теперь

$$S_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n, \quad T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Очевидно, что множества S_∞ и T_∞ насыщены (по отношению к отображениям α и β соответственно), ибо множества C и D , по условию, насыщены. Кроме того, $p_0 \in S_\infty$, $q_0 \in T_\infty$ и $S_\infty \times T_\infty \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W)$. Поэтому множества

$$S = S^* \cap S_\infty, \quad T = T^* \cap T_\infty$$

также насыщены и обладают тем свойством, что

$$(p_0, q_0) \in S \times T \subset (\alpha \times \beta)^{-1}(W).$$

Следовательно, для завершения доказательства нам остается лишь показать, что множества S и T открыты (соответственно в пространствах P и Q).

Рассмотрим сначала множество S_∞ . Так как множество S_n открыто в подпространстве C_n , то для любого $m \leq n$ множество $S_n \cap C_m$ открыто в подпространстве $C_m \subset C_n$. С другой стороны, $S_n \cap C_m = S_n \subset S_m \cap C_m$ при $m > n$. Поэтому

$$S_\infty \cap C_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} (S_n \cap C_m)$$

для любого $m \geq 0$ и это множество открыто в подпространстве C_m . Поскольку пространство C является свобод-

ным объединением подпространств C_m , отсюда следует, что множество S_∞ открыто в пространстве C и, значит, множество $S = S^* \cap S_\infty$ открыто в подпространстве $S^* \subset C$. Но последнее подпространство открыто в пространстве P . Следовательно, множество S открыто и в пространстве P .

Тот факт, что множество T открыто в пространстве Q , доказывается аналогично.

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

6. Топологии отождествления, склеенные пространства, относительные гомеоморфизмы

Пусть P — произвольное топологическое пространство и пусть

$$\alpha: P \rightarrow X$$

— произвольное отображение пространства P на некоторое множество X . Мы введем в множество X топологию, считая подмножество $A \subset X$ тогда и только тогда открытым (замкнутым), когда открыт (замкнут) его полный прообраз $\alpha^{-1}(A)$. Эту топологию мы будем называть *топологией отождествления* (определенной отображением α). Она является слабойшей (т. е. содержащей наибольшее количество замкнутых множеств) топологией пространства X , в которой отображение α непрерывно.

Ясно, что

если пространство X снабжено топологией отождествления, то отображение α является отображением отождествления в смысле п. 5.

Обратно,

если топологическое пространство X обладает тем свойством, что данное надъективное отображение $\alpha: P \rightarrow X$ является отображением отождествления, то топология этого пространства является топологией отождествления, определенной отображением α .

Другими словами, топология отождествления пространства X однозначно определяется требованием, чтобы данное отображение α было отображением отождествления.

В большинстве приложений множество X является множеством всех классов по некоторому отношению эквивалент-

ности, определенному в пространстве P , а отображение $\alpha: P \rightarrow X$ является *естественной проекцией*, сопоставляющей каждой точке $p \in P$ ее класс эквивалентности. В этом случае множество X , снабженное топологией отождествления, называется *фактор-пространством* пространства P по данному отношению эквивалентности. Впрочем, различие между фактор-пространствами и любыми пространствами, снабженными топологией отождествления, по существу, чисто формальное, так как для любого отображения отождествления $\alpha: P \rightarrow X$ существует на P такое отношение эквивалентности, что соответствующее фактор-пространство естественно гомеоморфно пространству X . В этом отношении эквивалентности точки $p_1, p_2 \in P$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\alpha(p_1) = \alpha(p_2).$$

Важный пример фактор-пространства возникает при рассмотрении произвольного непрерывного отображения

$$f: A \rightarrow Y$$

замкнутого подпространства A некоторого топологического пространства X в данное пространство Y . Предполагая, что пространства X и Y не пересекаются, мы введем в их топологической сумме

$$P = X \cup Y$$

отношение эквивалентности, считая, что

1) точки $x_1, x_2 \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$, либо $x_1, x_2 \in A$ и $f(x_1) = f(x_2)$;

2) точки $x \in X$ и $y \in Y$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $y = f(x)$;

3) точки $y_1, y_2 \in Y$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $y_1 = y_2$.

Соответствующее фактор-пространство пространства P мы будем обозначать символом $X \cup_f Y$ и будем говорить, что оно получено *приклеиванием пространства X по подпространству A к пространству Y посредством отображения f* .

Естественная проекция

$$\alpha: P \rightarrow X \cup_f Y$$

является на подпространстве $Y \subset P$ гомеоморфизмом. Поэтому в дальнейшем мы будем, как правило, отождествлять

пространство Y с его образом $\alpha(Y)$, т. е. будем рассматривать пространство Y как подпространство пространства $X \cup_f Y$:

$$Y \subset X \cup_f Y.$$

Без труда проверяется, что пространство Y замкнуто в пространстве $X \cup_f Y$.

Далее, как легко видеть, естественная проекция α является гомеоморфизмом и на открытом множестве $X \setminus A$. Следовательно, мы можем также считать, что

$$X \setminus A \subset X \cup_f Y.$$

При этом

$$X \setminus A = (X \cup_f Y) \setminus Y,$$

так что пространство $X \setminus A$ открыто в пространстве $X \cup_f Y$.

Таким образом, пространство $X \cup_f Y$ можно считать объединением

$$X \cup_f Y = (X \setminus A) \cup Y$$

двух взаимно дополнительных пространств $X \setminus A$ и Y , первое из которых открыто, а второе — замкнуто. В связи с этим мы будем иногда говорить, что пространство $X \cup_f Y$ получено *склеиванием* пространств $X \setminus A$ и Y .

На подпространстве A естественная проекция α совпадает с отображением f .

Принято *парой пространств* (или просто *парой*) называть произвольную пару (X, A) , состоящую из некоторого топологического пространства X и некоторого его подпространства A . Пару (X, A) мы будем называть *хаусдорфовой*, если пространство X хаусдорфово, и *компактной*, если пространство X компактно, а его подпространство A замкнуто.

Пусть (X, A) и (Z, Y) — произвольные пары. *Отображением*

$$g: (X, A) \rightarrow (Z, Y) \tag{1}$$

пары (X, A) в пару (Z, Y) мы будем называть произвольное непрерывное отображение g пространства X в пространство Y , для которого $g(A) \subset Y$. Отображение (1) мы будем называть *относительным гомеоморфизмом*, если оно

гомеоморфно отображает подпространство $X \setminus A$ на подпространство $Z \setminus Y$. Из указанных выше свойств естественной проекции

$$\alpha: P \rightarrow X \cup_f Y$$

немедленно вытекает, что

ограничение

$$\alpha|_X: X \rightarrow X \cup_f Y$$

проекция α на пространстве X представляет собой относительный гомеоморфизм пары (X, A) на пару $(X \cup_f Y, Y)$.

Относительные гомеоморфизмы вида $\alpha|_X$ являются отображениями отождествления, и подпространство Y для них замкнуто. Оказывается, что в классе всех относительных гомеоморфизмов отображения вида $\alpha|_X$ однозначно с точностью до гомеоморфизма характеризуются этими свойствами, т. е.

для каждого относительного гомеоморфизма

$$g: (X, A) \rightarrow (Z, Y),$$

для которого подпространство Y замкнуто в пространстве Z и отображение $g: X \rightarrow Z$ представляет собой отображение отождествления, существует такой гомеоморфизм

$$h: X \cup_f Y \rightarrow Z, \quad f = g|_A,$$

тождественный на подпространстве Y , что

$$g = h \circ \alpha|_X.$$

Таким образом, при выполнении указанных условий пространство Z можно рассматривать как результат приклеивания пространства X к пространству Y по подпространству A посредством отображения $f = g|_A$.

З а м е ч а н и е. В этой формулировке подразумевается, что $X \cap Y = \emptyset$. В противном случае пространство X следует заменить гомеоморфным ему пространством, уже обладающим этим свойством.

Для доказательства сформулированного предложения мы в первую очередь заметим, что подпространство A , являясь прообразом при непрерывном отображении замкнутого подпространства Y , само замкнуто. Поэтому (ввиду сделанного выше замечания) пространство $X \cup_f Y$ определено. Рассмотрим

отображение

$$h: X \cup_f Y \rightarrow Z,$$

совпадающее на $X \setminus A$ с отображением g и тождественное на Y . Ясно, что это отображение биективно и обладает тем свойством, что отображение $h \circ \alpha$ совпадает на X с отображением g (и является тождественным отображением на Y). Отсюда, во-первых, следует, что отображение h непрерывно (ибо отображение $h \circ \alpha$ непрерывно, а проекция α является отображением отождествления). Во-вторых, так как для любого замкнутого множества $C \subset X \cup_f Y$ пересечение замкнутого множества $(h \circ \alpha)^{-1}(h(C)) = \alpha^{-1}(C) \subset X \cup Y$ с пространством X совпадает с множеством $g^{-1}(h(C))$, то, поскольку отображение g является отображением отождествления, множество $h(C)$ замкнуто в Z . Следовательно, отображение h^{-1} также непрерывно. Таким образом, отображение h , как и утверждалось, гомеоморфно.

Как мы знаем, условие на отображение g автоматически удовлетворено, если пространство X компактно, а пространство Z хаусдорфово. Кроме того, ясно, что в этом случае для замкнутости пространства Y достаточно замкнутости пространства A . Таким образом,

для любой хаусдорфовой пары (Z, Y) относительно гомеоморфной компактной паре (X, A) пространство Z гомеоморфно пространству, получающемуся приклеиванием пространства X к пространству Y по подпространству A .

Вообще говоря, пространство $X \cup_f Y$ может и не быть хаусдорфовым, если даже пространства X и Y хаусдорфовы. Однако,

пространство $X \cup_f Y$ хаусдорфово, если

- 1) пространство $X \setminus A$ хаусдорфово;*
 - 2) каждая точка подпространства $X \setminus A$ обладает окрестностью, замыкание которой не пересекается с подпространством A ;*
- и либо*

3') пространство Y хаусдорфово и любые два непересекающиеся открытые (в A) насыщенные по отношению к отображению f подмножества подпространства A высекаются на A непересекающимися открытыми подмножествами пространства X ;

либо

3'') пространство Y вполне хаусдорфово и любые два непересекающиеся замкнутые подмножества подпространства A обладают в X непересекающимися окрестностями.

Действительно, условие 1) обеспечивает, очевидно, хаусдорфовость (существование непересекающихся окрестностей) для любой пары различных точек пространства $X \cup_f Y$, принадлежащих подпространству $X \setminus A$, а условие 2) — хаусдорфовость для любых двух точек $x \in X \setminus A$ и $y \in Y$. Поэтому нам нужно проверить хаусдорфовость лишь для (различных) точек $y_1, y_2 \in Y$.

Пусть выполнено условие 3'). Тогда точки y_1 и y_2 обладают в Y непересекающимися окрестностями V_1 и V_2 . Пробразы $f^{-1}(V_1)$ и $f^{-1}(V_2)$ (возможно пустые) этих окрестностей также не пересекаются и представляют собой открытые в A множества, насыщенные по отношению к отображению f . Поэтому, согласно условию, в X существуют такие открытые непересекающиеся множества U_1 и U_2 , что

$$U_1 \cap A = f^{-1}(V_1), \quad U_2 \cap A = f^{-1}(V_2).$$

Ясно, что множества

$$(U_1 \setminus A) \cup V_1, \quad (U_2 \setminus A) \cup V_2$$

открыты в пространстве $X \cup_f Y$ и не пересекаются (ибо они служат образами при естественной проекции $\alpha: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y$ непересекающихся, открытых и насыщенных по отношению к отображению α множеств $U_1 \cup V_1$ и $U_2 \cup V_2$). Поскольку эти множества содержат точки y_1 и y_2 , свойство хаусдорфовости для этих точек тем самым полностью доказано.

Пусть выполнено условие 3''). Тогда точки y_1 и y_2 обладают в Y окрестностями V_1 и V_2 , замыкания которых $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ не пересекаются. Рассмотрим множества $V'_1 = f^{-1}(V_1)$ и $V'_2 = f^{-1}(V_2)$. Так как $\bar{V}'_1 \subset f^{-1}(\bar{V}_1)$, $\bar{V}'_2 \subset f^{-1}(\bar{V}_2)$ и $f^{-1}(\bar{V}_1) \cap f^{-1}(\bar{V}_2) = f^{-1}(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) = \emptyset$, то

$$\bar{V}'_1 \cap \bar{V}'_2 = \emptyset.$$

Таким образом, множества $\bar{V}'_1$ и $\bar{V}'_2$ являются непересекающимися замкнутыми подмножествами подпространства A (напомним, что A предполагается замкнутым). Поэтому, согласно

условию, эти множества обладают непересекающимися в X окрестностями U_1 и U_2 . Ясно, что множества

$$(U_1 \setminus A) \cup V_1, \quad (U_2 \setminus A) \cup V_2$$

открыты в пространстве $X \cup_f Y$ и не пересекаются (ибо они служат образами при естественной проекции α непересекающихся, открытых и насыщенных по отношению к отображению α множеств $(U_1 \setminus A) \cup V_1' \cup V_1$ и $(U_2 \setminus A) \cup V_2' \cup V_2$). Поскольку эти множества содержат точки y_1 и y_2 , свойство хаусдорфовости доказано, тем самым, и в этом случае.

Ясно, что условия 1), 2) и 3'') (в части, касающейся подпространства A) автоматически выполнены, если пространство X нормально. Следовательно,

если пространство X нормально, а пространство Y вполне хаусдорфово, то пространство $X \cup_f Y$ хаусдорфово.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что если пространства X и Y нормальны, то пространство $X \cup_f Y$ также нормально. Нам этот факт не понадобится.

В частном случае, когда пространство Y состоит только из одной точки y_0 (и, следовательно, отображение $f: A \rightarrow Y$ автоматически оказывается постоянным), пространство $X \cup_f Y$ обозначается символом X/A и называется результатом *стягивания подпространства A в точку y_0* . В этом случае условие 3'), очевидно, выполнено. Что же касается условий 1) и 2), то они заведомо выполнены, если пространство X регулярно. Таким образом,

если пространство X регулярно, то для любого его замкнутого подпространства A пространство X/A хаусдорфово.

Другой важный частный случай склеивания возникает при рассмотрении произвольного непрерывного отображения

$$f: X \rightarrow Y.$$

Пусть $X \times 1$ — подпространство произведения $X \times I$, где I — единичный отрезок $[0, 1]$, состоящее из всех точек вида $(x, 1)$, $x \in X$, и пусть

$$f_1: X \times 1 \rightarrow Y$$

— его отображение в пространство Y , определенное формулой

$$f_1(x, 1) = f(x).$$

Рассмотрим пространство

$$Z_f = (X \times I) \cup_{f_1} Y.$$

Это пространство называется *цилиндром* отображения f и, как мы далее увидим, играет основную роль при исследовании гомотопических свойств этого отображения. Каждая его точка либо имеет вид (x, t) , где $x \in X$, $0 \leq t < 1$, либо является точкой y пространства Y .

Ясно, что условие 2) для пространства Z_f всегда выполнено (окрестностью точки (x, t) , $x \in X$, $0 \leq t < 1$, замыкание которой не пересекается с подпространством $X \times 1$, является, например, любая окрестность вида $X \times [0, t + \varepsilon)$, где ε — любое положительное число меньше $1 - t$), а условие 1) выполнено, если пространство X хаусдорфово. Кроме того, условие 3') (в части, не касающейся пространства Y) также, очевидно, всегда выполнено (открытые множества подпространства $X \times 1$ имеют вид $G \times 1$, где G — открытые множества пространства X ; они высекаются на $X \times 1$ открытыми в $X \times I$ множествами $G \times I$; если множества $G_1 \times 1$ и $G_2 \times 1$ не пересекаются, то множества $G_1 \times 1$ и $G_2 \times I$ также не пересекаются). Следовательно,

если пространства X и Y хаусдорфовы, то для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ пространство Z_f также хаусдорфово.

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В этой главе в основном излагаются различные критерии, позволяющие, в ряде случаев, судить, будет ли данное непрерывное отображение гомотопической эквивалентностью.

Во вводном п. 1 изложены основные понятия гомотопической теории непрерывных отображений и установлены простейшие связи между этими понятиями. В частности, здесь доказывается простая, но полезная лемма, устанавливающая условия, при которых два гомотопных отображения, совпадающих на некотором подпространстве, гомотопны относительно этого подпространства. В конце этого пункта рассмотрено понятие m -связного пространства и доказаны некоторые элементарные свойства таких пространств.

В п. 2 после ряда простых замечаний о гомотопических эквивалентностях доказывается известное характеристическое свойство их цилиндров.

В п. 3 доказывается, что (при выполнении определенных условий) гомотопический тип склеенного пространства $X \cup_f Y$ зависит лишь от гомотопического типа пространства Y и класса гомотопической эквивалентности отображения f .

В п. 4 вводится понятие слабой гомотопической эквивалентности и в связи с этим излагается ряд свойств гомотопических групп. Однако развернутая теория гомотопических групп почти полностью остается вне рамок нашего изложения (достаточно сказать, что мы даже не пользуемся здесь их групповой операцией).

В п. 5 рассматривается понятие гомотопического предела (как в «слабом», так и в «сильном» вариантах) и доказывается, что предел гомотопических эквивалентностей также является гомотопической эквивалентностью.

1. Гомотопии и распространения непрерывных отображений

Каждое семейство

$$f_t: X \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

непрерывных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y определяет по формуле

$$F(x, t) = f_t(x), \quad x \in X, t \in I$$

некоторое отображение

$$F: X \times I \rightarrow Y \quad (2)$$

в пространство Y произведения $X \times I$ пространства X и единичного отрезка $I = [0, 1]$. Семейство (1) мы будем называть *гомотопией* отображений пространства X в пространство Y , если соответствующее отображение (2) непрерывно. Ясно, что и, наоборот, любое непрерывное отображение (2) определяет некоторую гомотопию (1).

Отображение f_0 мы будем называть *начальным*, а отображение f_1 — *конечным* отображениями гомотопии (1).

В дальнейшем нам зачастую придется рассматривать не отдельные пространства X и Y , а пары (X, A) и (Y, B) , где A и B — некоторые подпространства пространств X и Y соответственно. В этом случае нас будут интересовать, как правило, лишь гомотопии вида

$$f_t: (X, A) \rightarrow (Y, B),$$

т. е. гомотопии (1), для которых

$$f_t(A) \subset B$$

при любом $t \in I$. Такие гомотопии мы будем называть *гомотопиями отображений пар*.

Отображения

$$f, g: X \rightarrow Y$$

(или отображения $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$) мы будем называть *гомотопными* (обозначение, $f \sim g$), если существует такая гомотопия

$$f_t: X \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

(или, соответственно, такая гомотопия $f_t: (X, A) \rightarrow (Y, B)$), что

$$f_0 = f, \quad f_1 = g,$$

т. е. что отображение f является ее начальным, а отображение g — ее конечным отображением. В этом случае мы будем также говорить, что отображения f и g *связаны* гомотопией f_t (обозначение $f_t: f \sim g$).

Каждое непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

определяет некоторую гомотопию

$$(1_f)_t: X \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для которой

$$(1_f)_t(x) = f(x)$$

при любых $x \in X$ и $t \in I$. Мы будем называть эту гомотопию *стационарной гомотопией* отображения f .

Отношение гомотопности является, как легко видеть, отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно (ибо $(1_f)_t: f \sim f$), симметрично (если $f_t: f \sim g$, то $f_{1-t}: g \sim f$) и транзитивно (если $f_t: f \sim g$ и $g_t: g \sim h$, то $h_t: f \sim h$, где $h_t = f_{2t}$ при $0 \leq t \leq 1/2$ и $h_t = g_{2t-1}$ при $1/2 \leq t \leq 1$). Поэтому множество всех непрерывных отображений $X \rightarrow Y$ (соответственно множество всех непрерывных отображений $(X, A) \rightarrow (Y, B)$) распадается на непересекающиеся *гомотопические классы*, состоящие из попарно гомотопных отображений. Множество всех гомотопических классов отображений $X \rightarrow Y$ мы будем обозначать символом $[X, Y]$, а отображений $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ — символом $[(X, A), (Y, B)]$. Класс, содержащий данное отображение f , мы будем обозначать символом $[f]$.

Для любых двух гомотопий

$$f_t: X \rightarrow Y, \quad g_t: Y \rightarrow Z, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

семейство отображений

$$h_t = g_t \circ f_t: X \rightarrow Z, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

также, очевидно, является гомотопией. Отсюда следует, что

если отображения $f_0: X \rightarrow Y$ и $g_0: Y \rightarrow Z$ гомотопны, соответственно, отображениям $f_1: X \rightarrow Y$ и $g_1: Y \rightarrow Z$, то отображение $g_0 \circ f_0: X \rightarrow Z$ гомотопно отображению $g_1 \circ f_1: X \rightarrow Z$.

Другими словами,

для любых отображений

$$f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow Z$$

гомотопический класс $[g \circ f] \in [X, Z]$ отображения

$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

зависит только от гомотопических классов $[f] \in [X, Y]$ и $[g] \in [Y, Z]$ отображений f и g соответственно.

В частности, для любого пространства Z и любого непрерывного отображения

$$f: X \rightarrow Y$$

формула

$$f_*[\varphi] = [f \circ \varphi], \quad \varphi: Z \rightarrow X,$$

однозначно определяет некоторое отображение множеств

$$f_*: [Z, X] \rightarrow [Z, Y].$$

Мы будем говорить, что отображение f_* *индуцировано* непрерывным отображением f .

Аналогичные утверждения имеют место, конечно, и для отображений пар.

Напомним, что отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

называется *распространением* отображения

$$g: A \rightarrow Y,$$

где A — некоторое подпространство пространства X , если

$$f(a) = g(a)$$

для любой точки $a \in A$. В этом случае говорят также, что отображение g является *ограничением* отображения f на подпространстве A , и пишут

$$g = f|_A.$$

Иначе можно сказать, что

$$g = f \circ i,$$

где

$$i: A \rightarrow X$$

— *отображение вложения*, т. е. отображение, определенное формулой

$$i(a) = a$$

для любой точки $a \in A$. В дальнейшем тот факт, что некоторое отображение $i: A \rightarrow X$ является отображением вложения, мы будем отмечать, заменяя знак $\rightarrow$ знаком $\subset$, т. е.

вместо $i: A \rightarrow X$ будем писать

$$i: A \subset X.$$

Отображение

$$r: X \rightarrow A$$

пространства X на его подпространство A называется *ретрагирующим*, если оно является распространением тождественного отображения

$$1_A: A \rightarrow A,$$

т. е. если

$$r \circ i = 1_A,$$

или, иначе говоря, если

$$r(a) = a$$

для любой точки $a \in A$. В этом случае мы будем писать

$$r: X \supset A.$$

Подпространства A пространства X , для которых существуют ретрагирующие отображения $r: X \supset A$, называются его *ретрактами*. Для ретрагирующего отображения $r: X \rightarrow A$ множество A совпадает с множеством всех неподвижных точек отображения $i \circ r$. Поэтому

каждый ретракт A хаусдорфова пространства X замкнут в X .

Легко видеть, что

пространство A пространства X тогда и только тогда является его ретрактом, когда для любого пространства Y каждое отображение $g: A \rightarrow Y$ допускает распространение $f: X \rightarrow Y$.

Действительно, если можно распространить любое отображение $g: A \rightarrow Y$, то, в частности, можно распространить и тождественное отображение $1_A: A \rightarrow A$. Обратно, если существует ретрагирующее отображение $r: X \supset A$, то для любого отображения $g: A \rightarrow Y$ композиция $g \circ r: X \rightarrow Y$ будет распространением отображения g .

Понятие распространения отображений тесно связано с понятием гомотопии отображений, ибо для любой гомотопии $f_t: X \rightarrow Y$, связывающей отображение $f: X \rightarrow Y$ с отображением $g: X \rightarrow Y$, соответствующее отображение $F: X \times I \rightarrow Y$ представляет собой распространение на пространство $X \times I$

отображения $(X \times 0) \cup (X \times 1) \rightarrow Y$, переводящего каждую точку $(x, 0)$, $x \in X$, в точку $f(x)$, а каждую точку $(x, 1)$, $x \in X$, в точку $g(x)$.

Говорят, что пара (X, A) удовлетворяет *аксиоме о распространении гомотопии*, если для любого пространства Y , любого отображения $f: X \rightarrow Y$ и любой гомотопии $g_t: A \rightarrow Y$ отображения $g = f|_A$ существует такая гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, что $f_0 = f$ и $f_t|_A = g_t$ для любого $t \in I$. Значение этой аксиомы состоит в первую очередь в том, что для подчиняющихся ей пар (X, A) свойство отображения $g: A \rightarrow Y$ допускать распространение $f: X \rightarrow Y$ зависит только от гомотопического класса отображения g , т. е. вместе с отображением g и каждое гомотопное ему отображение $g': A \rightarrow Y$ может быть распространено на все пространство X .

Примеры пар, удовлетворяющих аксиоме о распространении гомотопии, мы приведем ниже.

Ясно, что

если пара (X, A) удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, то подпространство $(X \times 0) \cup (A \times 1)$ произведения $X \times I$ является его ретрактом.

Действительно, гомотопия f_t , построенная для тождественного отображения $1_X: X \rightarrow X$ и стационарной гомотопии $(1_i)_t: A \rightarrow X$ отображения вложения $i: A \subset X$ определяет, очевидно, ретрагирующее отображение $X \times I \rightarrow (X \times 0) \cup (A \times 1)$.

Если подпространство A замкнуто в пространстве X , то верно и обратное, т. е.

если подпространство $(X \times 0) \cup (A \times 1)$ произведения $X \times I$ является его ретрактом, причем подпространство A замкнуто в пространстве X , то пара (X, A) удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии.

Действительно, задача построения гомотопии f_t равносильна задаче распространения на все пространство $X \times I$ отображения

$$G: (X \times 0) \cup (A \times 1) \rightarrow Y,$$

определенного формулой

$$G(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{если } t = 0, \\ g_t(x), & \text{если } x \in A \end{cases}$$

(при замкнутом A пространство $(X \times 0) \cup (A \times I)$ является, очевидно, свободным объединением пространств $X \times 0$ и $A \times I$ и потому это отображение непрерывно). Поэтому, если пространство $(X \times 0) \cup (A \times I)$ является ретрактом пространства $X \times I$, то гомотопия f_t существует.

В связи с последним утверждением полезно иметь в виду, что

если пространство X хаусдорфово и подпространство $(X \times 0) \cup (A \times I)$ произведения $X \times I$ является его ретрактом, то подпространство A замкнуто в пространстве X .

Действительно, тогда подпространство $(X \times 0) \cup (A \times I)$ замкнуто в произведении $X \times I$ и потому множество

$$A \times 1 = [(X \times 0) \cup (A \times I)] \cap (X \times 1)$$

замкнуто в пространстве $X \times 1$.

Таким образом,

если пространство X хаусдорфово или если подпространство A замкнуто, то пара (X, A) тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, когда подпространство $(X \times 0) \cup (A \times I)$ является ретрактом произведения $X \times I$.

З а м е ч а н и е. Свойство пары (X, A) удовлетворять аксиоме о распространении гомотопии носит в основном локальный характер, т. е., по существу, определяется строением пространства X в некоторой окрестности подпространства A . Точный смысл этому утверждению можно придать многими различными способами. Например, без особого труда доказывается, что

пара (X, A) (с замкнутым A) тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, когда подпространство A функционально замкнуто и существуют такая гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$ и такая функция $\varphi: X \rightarrow I$, равная нулю на подпространстве A , что

$$f_0(x) = x, \quad x \in X,$$

$$f_t(a) = a, \quad (a, t) \in A \times I,$$

и

$$f_1(x) \in A, \quad \text{если } \varphi(x) < 1.$$

Можно также показать, что

пара (X, A) (с замкнутым A) тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, когда на пространстве X существуют непрерывная неотрицательная функция φ , равная нулю на подпространстве A , и отображение F в пространство X подпространства произведения $X \times I$, состоящего из всех точек (x, t) , для которых

$$0 \leq t \leq \varphi(x),$$

обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= x && \text{для любой точки } x \in X, \\ F(x, \varphi(x)) &\in A, && \text{если } \varphi(x) \leq 1. \end{aligned}$$

Эти утверждения нам не понадобятся и потому мы доказывать здесь их не будем.

Гомотопию

$$f_t: X \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

мы будем называть *гомотопией относительно подпространства* $A \subset X$, если на A эта гомотопия стационарна, т. е. если

$$f_t(a) = f_0(a)$$

для любой точки $a \in A$ и любого $t \in I$. Соответственно этому два отображения

$$f, g: X \rightarrow Y$$

мы будем называть *гомотопными относительно* A (обозначение $f \sim g \text{ rel } A$), если они связаны некоторой гомотопией относительно A . Конечно, для этого необходимо, чтобы

$$f|_A = g|_A,$$

т. е. чтобы отображения f и g совпадали на A . Ясно, что гомотопность относительно A также является отношением эквивалентности, и поэтому совокупность всех непрерывных отображений $X \rightarrow Y$, совпадающих на A , распадается на непересекающиеся *гомотопические классы относительно* A . Класс, содержащий данное отображение $f: X \rightarrow Y$, мы будем

обозначать символом $[f] \text{ rel } A$, а множество всех таких классов — символом $[X, Y] \text{ rel } A$.

Свойства относительных гомотопических классов аналогичны свойствам рассмотренных выше «абсолютных» классов. Например, любое непрерывное отображение $f: Y \rightarrow Z$ определяет по формуле

$$f_*([\varphi] \text{ rel } A) = [f \cdot \varphi] \text{ rel } A,$$

$$\varphi: X \rightarrow Y,$$

некоторое отображение

$$f_*: [X, Y] \text{ rel } A \rightarrow [X, Z] \text{ rel } A.$$

Если пространство Y хаусдорфово, то любая гомотопия $f_t: X \rightarrow Y$, стационарная на A , будет, очевидно, стационарна и на замыкании $\bar{A}$ подпространства A . Следова-

тельно, в этом случае мы, без ограничения общности, можем считать подпространство A замкнутым.

Задача построения гомотопии относительно замкнутого подпространства A равносильна задаче распространения на все пространство $X \times I$ отображения

$$F: (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1) \rightarrow Y,$$

определенного формулой

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{если } t=0 \text{ или } x \in A, \\ g(x), & \text{если } t=1. \end{cases}$$

В дальнейшем для упрощения формул мы будем для любой пары (X, A) обозначать подпространство $(X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)$ пространства $X \times I$ (см. рис. 1) символом $I(X, A)$. При замкнутом A оно замкнуто.

Заметим, что если $f|_A = g|_A$ и $f \sim g$, то, вообще говоря, нельзя утверждать, что $f \sim g \text{ rel } A$. Однако,

если пара $(X \times I, I(X, A))$ удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии и если

$$H|_{A \times I} \sim F \text{ rel } (A \times 0 \cup A \times 1),$$

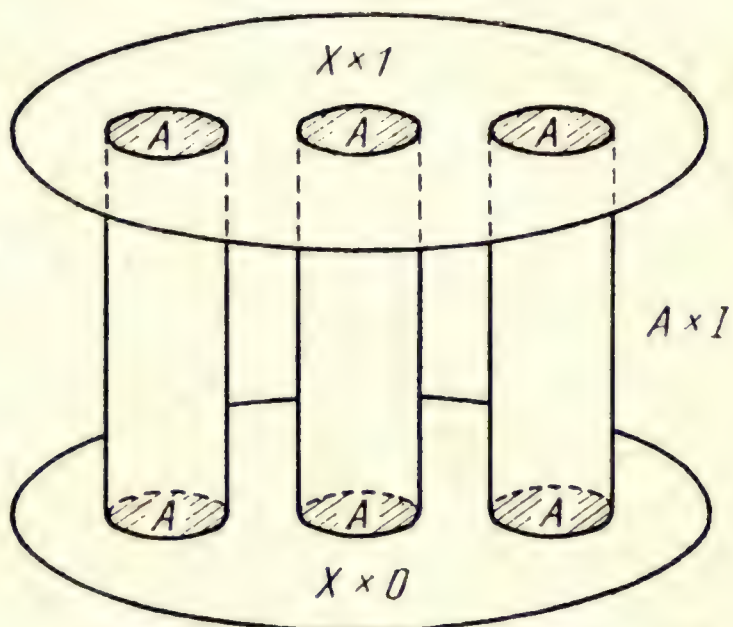


Рис. 1.

где H — отображение $X \times I \rightarrow Y$, соответствующее гомотопии $h_t: X \times I \rightarrow Y$, связывающей отображения f и g , а F — отображение $A \times I \rightarrow Y$, соответствующее стационарной гомотопии $(1_f)_t: A \rightarrow Y$, то

$$f \sim g \text{ rel } A.$$

Действительно, гомотопию относительно $A \times 0 \cup A \times 1$, связывающую отображения $H|_{A \times I}$ и F , мы можем распространить до некоторой гомотопии

$$H_t: I(X, A) \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

считая, что

$$H_t(x, 0) = f(x), \quad H_t(x, 1) = g(x)$$

для всех $t \in I$. Ясно, что

$$H_0|_{A \times I} = H|_{A \times I}.$$

Поэтому, поскольку пара $(X \times I, I(X, A))$ удовлетворяет, по условию, аксиоме о распространении гомотопии, существует такая гомотопия

$$F_t: X \times I \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

что

$$F_0 = H, \quad F_t|_{I(X, A)} = H_t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Следовательно отображение

$$F_1: X \times I \rightarrow Y.$$

определяет (по формуле $f_t(x) = F_1(x, t)$) такую гомотопию

$$f_t: X \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

относительно A , что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Следовательно, $f \sim g \text{ rel } A$

В дальнейшем большое значение будут иметь непрерывные отображения в данное пространство X единичной n -мерной сферы S^n , $n \geq 0$. В частности, нас будут интересовать условия, при выполнении которых любое такое отображение гомотопно постоянному отображению, т. е. отображению в одну точку. В связи с этим мы в первую очередь заметим, что

отображение $f: S^n \rightarrow X$ тогда и только тогда гомотопно постоянному отображению, когда отображение f может быть распространено до некоторого отображения $E^{n+1} \rightarrow X$.

Действительно, любая гомотопия

$$f_t: S^n \rightarrow X,$$

для которой $f_0 = f$ и $f_1(u) = x_0$ для любой точки $u \in S^n$, где x_0 — некоторая фиксированная точка пространства X определяет по формуле

$$F(vu) = f_{1-v}(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u \in S^n,$$

непрерывное отображение $F: E^{n+1} \rightarrow X$, для которого

$$F|_{S^n} = f.$$

Обратно, любое такое отображение $F: E^{n+1} \rightarrow X$ определяет по формуле

$$f_t(u) = F((1-t)u), \quad u \in S^n, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

гомотопию $f_t: S^n \rightarrow X$, для которой $f_0 = f$ и $f_1(u) = x_0$, где $x_0 = F(0)$.

Таким образом,

для любого пространства X равносильны следующие свойства:

1) любое отображение $f: S^n \rightarrow X$ гомотопно постоянному отображению;

2) любое отображение $f: S^n \rightarrow X$ может быть распространено до некоторого отображения $F: E^{n+1} \rightarrow X$.

Пространства, обладающие этими свойствами, мы будем называть n -асферическими. Свойство 2) при $n = 0$, очевидно, равносильно линейной связности. Таким образом,

пространство X тогда и только тогда 0-асферично, когда оно линейно связно.

Пространства, n -асферичные для всех неотрицательных $n \leq m$, мы будем называть m -связными.

Легко видеть, что

открытый единичный интервал $(0, 1)$ (так же как и замкнутый отрезок $I = [0, 1]$) является m -связным пространством для любого $m \geq 0$.

Это утверждение немедленно вытекает из теоремы Титце (см. п. 3 гл. 1), поскольку шар E^{n+1} является нормальным пространством. Впрочем, легко видеть, что для каждого $n \geq 0$

распространение $F: E^{n+1} \rightarrow (0, 1)$ произвольного отображения $f: S^n \rightarrow (0, 1)$ может быть определено формулой

$$F(vu) = \frac{1 + (2f(u) - 1)v}{2} \quad 0 \leq v \leq 1, u \in S^n.$$

Столь же легко видеть, что топологическое произведение $X \times Y$ двух m -связных пространств X и Y также является m -связным пространством.

Действительно, пусть

$$f: S^n \rightarrow X \times Y$$

— произвольное отображение n -мерной ($n \leq m$) сферы S^n в произведение $X \times Y$. Полагая для любой точки $u \in S^n$,

$$f(u) = (f_1(u), f_2(u)), \quad f_1(u) \in X, f_2(u) \in Y,$$

мы получим два (очевидно, непрерывных) отображения

$$f_1: S^n \rightarrow X, \quad f_2: S^n \rightarrow Y.$$

По условию, эти отображения можно распространить соответственно до отображений

$$F_1: E^{n+1} \rightarrow X, \quad F_2: E^{n+1} \rightarrow Y.$$

Ясно, что формула

$$F(v) = (F_1(v), F_2(v)), \quad v \in E^{n+1},$$

определяет тогда непрерывное отображение

$$F: E^{n+1} \rightarrow X \times Y,$$

являющееся распространением отображения f .

Сопоставляя доказанные утверждения, мы получаем, в частности, что

для любого m -связного пространства X пространство $X \times (0, 1)$ также m -связно.

2. Гомотопические эквивалентности и деформационные ретракты

Пусть X — произвольное пространство. Каждую гомотопию

$$\xi_t: X \rightarrow X, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для которой $\xi_0 = 1_X$, мы будем называть *деформацией* пространства X . Непрерывное отображение

$$h: X \rightarrow X$$

мы будем называть *гомотопически тождественным*, если оно гомотопно тождественному отображению 1_X пространства X , т. е. если существует такая деформация $\xi_t: X \rightarrow X$ пространства X , что $\xi_1 = h$. Непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

мы будем называть *гомотопической эквивалентностью*, если существует такое непрерывное отображение

$$g: Y \rightarrow X,$$

что оба отображения

$$g \circ f: X \rightarrow X, \quad f \circ g: Y \rightarrow Y$$

гомотопически тождественны. В этом случае отображение g также является гомотопической эквивалентностью. Мы будем называть его гомотопической эквивалентностью, *обратной* к эквивалентности f . Поскольку эквивалентность f в свою очередь обратна к эквивалентности g , мы будем иногда называть эквивалентности f и g *взаимно обратными*. Ясно, что любое отображение, гомотопное гомотопической эквивалентности, также представляет собой гомотопическую эквивалентность. Пространства X и Y мы будем называть *гомотопически эквивалентными*, если существует хотя бы одна гомотопическая эквивалентность $f: X \rightarrow Y$.

Очевидно, что композиция

$$f_2 \circ f_1: X \rightarrow Z$$

двух гомотопических эквивалентностей $f_1: X \rightarrow Y$ и $f_2: Y \rightarrow Z$ также является гомотопической эквивалентностью. Поэтому отношение гомотопической эквивалентности пространств транзитивно. Поскольку оно, очевидно, рефлексивно и симметрично, совокупность всех топологических пространств распадается на *гомотопические типы* попарно гомотопически эквивалентных пространств.

Непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

мы будем называть *гомотопически инъективным* (соответственно *гомотопически надъективным*), если существует такое непрерывное отображение

$$g: Y \rightarrow X,$$

что композиция $g \circ f: X \rightarrow X$ (соответственно композиция $f \circ g: Y \rightarrow Y$) гомотопически тождественна. Ясно, что любая гомотопическая эквивалентность представляет собой отображение одновременно гомотопически инъективное и гомотопически надъективное. Оказывается, что обратное также верно, т. е.

отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью, когда оно гомотопически инъективно и гомотопически надъективно.

Действительно, пусть отображение f гомотопически инъективно и одновременно гомотопически надъективно, т. е. пусть существуют такие отображения

$$g_1: Y \rightarrow X, \quad g_2: Y \rightarrow X,$$

что

$$g_1 \circ f \sim 1_X, \quad f \circ g_2 \sim 1_Y.$$

Тогда

$$f \circ g_1 \sim (f \circ g_1) \circ (f \circ g_2) = f \circ (g_1 \circ f) \circ g_2 \sim f \circ g_2 \sim 1_Y$$

и аналогично

$$g_2 \circ f \sim 1_X.$$

Следовательно, отображение f является гомотопической эквивалентностью и каждое из отображений g_1 и g_2 является гомотопической эквивалентностью, обратной к эквивалентности f .

Заметим, что изложенное рассуждение имеет общий, «чисто категорный», характер. Аналогичные общие соображения показывают, что если для отображения $f: X \rightarrow Y$ существуют такое пространство Z и такое отображение $h: Z \rightarrow X$, что композиция $f \circ h$ является гомотопической эквивалентностью, то отображение f гомотопически надъективно. Аналогично, если существуют такое пространство Z_1 и такое отображение $h_1: Y \rightarrow Z_1$, что композиция $h_1 \circ f$ является гомотопической эквивалентностью, то отображение f гомотопически инъективно. Таким образом,

если для отображения $f: X \rightarrow Y$ существуют такие отображения $h: Z \rightarrow X$ и $h_1: Y \rightarrow Z_1$, что композиции $f \circ h$ и $h_1 \circ f$ являются гомотопическими эквивалентностями, то отображение f также является гомотопической эквивалентностью.

Пусть пространства X и Y гомотопически эквивалентны пространствам X' и Y' соответственно. Непрерывные отображения

$$f: X \rightarrow Y, \quad f': X' \rightarrow Y'$$

мы будем называть *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие гомотопические эквивалентности

$$\varphi: X \rightarrow X', \quad \psi: Y \rightarrow Y',$$

что

$$\psi \circ f \sim f' \circ \varphi,$$

т. е. если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

гомотопически коммутативна. Обозначая через

$$\varphi': X' \rightarrow X, \quad \psi': Y' \rightarrow Y$$

гомотопические эквивалентности, обратные соответственно к эквивалентностям φ и ψ , мы немедленно получим, что это условие равносильно как условию

$$f \sim \psi' \circ f' \circ \varphi,$$

так и условию

$$\psi \circ f \circ \varphi' \sim f'.$$

Ясно, что отображение, гомотопически эквивалентное гомотопически инъективному (надъективному) отображению, также гомотопически инъективно (надъективно).

Тривиальным примером гомотопической эквивалентности является произвольное гомеоморфное отображение $f: X \rightarrow Y$. Это показывает, что все введенные выше понятия топологически инвариантны.

Менее тривиальные примеры гомотопических эквивалентностей возникают при рассмотрении ретрагирующих отображений

$$r: X \supset A.$$

Подпространство A называется *деформационным ретрактом* пространства X , если существует ретрагирующее отображение $r: X \supset A$, являющееся гомотопической эквивалентностью. Так как, по определению, $r \circ i = 1_A$, то ретрагирующее отображение r необходимо гомотопически инъективно. Поэтому оно тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью, когда оно гомотопически инъективно, т. е. когда существует такое отображение $k: A \rightarrow X$, что $k \circ r \sim 1_X$. Как мы видели, в этом случае оба отображения i и k необходимо являются гомотопическими эквивалентностями, обратными гомотопической эквивалентности r . В частности, будет выполнено условие $i \circ r \sim 1_X$. Таким образом,

для того чтобы ретрагирующее отображение r было гомотопической эквивалентностью, необходимо и достаточно, чтобы составное отображение

$$i \circ r: X \rightarrow X$$

было гомотопически тождественно.

Кроме того,

для любого деформационного ретракта A отображение вложения $i: A \subset X$ является гомотопической эквивалентностью.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Важный пример деформационного ретракта мы получим, рассмотрев (см. п. 6 гл. 1) цилиндр Z_f произвольного непрерывного отображения

$$f: X \rightarrow Y.$$

Именно, как мы сейчас покажем,

подпространство Y пространства Z_f является его деформационным ретрактом.

С этой целью мы для любого $\tau \in I$ определим отображение

$$p_\tau: Z_f \rightarrow Z_f, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

пространства Z_f в себя, положив

$$p_\tau(x, t) = (x, t + \tau - \tau t), \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1,$$

$$p_\tau(y) = y, \quad y \in Y.$$

(В первой из этих формул, как и в аналогичных случаях в дальнейшем, под символом $(x, 1)$ понимается точка $f(x) \in Y$.) Построенные таким образом отображения p_τ составляют, очевидно, гомотопию (т. е. соответствующее им отображение $Z_f \times I \rightarrow Z_f$ однозначно и непрерывно). Кроме того, $p_0 = 1_{Z_f}$, т. е. эта гомотопия является деформацией пространства Z_f . Наконец, для отображения

$$p_1: Z_f \rightarrow Z_f$$

имеет место формула

$$p_1 = j \circ p,$$

где

$$j: Y \subset Z_f,$$

— отображение вложения, а

$$p: Z_f \supset Y$$

— ретрагирующее отображение пространства Z_f на его подпространство Y , определенное формулами

$$p(x, t) = f(x), \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1,$$

$$p(y) = y, \quad y \in Y.$$

Поскольку $p \circ j = 1_Y$, сформулированное выше утверждение тем самым полностью доказано.

Другое замечательное свойство пространства Z_f состоит в том, что

отображение

$$j \circ f: X \rightarrow Z_f$$

гомотопнo отображению

$$i: X \rightarrow Z_f,$$

определенному формулой

$$i(x) = (x, 0), \quad x \in X.$$

Действительно, формула

$$i_t(x) = (x, t), \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1,$$

определяет, как легко видеть, гомотопию

$$i_t: X \rightarrow Z_f,$$

связывающую отображение i с отображением $j \circ f$.

Поскольку отображение вложения j является, согласно доказанному, гомотопической эквивалентностью, это предложение означает, что отображения i и f гомотопически эквивалентны. С другой стороны, отождествив каждую точку $x \in X$ с соответствующей точкой $i(x) = (x, 0) \in Z_f$, мы можем считать, что

$$i: X \subset Z_f.$$

Тем самым доказано, что

для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ существует такое пространство Z_f , гомотопически эквивалентное пространству Y и содержащее пространство X , что отображение $f: X \rightarrow Y$ гомотопически эквивалентно отображению вложения $i: X \subset Z_f$.

Поскольку отображение, гомотопически эквивалентное гомотопической эквивалентности, само является гомотопической эквивалентностью, из этого утверждения следует, что *если подпространство X пространства Z_f является его деформационным ретрактом, то отображение f является гомотопической эквивалентностью.*

Оказывается, что обратное утверждение также справедливо, т. е.

для любой гомотопической эквивалентности $f: X \rightarrow Y$ пространство X является деформационным ретрактом пространства Z_f .

Действительно, пусть

$$g: Y \rightarrow X$$

— гомотопическая эквивалентность, обратная к гомотопической эквивалентности f , и пусть

$$\xi_t: X \rightarrow X, \quad \eta_t: Y \rightarrow Y$$

— такие деформации пространств X и Y соответственно, что

$$\xi_1 = g \circ f, \quad \eta_1 = f \circ g.$$

Для любой точки $z \in Z_f$ и любого $\tau \in I$ мы положим

$$q_\tau(z) = \begin{cases} (x, t + 4\tau(1-t)) & \text{при } 0 \leq \tau \leq 1/4, \\ \eta_{4\tau-1}(f(x)) & \text{при } 1/4 \leq \tau \leq 1/2, \\ (g(f(x)), 3-4\tau) & \text{при } 1/2 \leq \tau \leq 3/4, \\ \xi_1 + (1-t)(3-4\tau)(x) & \text{при } 3/4 \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

если $z = (x, t)$, $x \in X$, $0 \leq t < 1$, и

$$q_\tau(z) = \begin{cases} y & \text{при } 0 \leq \tau \leq 1/4, \\ \eta_{4\tau-1}(y) & \text{при } 1/4 \leq \tau \leq 1/2, \\ (g(y), 3-4\tau) & \text{при } 1/2 \leq \tau \leq 3/4, \\ g(y) & \text{при } 3/4 \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

если $z = y \in Y$.

Без труда проверяется, что определенное таким образом семейство

$$q_\tau: Z_f \rightarrow Z_f, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

представляет собой гомотопию (напомним, что согласно результатам п. 6 гл. 1, отображение $\alpha \times 1_I: [(X \times I) \cup Y] \times I \rightarrow Z_f \times I$, где $\alpha: (X \times I) \cup Y \rightarrow Z_f$ — естественная проекция, является отображением отождествления). Так как, кроме того,

$$q_0 = 1_{Z_f},$$

то гомотопия q_τ является деформацией пространства Z_f .

С другой стороны, отображение

$$q_1: Z_f \rightarrow Z_f$$

имеет, очевидно, вид

$$q_1 = i \circ q,$$

где q — отображение $Z_f \rightarrow X$, определенное формулами

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \xi_t(x), & x \in X, \quad 0 \leq t < 1, \\ q(y) &= g(y), & y \in Y. \end{aligned}$$

Поскольку $q \circ i = 1_X$, сформулированное выше утверждение тем самым полностью доказано.

3. Гомотопический тип склеенных пространств

Пусть X и Y — топологические пространства, A — замкнутое подпространство пространства X и $f: A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение подпространства A в пространство Y . Тогда (см. п. 6 гл. 1) определено пространство $X \cup_f Y$, получающееся приклеиванием пространства X по подпространству A к пространству Y посредством отображения f . В этом пункте мы покажем, что для достаточно «хорошей» пары (X, A) гомотопический тип пространства $X \cup_f Y$ зависит только от гомотопического класса отображения f и гомотопического типа пространства Y . Иначе говоря, для любого отображения $g: A \rightarrow Y$, гомотопного отображению f , пространство $X \cup_g Y$ гомотопически эквивалентно пространству $X \cup_f Y$, и для любого пространства Z , гомотопически эквивалентного пространству Y , пространство $X \cup_{h \circ f} Z$, где h — произвольная гомотопическая эквивалентность $Y \rightarrow Z$, гомотопически эквивалентно пространству $X \cup_f Y$.

В первую очередь мы покажем, что если пара (X, A) обладает тем свойством, что как она сама, так и пара $(X \times I, I(X, A))$ удовлетворяют аксиоме о распространении гомотопии, то для любых двух гомотопных отображений

$$f, g: A \rightarrow Y$$

пространства $X \cup_f Y$ и $X \cup_g Y$ гомотопически эквивалентны, причем гомотопическую эквивалентность $X \cup_f Y \rightarrow X \cup_g Y$ можно выбрать таким образом, чтобы на пространстве Y она являлась тождественным отображением.

Пусть

$$f_t: A \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

— произвольная гомотопия, связывающая отображение f с отображением g . Сначала мы распространим эту гомотопию до некоторой гомотопии пространства $X \cup Y$ в пространство $X \cup_f Y$. Так как естественная проекция

$$\alpha: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y$$

на подпространстве $A \subset X$ совпадает с отображением $f: A \rightarrow Y$ и так как пара (X, A) удовлетворяет, по условию, аксиоме

о распространении гомотопии, то существует такая гомотопия

$$\alpha_t^*: X \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

что

$$\alpha_0^* = \alpha|_X, \quad \alpha_t^*|_A = f_t.$$

Положив

$$\alpha_t = \begin{cases} \alpha_t^* & \text{на } X, \\ 1_Y & \text{на } Y, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

мы, очевидно, и получим гомотопию

$$\alpha_t: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для которой

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_t|_A = f_t.$$

Так как гомотопия α_t обладает тем свойством, что

$$\alpha_1|_A = g,$$

то отображение

$$\eta = \alpha_1 \circ \beta^{-1}: X \cup_g Y \rightarrow X \cup_f Y,$$

где

$$\beta: X \cup Y \rightarrow X \cup_g Y$$

— естественная проекция, является однозначным отображением. При этом, поскольку отображение

$$\alpha_1 = \eta \circ \beta$$

непрерывно, а отображение β является отображением отождествления, отображение η непрерывно (см. п. 5 гл. 1). На пространстве Y это отображение тождественно:

$$\eta|_Y = 1_Y.$$

Построим теперь «обратное» отображение $X \cup_g Y \rightarrow X \cup_f Y$. По тем же соображениям, что и выше, существует такая гомотопия

$$\beta_t: X \cup Y \rightarrow X \cup_g Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

что

$$\beta_0 = \beta, \quad \beta_t|_A = f_{1-t},$$

и

$$\beta_t|_Y = 1_Y.$$

Так как $\beta_1|_A = f$, то, положив

$$\xi = \beta_1 \circ \alpha^{-1},$$

мы получим однозначное непрерывное отображение

$$\xi: X \cup_f Y \rightarrow X \cup_g Y,$$

для которого, как и для η ,

$$\xi|_Y = 1_Y.$$

Сформулированное выше утверждение будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что отображения ξ и η являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. Имея это в виду, мы для любого числа $t \in I$ положим

$$\gamma_t = \begin{cases} \alpha_{2t}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \eta \circ \beta_{2t-1}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Так как $\alpha_1 = \eta \circ \beta_0$, то тем самым мы получим некоторую гомотопию

$$\gamma_t: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для которой

$$\gamma_0 = \alpha, \quad \gamma_1 = \eta \circ \xi \circ \alpha.$$

Гомотопия γ_t не является, вообще говоря, гомотопией относительно A , ибо

$$\gamma_t|_A = \begin{cases} f_{2t}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f_{2(1-t)}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тем не менее, соответствующее гомотопии $\gamma_t|_A$ отображение $A \times I \rightarrow X \cup_f Y$, как легко видеть, гомотопно относительно $A \times 0 \cup A \times 1$ отображению $A \times I \rightarrow X \cup_f Y$, переводящему каждую точку $(a, t) \in A \times I$ в точку $\alpha(a) \in X \cup_f Y$, т. е. определяющему стационарную гомотопию отображения $\alpha|_A$. Соответствующую гомотопию

$$H_\tau: A \times I \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

можно, например, определить формулой

$$H_\tau(a, t) = \begin{cases} f_{2t(1-\tau)}(a), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f_{2(1-t)(1-\tau)}(a), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где (a, t) — произвольная точка пространства $A \times I$. Поэтому, согласно доказанному на стр. 86 утверждению (условия применимости которого выполнены), отображения α и $\eta \circ \xi \circ \alpha$ гомотопны и относительно A . Соответствующая гомотопия

$$\gamma_t^*: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

относительно A обладает тем свойством, что

$$\gamma_t^*|_A = f$$

для любого $t \in I$. Поэтому формула

$$h_t = \gamma_t^* \circ \alpha^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

однозначно определяет некоторую гомотопию

$$h_t: X \cup_f Y \rightarrow X \cup_f Y$$

(напомним, что в силу результатов п. 5 гл. 1 отображение

$$\alpha \times 1_I: (X \cup Y) \times I \rightarrow (X \cup_f Y) \times I$$

является отображением отождествления), которая, очевидно, и обладает тем свойством, что

$$h_0 = 1_{X \cup_f Y}, \quad h_1 = \eta \circ \xi.$$

Следовательно, отображение

$$\eta \circ \xi: X \cup_f Y \rightarrow X \cup_f Y$$

гомотопически тождественно.

Так как отображения f и g совершенно равноправны, то, по соображениям симметрии, отображение

$$\xi \circ \eta: X \cup_g Y \rightarrow X \cup_g Y$$

также гомотопически тождественно.

Тем самым сформулированное выше предложение полностью доказано.

Докажем теперь, что гомотопический тип пространства $X \cup_f Y$ не изменяется и при замене пространства Y пространством, ему гомотопически эквивалентным. Точнее, мы докажем, что

в тех же предположениях на пару (X, A) , что и выше, любую гомотопическую эквивалентность $h: Y \rightarrow Z$ можно

распространить до некоторой гомотопической эквивалентности

$$H: X \cup_f Y \rightarrow X \cup_{h \circ f} Z.$$

Пусть

$$g: Z \rightarrow Y$$

— гомотопическая эквивалентность, обратная к эквивалентности h , и пусть

$$H = \beta^{-1} \bar{h} \circ \alpha : X \cup_f Y \rightarrow X \cup_{h \circ f} Z,$$

$$G = \alpha' \circ \bar{g} \circ \beta^{-1} : X \cup_{h \circ f} Z \rightarrow X \cup_{g \circ h \circ f} Y,$$

где, соответственно,

$$\bar{h} = 1_X \cup h : X \cup Y \rightarrow X \cup Z,$$

$$\bar{g} = 1_X \cup g : X \cup Z \rightarrow X \cup Y,$$

а

$$\alpha : X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y,$$

$$\alpha' : X \cup Y \rightarrow X_{g \circ h \circ f} Y$$

и

$$\beta : X \cup Z \rightarrow X \cup_{h \circ f} Z$$

— естественные проекции. Так как

$$\beta \circ \bar{h}|_A = \beta|_A = h \circ f, \quad \alpha' \circ \bar{g}|_A = \alpha'|_A = g \circ h \circ f,$$

то отображения H и G однозначны и непрерывны.

Поскольку отображение

$$g \circ h : Y \rightarrow Y$$

гомотопически тождественно (т. е. имеет вид σ_t , где

$$\sigma_t : Y \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

— некоторая деформация пространства Y), отображение $f \circ h \circ f : A \rightarrow Y$ гомотопно отображению $f : A \rightarrow Y$, и потому, согласно предыдущему предложению, пространства $X \cup_f Y$ и $X \cup_{g \circ h \circ f} Y$ гомотопически эквивалентны. Более того, из изложенной при доказательстве последнего предложения конструкции следует, что гомотопическую эквивалентность

$$\eta : X \cup_{g \circ h \circ f} Y \rightarrow X \cup_f Y,$$

связывающую пространства $X \cup_{g \circ h \circ f} Y$ и $X \cup_f Y$, можно определить формулой

$$\eta = \alpha_1 \circ (\alpha')^{-1},$$

где α_1 — конечное отображение некоторой гомотопии

$$\alpha_t: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для которой

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_t|_A = \sigma_t \circ f,$$

и

$$\alpha_t|_Y = 1_Y.$$

Следовательно, формула

$$k_t = \begin{cases} \alpha \circ \bar{\sigma}_{2t}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \alpha_{2t-1} \circ \bar{g} \circ h, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\bar{\sigma}_t = 1_X \cup \sigma_t: X \cup Y \rightarrow X \cup Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

определяет некоторую гомотопию

$$k_t: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

связывающую отображение

$$k_0 = \alpha \circ \bar{\sigma}_0 = \alpha$$

с отображением

$$k_1 = \alpha_1 \circ \bar{g} \circ \bar{h} = \eta \circ G \circ H \circ \alpha.$$

При этом

$$k_t|_A = \begin{cases} \alpha, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \alpha_{2t-1}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

т. е.

$$k_t|_A = \begin{cases} f, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \sigma_{2t-1} \circ f, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому, полагая

$$k_t^* = k_t \circ \alpha^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

мы получим деформацию

$$k_t^*: X \cup_f Y \rightarrow X \cup_f Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

пространства $X \cup_f Y$, связывающую тождественное отображение этого пространства с отображением $\eta \circ G \circ H$.

Таким образом, последнее отображение гомотопически тождественно и потому отображение H гомотопически инъективно, а отображение $\eta \circ G$, а значит, и отображение G , гомотопически надъективно.

Аналогично (принимая отображения $h \circ f$ и g за отображения f и h соответственно), мы получим, что отображение G гомотопически инъективно. Следовательно, отображение G , а потому и отображение $\eta \circ G$, является гомотопической эквивалентностью. Но тогда отображение H также будет гомотопической эквивалентностью. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$H|_Y = h.$$

4. Гомотопические группы и слабые гомотопические эквивалентности

Пусть $n \geq 0$ и пусть u_0 — точка $(1, 0, \dots, 0)$ единичной n -мерной сферы S^n . Пусть, далее, x_0 — произвольная точка топологического пространства X . Предметом нашего изучения в этом пункте будут непрерывные отображения

$$\varphi : (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_0)$$

пары (S^n, u_0) в пару (X, x_0) . Множество $[(S^n, u_0), (X, x_0)]$ всех гомотопических классов таких отображений относительно u_0 мы будем обозначать символом

$$\pi_n(X; x_0).$$

Класс постоянного отображения $S^n \rightarrow x_0$ мы будем при этом обозначать символом 0_{x_0} (или просто 0) и будем называть его *нулем* множества $\pi_n(X; x_0)$.

Ясно, что множество $\pi_0(X; x_0)$ естественным образом отождествляется с множеством $\pi_0(X)$ компонент линейной связности пространства X . При этом отождествлении нулю 0_{x_0} множества $\pi_0(X; x_0)$ соответствует компонента пространства X , содержащая точку x_0 .

Отображение одного множества вида $\pi_n(X; x_0)$ в другое такое множество мы будем называть *гомоморфизмом*, если оно переводит нуль в нуль. Инъективный гомоморфизм мы будем называть *мономорфизмом*, надъективный — *эпиморфизмом*, а биективный — *изоморфизмом*.

З а м е ч а н и е. При $n > 0$ в множество $\pi_n(X; x_0)$ можно ввести алгебраическую операцию, относительно которой это множество оказывается группой (при $n > 1$ даже абелевой) с нулевым элементом 0_{x_0} . Эта группа называется *n-й гомотопической группой пространства X в точке x_0* . В дальнейшем мы также будем придерживаться этой терминологии (даже при $n = 0$), хотя упомянутая операция нам не нужна, и ни определять, ни рассматривать ее мы не будем. Все рассматриваемые ниже гомоморфизмы гомотопических групп будут на самом деле гомоморфизмами в обычном теоретико-групповом смысле. Этот факт мы также будем игнорировать.

Согласно сказанному в п. 1 любое непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

определяет по формуле

$$f_*([\varphi] \text{ rel } u_0) = [f \cdot \varphi] \text{ rel } u_0,$$

где φ — произвольное отображение $(S^n, u_0) \rightarrow (X; x_0)$, некоторое отображение

$$f_*: \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(Y; y_0), \quad y_0 = f(x_0).$$

Это отображение переводит нуль 0_{x_0} в нуль 0_{y_0} , т. е. является гомоморфизмом (в указанном выше смысле). В тех случаях, когда необходимо явно указать точку x_0 , мы будем этот гомоморфизм обозначать символом f_{*, x_0} .

Ясно, что если $f = 1_X$, то $f_* = 1_{\pi_n(X; x_0)}$, и что для любых отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ имеет место равенство

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

На языке теории категорий это означает, что пара $(\pi_n(X; x_0), f_*)$ представляет собой ковариантный функтор.

Мы не будем излагать здесь все многочисленные свойства гомотопических групп, — это увело бы нас слишком далеко от основной темы. Мы ограничимся лишь теми свойствами этих групп, которые будут нужны в дальнейшем. При этом мы для любого $n \geq 0$ будем представлять сферу S^n в виде объединения двух полусфер — «нижней»

полусферы E_-^n , состоящей из всех точек $u = (u^1, \dots, u^{n+1}) \in S^n$, для которых $u^{n+1} \leq 0$, и «верхней» полусферы E_+^n , состоящей из всех точек $u = (u^1, \dots, u^{n+1}) \in S^n$, для которых $u^{n+1} \geq 0$. Пересечением $E_-^n \cap E_+^n$ этих полусфер является экватор $u^{n+1} = 0$ сферы S^n , который мы будем отождествлять со сферой S^{n-1} . Проекция

$$\omega: S^n \rightarrow E^n,$$

определенная формулой

$$\omega(u^1, \dots, u^{n+1}) = (u^1, \dots, u^n),$$

является, очевидно, на каждой из полусфер E_-^n и E_+^n гомеоморфизмом. Эти гомеоморфизмы мы будем обозначать соответственно символами ω_- и ω_+ .

Во всем дальнейшем мы постоянно будем пользоваться тем, что

пары (S^n, u_0) , (S^n, E_+^n) , $(S^n \times I, I(S^n, u_0))$ и $(S^n \times I, I(S^n, E_+^n))$ удовлетворяют аксиоме о распространении гомотопии.

Этот факт является частным случаем одного общего утверждения, которое мы докажем в п. 4 гл. 3; см. замечание на стр. 167. Поэтому мы его здесь оставим без доказательства. Использовать результаты настоящего пункта мы до п. 6 гл. 3 не будем.

Заметим еще, что любой вектор $v \in E^n$ можно «отнести к точке u_0 », т. е. представить в виде

$$v = u_0 + (u - u_0)r,$$

где $u \in S^{n-1}$ и $0 \leq r \leq 1$. При этом число r определяется вектором v однозначно. Вектор u также определяется однозначно, если только $v \neq u_0$. Кроме того, при $v \neq u_0$ число r отлично от нуля (а при $v = u_0$ равно нулю). Для упрощения формул мы будем в дальнейшем вектор $v = u_0 + (u - u_0)r \in E^n$ обозначать символом $[u, r]$, а векторы $\omega_+^{-1}(v) \in E_+^n$ и $\omega_-^{-1}(v) \in E_-^n$ — соответственно символами $[u, r]_+$ и $[u, r]_-$.

В первую очередь мы выясним, при каких условиях два отображения

$$f, g: E^n \rightarrow X$$

шара E^n в пространство X , совпадающих на его границе S^{n-1} , гомотопны относительно S^{n-1} .

С этой целью мы любым двум таким отображениям f и g отнесем отображение

$$\varphi: S^n \rightarrow X$$

сферы S^n в пространство X , «склеенное» из отображений f и g , рассматриваемых как отображения полусфер E_+^n и E_-^n , т. е. определенное равенствами

$$\varphi|_{E_-^n} = f \circ \omega_-, \quad \varphi|_{E_+^n} = g \circ \omega_+.$$

По условию, $f|_{S^{n-1}} = g|_{S^{n-1}}$ и, значит, отображение φ однозначно определено и непрерывно. Элемент $[\varphi]$ группы $\pi_n(X; x_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0)$ ($= f(u_0) = g(u_0)$), определенный отображением φ , мы будем называть элементом, различающим отображения f и g , и обозначать символом $\delta(f, g)$.

Легко видеть, что любой элемент множества $\pi_n(X; x_0)$ может служить элементом, различающим некоторое отображение от данного. Именно,

для любого отображения

$$g: E^n \rightarrow X$$

и любого элемента $\alpha \in \pi_n(X; x_0)$, где $x_0 = g(u_0)$, существует такое отображение

$$f: E^n \rightarrow X,$$

что

$$f|_{S^{n-1}} = g|_{S^{n-1}}$$

и

$$\delta(f, g) = \alpha.$$

Действительно, пусть

$$\varphi: (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_0)$$

— произвольное отображение класса α . Очевидно, что на полусфере E_+^n отображение φ гомотопно относительно u_0 отображению $g \circ \omega_+$ (соответствующую гомотопию

$$\varphi_t: E_+^n \rightarrow X$$

можно определить, например, формулой

$$\varphi_t([u, r]_+) = \begin{cases} \varphi([u, (1 - 2t)r]_+), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f([u, (2t - 1)r]), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $[u, r]_+$ — произвольная точка полусферы E_+^n ; суть дела здесь состоит в том, что полусферу E_+^n можно по себе стянуть в точку u_0 и потому любое отображение этой полусферы гомотопно постоянному отображению, так что любые два отображения гомотопны). Поскольку пара (S^n, E_+^n) удовлетворяет, как было сказано, аксиоме о распространении гомотопии, отсюда следует, что отображение φ гомотопно относительно u_0 такому отображению

$$\psi: S^n \rightarrow X,$$

что $\psi|_{E_+^n} = g \circ \omega_+$. Но тогда ясно, что отображение

$$f = \psi|_{E_-^n} \circ \omega_-^{-1}: E_-^n \rightarrow X$$

обладает всеми требуемыми свойствами.

Значение различающих элементов $\delta(f, g)$ для задачи о гомотопности относительно S^{n-1} отображений f и g определяется тем, что

если для совпадающих на S^{n-1} отображений

$$f, g: E^n \rightarrow X$$

существует такое отображение

$$h: E^n \rightarrow X, \quad h|_{S^{n-1}} = f|_{S^{n-1}} = g|_{S^{n-1}},$$

что

$$\delta(f, h) = \delta(g, h),$$

то отображения f и g гомотопны относительно S^{n-1} .

Для доказательства этого утверждения рассмотрим отображения

$$\varphi_0, \varphi_1: S^n \rightarrow X,$$

определяемые формулами

$$\varphi_0|_{E_-^n} = f \circ \omega_-, \quad \varphi_1|_{E_-^n} = g \circ \omega_-,$$

$$\varphi_0|_{E_+^n} = \varphi_1|_{E_+^n} = h \circ \omega_+.$$

Как легко видеть, нам достаточно доказать, что

$$\varphi_0 \sim \varphi_1 \text{ rel } E_+^n. \quad (1)$$

Действительно, для любой гомотопии $\varphi_t: \varphi_0 \sim \varphi_1 \text{ rel } E_+^n$ семейство отображений

$$\varphi_t|_{E_-^n \circ \omega_-^{-1}}: E^n \rightarrow X, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

будет гомотопией относительно S^{n-1} , связывающей отображение f с отображением g .

По условию, $\delta(f, h) = \delta(g, h)$, так что отображения φ_0 и φ_1 гомотопны относительно u_0 . Выбрав некоторую гомотопию относительно u_0 , связывающую отображения φ_0 и φ_1 , рассмотрим отображение

$$\Phi: S^n \times I \rightarrow X$$

произведения $S^n \times I$ в пространство X , соответствующее этой гомотопии. Пусть, кроме того,

$$\Psi: E_+^n \times I \rightarrow X$$

— отображение произведения $E_+^n \times I$ в пространство X , определенное формулой

$$\Psi(u, t) = \varphi_0(u) = (h \circ \omega_+)(u), \quad u \in E_+^n, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Согласно предложению, доказанному в п. 1 на стр. 86 оно применимо, ибо пара $(S^n \times I, I(S^n, E_+^n))$ удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии), для доказательства соотношения (1) достаточно показать, что

$$\Phi|_{E_+^n \times I} \sim \Psi \text{ rel } (E_+^n \times 0 \cup E_+^n \times 1).$$

Для любого $\tau \in I$ и любой точки $([u, r]_+, t) \in E_+^n \times I$, где $u \in S^{n-1}$, $r, t \in I$, мы положим (см. рис. 2)

$$\begin{aligned} & \Phi_\tau([u, r]_+, t) = \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \Phi\left([u, \frac{r-4\tau}{1-2\tau}]_+, \frac{t-\tau}{1-2\tau}\right), & \text{если } 0 \leq \tau \leq \frac{r}{4}, \quad \tau \leq t \leq 1-\tau, \\ h\left([u, \frac{r-4t}{1-2t}]\right), & \text{если } t \leq \tau \leq 1-t, \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{4}, \\ h(u_0), & \text{если } \frac{r}{4} \leq \tau \leq \frac{4-r}{4}, \quad \frac{r}{4} \leq t \leq \frac{4-r}{4}, \\ h\left([u, \frac{4t+r-4}{2t-1}]\right), & \text{если } 1-t \leq \tau \leq t, \quad \frac{4-r}{4} \leq t \leq 1, \\ h\left([u, \frac{4\tau+r-4}{2\tau-1}]\right), & \text{если } \frac{4-r}{4} \leq \tau \leq 1, \quad 1-\tau \leq t \leq \tau. \end{array} \right. \\ & = \left\{ \begin{array}{ll} \Phi\left([u, \frac{r-4\tau}{1-2\tau}]_+, \frac{t-\tau}{1-2\tau}\right), & \text{если } 0 \leq \tau \leq \frac{r}{4}, \quad \tau \leq t \leq 1-\tau, \\ h\left([u, \frac{r-4t}{1-2t}]\right), & \text{если } t \leq \tau \leq 1-t, \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{4}, \\ h(u_0), & \text{если } \frac{r}{4} \leq \tau \leq \frac{4-r}{4}, \quad \frac{r}{4} \leq t \leq \frac{4-r}{4}, \\ h\left([u, \frac{4t+r-4}{2t-1}]\right), & \text{если } 1-t \leq \tau \leq t, \quad \frac{4-r}{4} \leq t \leq 1, \\ h\left([u, \frac{4\tau+r-4}{2\tau-1}]\right), & \text{если } \frac{4-r}{4} \leq \tau \leq 1, \quad 1-\tau \leq t \leq \tau. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Без труда проверяется (рис. 2), что тем самым мы получим некоторую гомотопию

$$\Phi_\tau: E_+^n \times I \rightarrow X, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

относительно $E_+^n \times 0 \cup E_+^n \times 1$, для которой

$$\Phi_0 = \Phi|_{E_+^n \times I}, \quad \Phi_1 = \Psi.$$

Сформулированное выше утверждение тем самым полностью доказано.

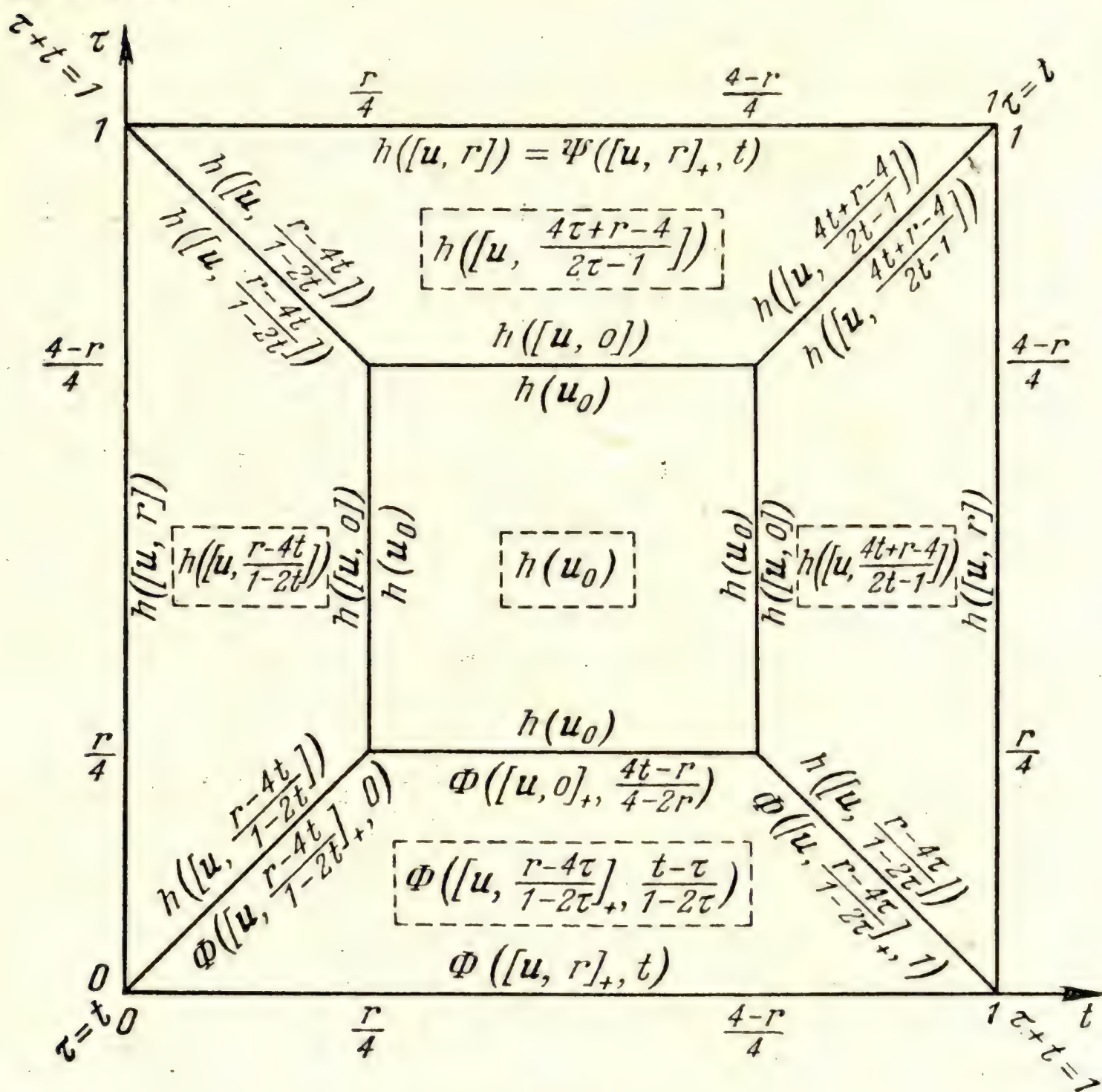


Рис. 2.

Замечание. Для существования гомотопии Φ_τ весьма существенно, что отображение φ_0 гомотопно отображению φ_1 относительно u_0 . Если φ_0 просто гомотопно φ_1 , то гомотопии Φ_τ может и не существовать.

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости группы $\pi_n(X; x_0)$ от точки x_0 .

Пусть x_0 и x_1 — две произвольные точки пространства X , которые можно соединить в X некоторым путем $u: I \rightarrow X$. Так как пара (S^n, u_0) удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, то для любого отображения

$$\varphi: (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_0)$$

существует такая гомотопия

$$\varphi_t: S^n \rightarrow X, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

что $\varphi_0 = \varphi$ и $\varphi_t(u_0) = u(t)$ для каждого $t \in I$. Мы будем называть эту гомотопию *гомотопией отображения φ вдоль пути u* .

Два пути u и v , соединяющих точку x_0 с точкой x_1 , мы будем называть *эквивалентными*, если они гомотопны относительно точек 0 и 1, т. е. если существует такая гомотопия

$$u_\tau: I \rightarrow X, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

состоящая из путей, соединяющих точки x_0 и x_1 , что $u_0 = u$ и $u_1 = v$.

Оказывается, что
если отображения

$$\varphi, \psi: (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_0)$$

гомотопны относительно u_0 , то для любых двух эквивалентных путей u и v , соединяющих точку x_0 с точкой x_1 , и любых двух гомотопий

$$\varphi_t, \psi_t: S^n \rightarrow X$$

отображений φ и ψ вдоль, соответственно, путей u и v конечные отображения

$$\varphi_1, \psi_1: (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_1)$$

гомотопны относительно u_0 .

Действительно, пусть

$$\xi_t: (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

— гомотопия относительно u_0 , связывающая отображение φ отображением ψ . Ясно, что формула

$$\omega_t = \begin{cases} \varphi_{1-3t}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ \xi_{3t-1}, & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ \psi_{3t-2}, & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет некоторую гомотопию

$$\omega_t: S^n \rightarrow X, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

связывающую отображение φ_1 с отображением ψ_1 . Пусть

$$\Omega: S^n \times I \rightarrow X$$

— соответствующее этой гомотопии отображение произведения $S^n \times I$ в пространство X и пусть

$$\Omega_1: u_0 \times I \rightarrow X$$

— постоянное отображение отрезка $u_0 \times I$ в точку $x_1 \in X$. Так как пара $(S^n \times I, I(S^n, u_0))$ удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, то, согласно доказанному в п. 1 предложению, для доказательства соотношения

$$\varphi_1 \sim \psi_1 \text{ rel } u_0$$

достаточно доказать, что

$$\Omega|_{u_0 \times I} \sim \Omega_1 \text{ rel } (u_0 \times 0 \cup u_0 \times 1),$$

т. е. что путь

$$w: I \rightarrow X, \quad w(0) = w(1) = x_1,$$

определенный формулой

$$w(t) = \Omega(u_0, t) = \begin{cases} u(1-3t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ x_0, & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ v(3t-2), & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

эквивалентен вырожденному пути u_{x_1} , представляющему собой постоянное отображение отрезка I в точку x_1 .

С этой целью мы для любых $t, \tau \in I$ положим (см. рис. 3)

$$\omega_\tau(t) = \begin{cases} u\left(\frac{3\tau - 6t + 2}{3\tau + 2}\right), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/3, 0 \leq t \leq \frac{3\tau + 2}{6}, \\ x_0, & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/3, \frac{3\tau + 2}{6} \leq t \leq \frac{4 - 3\tau}{6}, \\ v\left(\frac{3\tau + 6t - 4}{3\tau + 2}\right), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/3, \frac{4 - 3\tau}{6} \leq t \leq 1, \\ u(1 - 2t), & \text{если } 1/3 \leq \tau \leq 2/3, 0 \leq t \leq 1/2, \\ u_{2-3\tau}(2t - 1), & \text{если } 1/3 \leq \tau \leq 2/3, 1/2 \leq t \leq 1, \\ u(1 - 6t(1 - \tau)), & \text{если } 2/3 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq 1/2, \\ u(1 - 6(1 - t)(1 - \tau)), & \text{если } 2/3 \leq \tau \leq 1, \\ & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $u_\tau: I \rightarrow X$, $0 \leq \tau \leq 1$, — гомотопия относительно точек 0 и 1, связывающая путь u с путем v . Без труда проверяется, что мы тем самым получим гомотопию

$$\omega_\tau: I \rightarrow X, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

относительно точек 0 и 1, связывающую путь ω с путем u_{x_1} .

Сформулированное выше утверждение тем самым полностью доказано.

Из этого утверждения непосредственно следует, что для любого пути u , соединяющего точки x_0 и x_1 , формула

$$u^\#(\alpha) = [\varphi_1] \operatorname{rel} u_0,$$

где $\alpha \in \pi_n(X; x_0)$, а φ_1 — конечное отображение произвольной гомотопии φ_t вдоль пути u какого-нибудь отображения

$$\varphi: (S^n, u_0) \rightarrow (X; x_0)$$

класса α , однозначно определяет некоторое отображение

$$u^\#: \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1),$$

переводящее нуль 0_{x_0} в нуль 0_{x_1} , т. е. являющееся гомоморфизмом. При этом, гомоморфизм $u^\#$ зависит только от класса эквивалентности пути u , т. е. для любых двух эквивалентных путей u и v гомоморфизмы $u^\#$ и $v^\#$ совпадают.

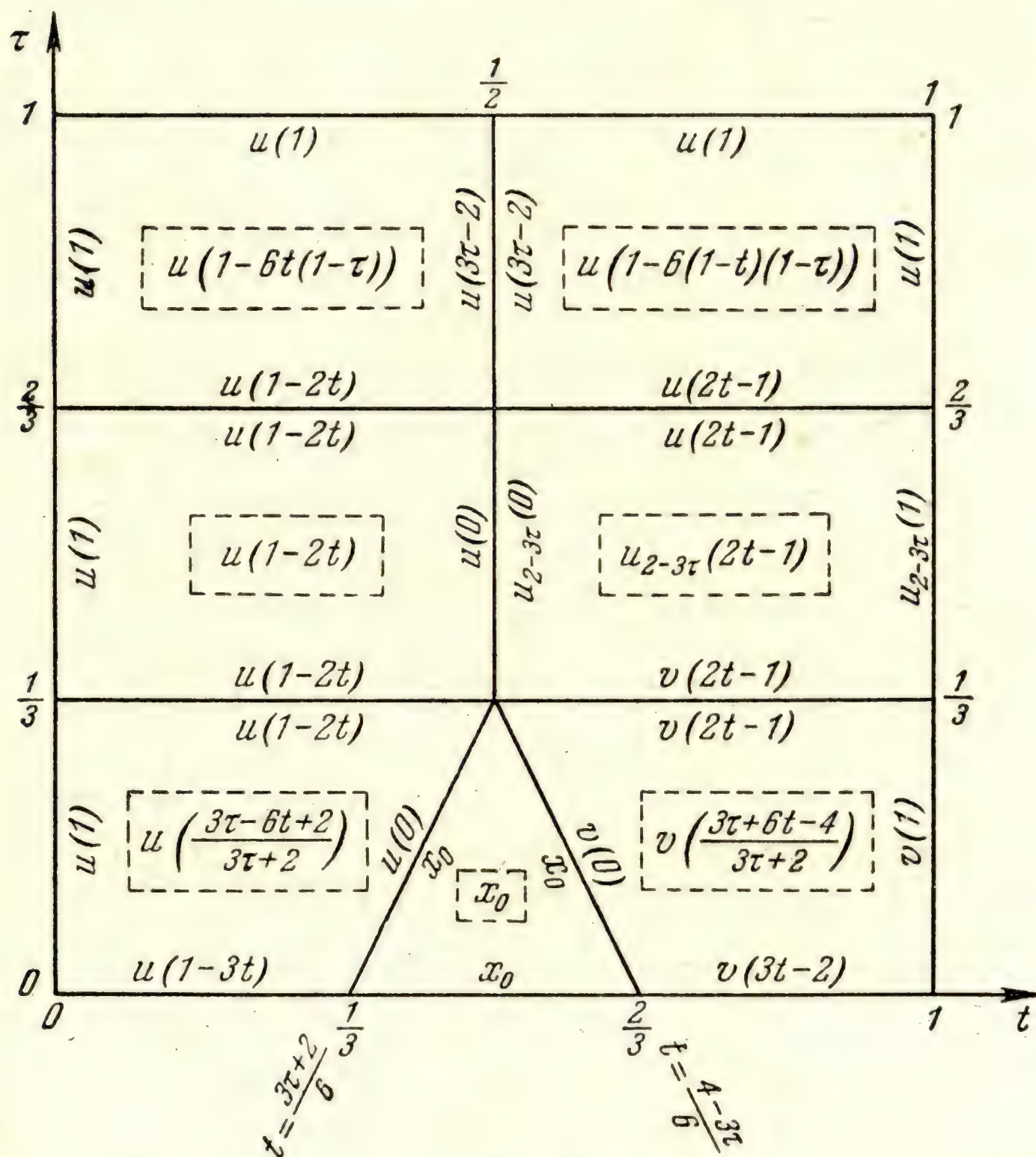


Рис. 3.

Пусть теперь u и v — такие пути пространства X , что

$$u(1) = v(0).$$

Тогда формула

$$w(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ v(2t - 1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет, как легко видеть, некоторый путь

$$\omega: I \rightarrow X,$$

соединяющий точку $x_0 = u(0)$ с точкой $x_2 = v(1)$. Мы будем называть этот путь *произведением* путей u и v и будем обозначать его символом uv . Легко видеть, что

гомоморфизм

$$(uv)^\# \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_2),$$

соответствующий пути uv , является композицией $v^\# \cdot u^\#$ *гомоморфизмов*

$$u^\#: \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1), \quad v^\#: \pi_n(X; x_1) \rightarrow \pi_n(X; x_2),$$

соответствующих путям u и v .

Действительно, для любой гомотопии φ_t вдоль пути u произвольного отображения $\varphi: (S^n, u_0) \rightarrow (X; x_0)$ и любой гомотопии ψ_t вдоль пути v произвольного отображения

$$\psi: (S^n, u_0) \rightarrow (X; x_1)$$

формула

$$\omega_t = \begin{cases} \varphi_{2t}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \psi_{2t-1}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет гомотопию вдоль пути uv , для которой $\omega_0 = \varphi$ и $\omega_1 = \psi_1$.

Каждому пути $u: I \rightarrow X$, соединяющему точку x_0 с точкой x_1 , мы отнесем путь $u': I \rightarrow X$, соединяющий точку x_1 с точкой x_0 , определив его формулой

$$u'(t) = u(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Путь u' мы будем называть *обратным* к пути u .

Легко видеть, что

для любого пути u , соединяющего точки x_0 и x_1 , пути uu' и $u'u$ эквивалентны соответствующим вырожденным путям u_{x_0} и u_{x_1} .

Действительно, гомотопию $v_\tau: I \rightarrow X$, $0 \leq \tau \leq 1$, относительно точек 0 и 1, связывающую, скажем, путь u_{x_0} с путем uu' , можно, например, определить формулой

$$v_\tau(t) = \begin{cases} u(2t\tau), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ u(2(1-t)\tau), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Поскольку гомоморфизмы $(u_{x_0})^\#$ и $(u_{x_1})^\#$, соответствующие вырожденным путям u_{x_0} и u_{x_1} , являются, как легко видеть, тождественными отображениями групп $\pi_n(X; x_0)$ и $\pi_n(X; x_1)$ соответственно, из последних двух утверждений непосредственно вытекает, что

для любого пути $u: I \rightarrow X$, соединяющего точку x_0 с точкой x_1 , гомоморфизмы $u^\#$ и $(u')^\#$ являются взаимно обратными изоморфизмами между группами $\pi_n(X; x_0)$ и $\pi_n(X; x_1)$.

В частности,

для любого пути u , соединяющего точку x_0 с точкой x_1 , гомоморфизм

$$u^\#: \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1)$$

является изоморфизмом.

Таким образом, для любых точек x_0 и x_1 , принадлежащих одной компоненте линейной связности пространства X , группы $\pi_n(X; x_0)$ и $\pi_n(X; x_1)$, по существу, одинаковы. Для точек же, принадлежащих различным компонентам линейной связности пространства X , эти группы, вообще говоря, никак друг с другом не связаны.

Чтобы выяснить геометрический смысл изоморфизмов $u^\#$, мы покажем, что

для элементов $\alpha \in \pi_n(X; x_0)$ и $\beta \in \pi_n(X; x_1)$ тогда и только тогда существует такой путь $u: I \rightarrow X$, $u(0) = x_0$, $u(1) = x_1$, что

$$\beta = u^\#(\alpha),$$

когда отображения

$$\varphi: (S^n, u_0) \rightarrow (X; x_0), \quad \psi: (S^n, u_0) \rightarrow (X; x_1),$$

принадлежащие классам α и β , гомотопны между собой.

Действительно, если $\beta = u^\#(\alpha)$, то отображение ψ гомотопно (относительно u_0) конечному отображению φ_1 некоторой гомотопии φ_t отображения φ вдоль пути u . Таким образом, $\psi \sim \varphi_1 \sim \varphi$ и, следовательно, $\psi \sim \varphi$. Обратно, любую гомотопию $\varphi_t: \varphi \sim \psi$ можно рассматривать как гомотопию отображения φ вдоль пути

$$u(t) = \varphi_t(u_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Поэтому, если $\varphi_t: \varphi \sim \psi$, то $\beta = u^\#(\alpha)$.

Поскольку для каждого пути u отображение $u^\#$ является изоморфизмом, единственным элементом $\alpha \in \pi_n(X; x_0)$, для которого $u^\#(\alpha) = 0_{x_1}$, является элемент 0_{x_0} . Это означает, что

$$\varphi : (S^n, u_0) \rightarrow (X; x_0)$$

тогда и только тогда гомотопно некоторому постоянному отображению, когда оно гомотопно относительно u_0 постоянному отображению в точку x_0 .

Другими словами (см. п. 1),
отображение

$$\varphi : (S^n, u_0) \rightarrow (X; x_0)$$

тогда и только тогда принадлежит классу 0_{x_0} , когда его можно распространить до некоторого отображения $E^{n+1} \rightarrow X$.

Следовательно,

пространство X тогда и только тогда t -связно, когда для некоторой (а потому и для любой) точки $x_0 \in X$ и любого $n \leq t$ имеет место равенство

$$\pi_n(X; x_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь произвольную деформацию

$$\xi_t : X \rightarrow X$$

пространства X . Для любой точки $x_0 \in X$ эта деформация определяет путь

$$u(t) = \xi_t(x_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

соединяющий точку x_0 с точкой $x_1 = \xi_1(x_0)$. С другой стороны, ясно, что для любого отображения

$$\varphi : (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_0)$$

семейство отображений

$$\xi_t \circ \varphi : S^n \rightarrow X$$

представляет собой гомотопию отображения φ вдоль пути u . Поэтому для любого элемента $\alpha \in \pi_n(X; x_0)$ элемент $u^\#(\alpha) \in \pi_n(X; x_1)$ является классом отображения $\xi \circ \varphi$, где $\xi = \xi_1$, а φ — произвольное отображение класса α . Это означает, что

$$\xi_* : \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1)$$

совпадает с гомоморфизмом

$$u^\# : \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1).$$

Поскольку последний гомоморфизм является, как мы знаем, изоморфизмом, тем самым доказано, что

для любого гомотопически тождественного отображения

$$\xi : X \rightarrow X$$

и любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм

$$\xi_* : \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1), \quad x_1 = \xi(x_0),$$

является изоморфизмом.

Отображение

$$f : X \rightarrow Y$$

топологического пространства X в топологическое пространство Y мы будем называть *слабой гомотопической эквивалентностью*, если для любого $n \geq 0$ и любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм

$$f_* : \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(Y; y_0), \quad y_0 = f(x_0),$$

является изоморфизмом. Из только что доказанного предложения легко вытекает, что

любая гомотопическая эквивалентность

$$f : X \rightarrow Y$$

является слабой гомотопической эквивалентностью.

Действительно, пусть

$$g : X \rightarrow Y$$

— гомотопическая эквивалентность, обратная к эквивалентности f , и пусть x_0 — произвольная точка пространства X . Полагая

$$y_0 = f(x_0), \quad x_1 = g(y_0), \quad y_1 = f(x_1),$$

мы для любого $n \geq 0$ рассмотрим гомоморфизмы

$$f_* = f_{*, x_0} : \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(Y; y_0),$$

$$f'_* = f_{*, x_1} : \pi_n(X; x_1) \rightarrow \pi_n(Y; y_1),$$

$$g_* = g_{*, y_0} : \pi_n(Y; y_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1),$$

индуцированные отображениями f и g , а также гомо-

морфизмы

$$(g \circ f)_* : \pi_n(X; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_1),$$

$$(f \circ g)_* : \pi_n(Y; y_0) \rightarrow \pi_n(Y; y_1),$$

индуцированные составными отображениями

$$g \circ f : X \rightarrow X, \quad f \circ g : Y \rightarrow Y.$$

Как мы знаем,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*, \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*.$$

С другой стороны, так как отображения $g \circ f$ и $f \circ g$, по условию, гомотопически тождественны, то гомоморфизмы $(g \circ f)_*$ и $(f \circ g)_*$ являются изоморфизмами. Поэтому из равенства $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ следует, что отображение g_* эпиморфно, а из равенства $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ — что отображение g_* мономорфно. Следовательно, отображение g_* , а потому и отображение f_* , является изоморфизмом.

З а м е ч а н и е. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: существуют слабые гомотопические эквивалентности, не являющиеся гомотопическими эквивалентностями. Однако, как мы далее увидим, для достаточно «хороших» пространств любая слабая гомотопическая эквивалентность представляет собой гомотопическую эквивалентность.

Ясно, что композиция слабых гомотопических эквивалентностей также является слабой гомотопической эквивалентностью. Поэтому из предыдущего утверждения немедленно вытекает, что

любое отображение, гомотопически эквивалентное слабой гомотопической эквивалентности, также является слабой гомотопической эквивалентностью.

З а м е ч а н и е. По аналогии с отношением гомотопической эквивалентности пространств можно было бы ввести отношение их слабой гомотопической эквивалентности. Это отношение, очевидно, рефлексивно и транзитивно, но однако, вообще говоря, несимметрично. Мы его рассматривать не будем.

Подпространство A пространства X мы будем называть *репрезентативным*, если отображение вложения $i : A \subset X$ является слабой гомотопической эквивалентностью, т. е. если

для любого $n \geq 0$ и любой точки $x_0 \in A$ гомоморфизм

$$i_* : \pi_n(A; x_0) \rightarrow \pi_n(X; x_0)$$

является изоморфизмом. Из только что доказанного предложения непосредственно вытекает, что

отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является слабой гомотопической эквивалентностью, когда пространство X представляет собой репрезентативное подпространство цилиндра Z_f отображения f .

В связи с этим предложением полезно заметить, что если подпространство A пространства X репрезентативно, то при любом $n \geq 0$ каждое отображение

$$f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$$

гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $g: E^n \rightarrow A$ (т. е., точнее, отображению $i \circ g$, где $i: A \subseteq X$).

Действительно, предполагая, что $n > 0$ (при $n = 0$ рассуждения лишь упрощаются), мы отнесем отображению f элемент α' группы $\pi_{n-1}(A; x_0)$, где $x_0 = f(u_0)$, определенный отображением

$$f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow A.$$

Поскольку отображение $i \circ f|_{S^{n-1}}$ является ограничением отображения $f: E^n \rightarrow X$, то, по доказанному выше, $i_*(\alpha') = 0$, и потому $\alpha' = 0$ (ибо гомоморфизм i_* является, по условию, изоморфизмом). Следовательно, существует такое отображение

$$h: E^n \rightarrow A,$$

что

$$h|_{S^{n-1}} = f|_{S^{n-1}}.$$

Пусть

$$\beta = \delta(f, i \circ h)$$

— элемент группы $\pi_n(X; x_0)$, различающий отображения f и $i \circ h$. Поскольку подпространство A репрезентативно, в группе $\pi_n(A; x_0)$ существует такой элемент α , что $i_*(\alpha) = \beta$. Пусть

$$g: E^n \rightarrow A$$

— такое отображение шара E^n в пространство A , совпадающее на S^{n-1} с отображением h , что

$$\delta(g, h) = \alpha.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\delta(i \circ g, i \circ h) = i_*(\alpha),$$

т. е.

$$\delta(i \circ g, i \circ h) = \delta(f, i \circ h).$$

Поэтому отображения f и $i \circ g$ гомотопны относительно S^{n-1} .

З а м е ч а н и е. Обратное утверждение также верно: если при каждом $n \geq 0$ любое отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $E^n \rightarrow A$, то подпространство A репрезентативно. Нам этот факт не понадобится, и мы его доказательство оставим читателю в качестве простого упражнения.

5. Гомотопические пределы

Пусть

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \quad (1)$$

— возрастающая последовательность подпространств топологического пространства X , объединением которых является все пространство X . Рассмотрим отображения вложения

$$i_m^n: X_n \rightarrow X_m, \quad i^n: X_n \rightarrow X, \quad 0 \leq n \leq m < \infty,$$

и для любой точки $x \in X$ и любого числа $n \geq n_x$, где n_x — наименьшее n , для которого $x \in X_n$, индуцированные этими отображениями гомоморфизмы

$$\begin{aligned} (i_m^n)_* &: \pi_k(X_n; x) \rightarrow \pi_k(X_m; x), \\ (i^n)_* &: \pi_k(X_n; x) \rightarrow \pi_k(X; x), \end{aligned} \quad k \geq 0,$$

гомотопических групп.

Мы будем говорить, что пространство X является *слабым гомотопическим пределом* подпространств (1), если

1) для любого числа $k \geq 0$, любой точки $x \in X$ и любого элемента $\alpha \in \pi_k(X; x)$ существуют такое число $n \geq n_x$ и такой элемент $\alpha_n \in \pi_k(X_n; x)$, что

$$\alpha = (i^n)_*(\alpha_n);$$

2) для любого числа $k \geq 0$, любого числа $n \geq 0$, любой точки $x \in X$ и любых элементов $\alpha_n, \alpha'_n \in \pi_k(X_n; x)$, обладающих тем свойством, что

$$(i^n)_*(\alpha_n) = (i^n)_*(\alpha'_n),$$

существует такое число $m \geq n$, что

$$(i_m^n)_* (\alpha_n) = (i_m^n)_* (\alpha'_n).$$

Ясно, что если число $n \geq n_x$ удовлетворяет условию 1), то и любое число $n' \geq n$ также удовлетворяет этому условию, т. е. существует такой элемент $\alpha_{n'} \in \pi_k(X_{n'}; x)$, что $(i_{n'}^n)_* (\alpha_{n'}) = \alpha$ (этим свойством обладает хотя бы элемент $\alpha_{n'} = (i_{n'}^n)_* (\alpha_n)$). Аналогично вместе с числом m условию 2) удовлетворяет и любое число $m' \geq m$.

З а м е ч а н и е. Читатель, знакомый с понятием спектра групп, немедленно обнаружит, что для любого числа $k \geq 0$ и любой точки $x \in X$ группы $\pi_k(X_n; x)$, $n \geq m$, и гомоморфизмы $(i_m^n)_*$, $n_x \leq n \leq m$, составляют спектр и что условия 1) и 2) равносильны тому, что гомоморфизм предельной группы этого спектра в группу $\pi_k(X; x)$, индуцированный гомоморфизмами $(i^n)_*$, является изоморфизмом.

Можно указать простые теоретико-множественные условия, при выполнении которых пространство X является слабым гомотопическим пределом подпространств (1). Например, *если для любого компактного множества $C \subset X$ существует такое число $n \geq 0$, что $C \subset X_n$, то пространство X является слабым гомотопическим пределом подпространств X_n .*

Действительно, пусть $k \geq 0$, $x \in X$ и пусть α — произвольный элемент группы $\pi_k(X; x)$. Рассмотрим произвольное отображение

$$f: (S^k, u_0) \rightarrow (X, x)$$

класса α . Так как сфера S^k компактна, то множество $f(S^k)$ также компактно, и, следовательно, существует такое число $n \geq 0$, что $f(S^k) \subset X_n$. Поэтому отображение f мы можем рассматривать как отображение $(S^k, u_0) \rightarrow (X_n, x)$. Ясно, что определенный этим отображением элемент $\alpha_n \in \pi_k(X_n; x)$ и обладает тем свойством, что $(i^n)_* (\alpha_n) = \alpha$.

Условие 2) проверяется аналогично (только вместо компактности сферы S^k приходится использовать компактность произведения $S^k \times I$).

В случае произвольной последовательности (1) пространство X не является, вообще говоря, слабым гомотопическим пределом подпространств X_n . Однако можно утверждать, что

для любой возрастающей последовательности

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \quad (\Sigma)$$

подпространств пространства X существуют такое пространство X^Σ и такая последовательность

$$X_0^\Sigma \subset X_1^\Sigma \subset \dots \subset X_n^\Sigma \subset \dots$$

подпространств пространства X^Σ , что

1) для любого $n \geq 0$ пространство X_n^Σ гомотопически эквивалентно пространству X_n ;

2) пространство X^Σ является слабым гомотопическим пределом подпространств X_n^Σ .

Действительно, пусть X^Σ — подпространство произведения $X \times \mathbf{R}$, состоящее из всех точек (x, t) , $x \in X$, $t \in \mathbf{R}$, для которых $t \geq n + 1$ при $x \notin X_n$.

$$X^\Sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} (X_k \times [k, \infty)) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (X_k \times [k, k+1))$$

и пусть X_n^Σ — подпространство пространства X^Σ , состоящее из всех точек $(x, t) \in X^\Sigma$, для которых $t \leq n$, т. е.

$$X_n^\Sigma = (X_0 \times [0, 1]) \cup (X_1 \times [1, 2]) \cup \dots$$

$$\dots \cup (X_{n-1} \times [n-1, n]) \cup (X_n \times n).$$

Так как координата t точки (x, t) произвольного компактного множества $C \subset X^\Sigma$, будучи непрерывной на C функцией, ограничена, то $C \subset X_n^\Sigma$ при некотором $n \geq 0$. Следовательно, согласно доказанному выше утверждению, пространство X^Σ является слабым гомотопическим пределом подпространств X_n^Σ .

Рассмотрим, далее, естественное отображение

$$p^\Sigma: X^\Sigma \rightarrow X,$$

определенное формулой

$$p^\Sigma(x, t) = x, \quad (x, t) \in X^\Sigma.$$

Ясно, что для любого $n \geq 0$ имеет место включение

$$p^\Sigma(X_n^\Sigma) \subset X_n,$$

и потому отображение p^Σ определяет некоторое отображение

$$p_n^\Sigma: X_n^\Sigma \rightarrow X_n.$$

(Это отображение определяется той же формулой, что и отображение p^Σ , с тем лишь отличием, что теперь $(x, t) \in X_n^\Sigma$.) Полагая для любой точки $x \in X_n$

$$q_n^\Sigma(x) = (x, n),$$

мы, очевидно, получим непрерывное отображение

$$q_n^\Sigma: X_n \rightarrow X_n^\Sigma,$$

для которого $p_n^\Sigma \circ q_n^\Sigma = 1_{X_n}$. С другой стороны, полагая

$$\xi_\tau(x, t) = (x, t + \tau(n - t)), \quad (x, t) \in X_n^\Sigma, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

мы получим такую деформацию

$$\xi_\tau: X_n^\Sigma \rightarrow X_n^\Sigma, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

пространства X_n^Σ , что $\xi_1 = q_n^\Sigma \circ p_n^\Sigma$. Следовательно, отображения p_n^Σ и q_n^Σ являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями.

Тем самым сформулированное выше предложение полностью доказано.

Вообще говоря, нельзя утверждать, что отображение p^Σ является гомотопической эквивалентностью (хотя бы слабой). Именно, как мы сейчас покажем,

отображение

$$p^\Sigma: X^\Sigma \rightarrow X$$

тогда и только тогда является слабой гомотопической эквивалентностью, когда пространство X представляет собой слабый гомотопический предел подпространств X_n .

Мы докажем даже несколько более общее предложение, относящееся к ситуации, когда нам заданы произвольное пространство X , являющееся слабым гомотопическим пределом подпространств

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots,$$

произвольное пространство Y , являющееся объединением возрастающей последовательности подпространств

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots,$$

и такое непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow Y,$$

что

$$f(X_n) \subset Y_n$$

для любого $n \geq 0$. Пусть

$$f_n: X_n \rightarrow Y_n, \quad n \geq 0,$$

— отображение, определенное отображением f . Это отображение связано с отображением f формулой

$$f \circ i^n = j^n \circ f_n,$$

где i^n — как и выше, отображение вложения $X_n \subset X$, а j^n — отображение вложения $Y_n \subset Y$. Кроме того, при $n \leq m$ отображения f_n и f_m связаны формулой

$$f_m \circ i_m^n = j_m^n \circ f_n,$$

где $i_m^n: X_n \subset X_m$ и $j_m^n: Y_n \subset Y_m$.

Мы покажем, что

если для любого $n \geq 0$ отображение f_n является слабой гомотопической эквивалентностью, то следующие два утверждения равносильны:

1) пространство Y является слабым гомотопическим пределом подпространств Y_n ;

2) отображение f является слабой гомотопической эквивалентностью.

Действительно, пусть утверждение 1) справедливо. Рассмотрим произвольное число $k \geq 0$ и произвольную точку $x \in X$. Так как пространство Y является слабым гомотопическим пределом подпространств Y_n , то для любого элемента $\beta \in \pi_k(Y; y)$, где $y = f(x)$, существуют такое число $n \geq n_y$ и такой элемент $\beta_n \in \pi_k(Y_n; y)$, что $\beta = (j^n)_*(\beta_n)$. При этом, без ограничения общности, мы можем считать, что $n \geq n_x$, т. е. что группа $\pi_k(X_n; x)$ имеет смысл. Поскольку соответствующий гомоморфизм

$$(f_n)_*: \pi_k(X_n; x) \rightarrow \pi_k(Y_n; y)$$

является, по условию, изоморфизмом, существует такой элемент $\alpha_n \in \pi_k(X_n; x)$, что $\beta_n = (f_n)_*(\alpha_n)$. Следовательно,

полагая $\alpha = (i^n)_* (\alpha_n)$, мы получим, что

$$f_* (\alpha) = (f \circ i^n)_* (\alpha_n) = (j^n \circ f_n)_* (\alpha_n) = (j^n)_* (\beta_n) = \beta.$$

Таким образом, для любого числа $k \geq 0$ и любой точки $x \in X$ гомоморфизм

$$f_* : \pi_k (X; x) \rightarrow \pi_k (Y; f(x)) \quad (2)$$

является эпиморфизмом.

Пусть теперь α и α' — такие элементы группы $\pi_k (X; x)$, что $f_* (\alpha) = f_* (\alpha')$. Поскольку пространство X является слабым гомотопическим пределом подпространств X_n , существуют такое число $n \geq n_x$ и такие элементы $\alpha_n, \alpha'_n \in \pi_k (X; x)$, что $\alpha = (i^n)_* (\alpha_n)$ и $\alpha' = (i^n)_* (\alpha'_n)$. Пусть $\beta_n = (f_n)_* (\alpha_n)$ и $\beta'_n = (f_n)_* (\alpha'_n)$. Так как

$$\begin{aligned} (j^n)_* (\beta_n) &= (j^n \circ f_n)_* (\alpha_n) = (f \circ i^n)_* (\alpha_n) = f_* (\alpha) = \\ &= f_* (\alpha') = (f \circ i^n)_* (\alpha'_n) = (j^n \circ f_n)_* (\alpha'_n) = (j^n)_* (\beta'_n), \end{aligned}$$

то существует такое число $m \geq n$, что

$$(j_m^n)_* (\beta_n) = (j_m^n)_* (\beta'_n).$$

Следовательно, полагая $\alpha_m = (i_m^n)_* (\alpha_n)$ и $\alpha'_m = (i_m^n)_* (\alpha'_n)$, мы получим, что

$$\begin{aligned} (f_m)_* (\alpha_m) &= (f_m \circ i_m^n)_* (\alpha_n) = (j_m^n \circ f_n)_* (\alpha_n) = (j_m^n)_* (\beta_n) = \\ &= (j_m^n)_* (\beta'_n) = (j_m^n \circ f_n)_* (\alpha'_n) = (f_m \circ i_m^n)_* (\alpha'_n) = (f_m)_* (\alpha'_m). \end{aligned}$$

Поскольку отображение $(f_m)_*$, по условию, изоморфно, отсюда вытекает, что $\alpha_m = \alpha'_m$, и потому

$$\alpha = (i^n)_* (\alpha_n) = (i^m)_* (\alpha_m) = (i^m)_* (\alpha'_m) = (i^m \circ i_m^n)_* (\alpha'_n) = \alpha'.$$

Таким образом, гомоморфизм (2) является также и мономорфизмом. Тем самым импликация 1) $\Rightarrow$ 2) полностью доказана.

Пусть теперь справедливо утверждение 2). Докажем, что для подпространств Y_n выполняется условие 1) определения слабого гомотопического предела, т. е. что для любого числа $k \geq 0$, любой точки $y \in Y$ и любого элемента $\beta \in \pi_k (Y; y)$ существует такое число $n \geq n_y$, что $\beta = (j^n)_* (\beta_n)$. Поскольку отображение f индуцирует, по предположению, взаимно однозначное соответствие между множеством компонент линейной

связности пространства X и множеством компонент линейной связности пространства Y , мы, без ограничения общности, можем считать, что $y = f(x)$, где x — некоторая точка пространства X . Рассмотрим соответствующий гомоморфизм

$$f_* : \pi_k(X; x) \rightarrow \pi_k(Y; y).$$

Поскольку этот гомоморфизм является, по условию, изоморфизмом, существует такой элемент $\alpha \in \pi_k(X; x)$, что $\beta = f_*(\alpha)$. Поскольку пространство X является слабым гомотопическим пределом подпространств X_n , существуют такое число $n \geq n_x \geq n_y$ и такой элемент $\alpha_n \in \pi_k(X; x)$, что $\alpha = (i^n)_*(\alpha_n)$. Следовательно, полагая $\beta_n = (f_n)_*(\alpha_n)$, мы получим, что

$$\beta = (f \circ i^n)_*(\alpha_n) = (j^n \circ f_n)_*(\alpha_n) = (j^n)_*(\beta_n).$$

Условие 2) проверяется совершенно аналогично.

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Мы будем говорить, что пространство X является *гомотопическим пределом* последовательности подпространств

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots, \quad (\Sigma)$$

если отображение

$$p^\Sigma : X^\Sigma \rightarrow X$$

является гомотопической эквивалентностью. В силу только что доказанного предложения,

любое пространство X , являющееся гомотопическим пределом подпространств X_n , является и их слабым гомотопическим пределом.

Изучение гомотопических пределов мы начнем с доказательства того, что

если

1) *каждая точка $x \in X$ является внутренней точкой некоторого подпространства X_n , т. е. семейство $\{\text{Int } X_n; n \geq 0\}$ представляет собой открытое покрытие пространства X ;*

2) *в покрытие $\{\text{Int } X_n; n \geq 0\}$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\Gamma = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$, для которого существует подчиненное ему разложение единицы $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$,*

то пространство X является гомотопическим пределом подпространств X_n .

Действительно, обозначая для каждого элемента $\alpha \in A$ символом $n(\alpha)$ наименьшее n , для которого $U_\alpha \in \text{Int } X_n$, и полагая

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A} n(\alpha) f_\alpha(x), \quad x \in X,$$

мы определим на пространстве X некоторую числовую функцию $f(x)$. Эта функция, как легко видеть, непрерывна (ибо покрытие Γ , по условию, локально конечно). Кроме того, она обладает тем свойством, что $f(x) \geq n+1$ при $x \notin X_n$, так как если $x \notin X_n$, то $f_\alpha(x) = 0$ для всех $\alpha \in A$, для которых $n(\alpha) \leq n$, и поэтому

$$f(x) \geq (n+1) \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = n+1.$$

Следовательно, формула

$$q(x) = (x, f(x)), \quad x \in X,$$

определяет некоторое непрерывное отображение

$$q: X \rightarrow X^{\mathbb{N}}.$$

Ясно, что $p \circ q = 1_X$. Кроме того, формула

$$\xi_\tau(x, t) = (x, (1-\tau)t + \tau f(x)), \quad (x, t) \in X^{\mathbb{N}}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

определяет, как легко видеть, деформацию $\xi_\tau: X^{\mathbb{N}} \rightarrow X^{\mathbb{N}}$, для которой $\xi_1 = q \circ p$. Таким образом, отображение p является, как и утверждалось, гомотопической эквивалентностью.

Для существования разложения единицы $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$, подчиненного локально конечному покрытию Γ , достаточно, как мы знаем, чтобы пространство X было нормально. С другой стороны, чтобы существовало покрытие Γ , достаточно, например, потребовать, чтобы пространство X было паракомпактно или (в предположении, что пространство X нормально) чтобы для любого $n \geq 0$ имело место включение $\overline{\text{Int } X_n} \subset \text{Int } X_{n+1}$. (Действительно, в последнем случае локально конечным покрытием, вписанным в покрытие $\{\text{Int } X_n; n \geq 0\}$ является покрытие $\{\text{Int } X_1, \text{Int } X_{n+1} \setminus \overline{V_{n-1}}; n \geq 0\}$, где

где V_{n-1} — такая окрестность множества $\overline{\text{Int } X_{n-1}}$, что $\overline{V_{n-1}} \subset \text{Int } X_n$.) Таким образом,

если выполнено условие 1) предыдущего предложения, а пространство X нормально и, кроме того, либо это пространство паракомпактно, либо

$$\overline{\text{Int } X_n} \subset \text{Int } X_{n+1}$$

для любого $n \geq 0$, то пространство X является гомотопическим пределом подпространств X_n .

Эти условия ни в коей мере не являются необходимыми.

Рассмотрим теперь (для произвольного пространства X и произвольных его подпространств X_n), подпространства

$$X_0^\Sigma \subset X_1^\Sigma \subset \dots \subset X_n^\Sigma \subset \dots$$

пространства X^Σ . Ясно, что $\text{Int } X_n^\Sigma$ представляет собой множество всех точек $(x, t) \in X^\Sigma$, для которых $t < n$. Поэтому

$$X^\Sigma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int } X_n^\Sigma,$$

т. е. для подпространств X_n^Σ выполнено условие 1) доказанного выше предложения. Кроме того, легко видеть, что множества

$$\text{Int } X_1^\Sigma, \quad \text{Int } X_{n+1}^\Sigma \setminus X_n^\Sigma, \quad n \geq 1, \quad (3)$$

составляют локально конечное покрытие, вписанное в покрытие $\{\text{Int } X_n^\Sigma; n \geq 0\}$, а функции f_{n+1} , $n \geq 0$, определенные формулой

$$f_{n+1}(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq n - \frac{3}{4} \text{ или } t \geq n + \frac{3}{4}, \\ \frac{4t - 4n + 3}{2}, & \text{если } n - \frac{3}{4} \leq t \leq n - \frac{1}{4}, \\ 1, & \text{если } n - \frac{1}{4} \leq t \leq n + \frac{1}{4}, \\ \frac{3 + 4n - 4t}{2}, & \text{если } n + \frac{1}{4} \leq t \leq n + \frac{3}{4}, \end{cases}$$

составляют разложение единицы, подчиненное покрытию (3). Следовательно,

для любого пространства X и любых его подпространств

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$$

пространство X^Σ является гомотопическим пределом подпространств

$$X_n^\Sigma = (X_0 \times [0, 1]) \cup \dots \cup (X_{n-1} \times [n-1, n]) \cup (X_n \times n).$$

Это предложение является усилением доказанного выше свойства подпространств X_n^Σ . Пользуясь им, мы можем перенести на случай гомотопических пределов основные свойства слабых гомотопических пределов.

Пусть, например, X — произвольное пространство, являющееся гомотопическим пределом подпространств

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots,$$

Y — произвольное пространство, в котором задана возрастающая последовательность подпространств

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots,$$

и f — такое непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow Y,$$

что

$$f(X_n) \subset Y_n$$

для любого $n \geq 0$. Тогда

если для каждого $n \geq 0$ определенное отображением f отображение

$$f_n: X_n \rightarrow Y_n$$

является гомотопической эквивалентностью, то следующие два условия равносильны:

1) пространство Y является гомотопическим пределом подпространств Y_n ;

2) отображение f является гомотопической эквивалентностью.

Действительно, пусть, как и выше,

$$X^\Sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} (X_k \times [k, k+1])$$

и пусть аналогично

$$Y^\Sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} (Y_k \times [k, k+1]).$$

Так как $f(X_k) \subset Y_k$, то формула

$$f^\Sigma(x, t) = (f(x), t), \quad (x, t) \in X^\Sigma,$$

определяет некоторое непрерывное отображение

$$f^\Sigma: X^\Sigma \rightarrow Y^\Sigma.$$

С отображением f отображение f^Σ связано, очевидно, формулой

$$f \circ p^\Sigma = \bar{p}^\Sigma \circ f^\Sigma,$$

где

$$p^\Sigma: X^\Sigma \rightarrow X, \quad \bar{p}^\Sigma: Y^\Sigma \rightarrow Y$$

— естественные отображения. Поэтому если утверждение 1) справедливо, то отображение f^Σ гомотопически эквивалентно отображению f , а если справедливо утверждение 2), то композиция отображений f^Σ и $\bar{p}^\Sigma$ является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, для доказательства равносильности утверждений 1) и 2) достаточно доказать, что

отображение f^Σ является гомотопической эквивалентностью.

Рассмотрим сначала случай, когда $X = Y$ и $X_n = Y_n$ для всех $n \geq 0$. Пусть, кроме того, каждое отображение

$$f_n: X_n \rightarrow X_n, \quad n \geq 0,$$

гомотопически тождественно и пусть

$$\xi_{n,t}: X_n \rightarrow X_n$$

— деформация пространства X_n , связывающая тождественное отображение 1_{X_n} с отображением f_n . Для любой точки $x \in X_n$, $n \geq 0$, и любых $t, \tau \in I$ мы положим

$$h_\tau(x, n+t) =$$

$$= \begin{cases} (f(x), n+t(2\tau+1)), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, 0 \leq t \leq 1/2, \\ (f(x), n+2(1-t)\tau+t), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, 1/2 \leq t \leq 1, \\ (\xi_{n, 2-2\tau}(x), n+2t), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq 1/2, \\ (\xi_{n, 1-(3-4t)(2\tau-1)}(x), n+1), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ (\xi_{n+1, 1-(4t-3)(2\tau-1)}(x), n+1), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Легко видеть (рис. 4), что тем самым мы получим некоторую гомотопию

$$h_\tau: X^\Sigma \rightarrow X^\Sigma,$$

связывающую отображение f^Σ с отображением h , определенным формулой

$$h(x, n+t) = \begin{cases} (x, n+2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (\xi_{n, 4t-2}(x), n+1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ (\xi_{n+1, 4-4t}(x), n+1), & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому нам достаточно доказать, что гомотопической эквивалентностью является отображение h .

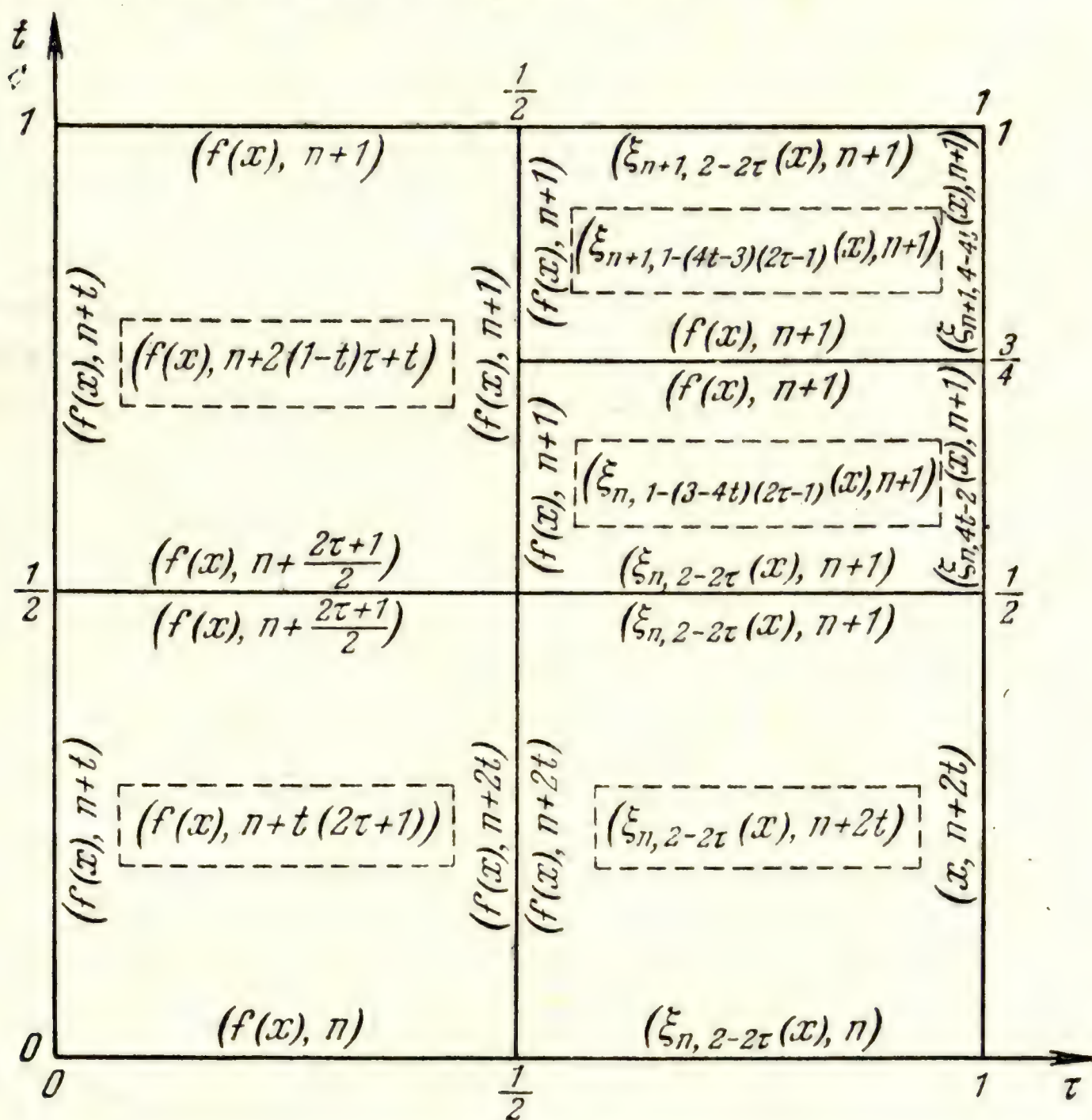


Рис. 4.

Имея это в виду, мы заметим, что в силу равенства

$$h\left(x, n + \frac{1}{2}\right) = h(x, n+1) = (x, n+1)$$

формула

$$g(x, n + t) = \begin{cases} (x, n + 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ h\left(x, n + \frac{3-2t}{2}\right), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

однозначно определяет некоторое непрерывное отображение

$$g: X^\Sigma \rightarrow X^\Sigma.$$

Пусть

$$\eta_\tau(x, n + t) =$$

$$= \begin{cases} (x, n + (1 + 6\tau)t), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, 0 \leq t \leq 1/4, \\ (x, n + 2(1 - t)\tau + t), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, 1/4 \leq t \leq 1, \\ (h \circ g)(x, n + t), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq \tau/2, \\ h(x, n + \tau), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, \tau/2 \leq t \leq \frac{3-2\tau}{2}, \\ (h \circ g)(x, n + t), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, \frac{3-2\tau}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Поскольку,

$$(h \circ g)\left(x, n + \frac{\tau}{2}\right) = h(x, n + \tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

$$\begin{aligned} (h \circ g)\left(x, n + \frac{3-2\tau}{2}\right) &= (h \circ h)\left(x, n + \frac{3-2\frac{3-2\tau}{2}}{2}\right) = \\ &= (h \circ h)(n + \tau) = \begin{cases} h(\xi_{n, 4\tau-2}(x), n + 1) \\ h(\xi_{n+1, 4-4\tau}(x), n + 1) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (\xi_{n, 4\tau-2}(x), n + 1) \\ (\xi_{n+1, 4-4\tau}(x), n + 1) \end{cases} = h(x, n + \tau), \quad 1/2 \leq \tau \leq 1, \end{aligned}$$

и

$$(h \circ g)(x, n + t) = (x, n + 4t), \quad 0 \leq t \leq 1/4,$$

эта формула определяет (рис. 5) некоторую гомотопию,

$$\eta_\tau: X^\Sigma \rightarrow X^\Sigma, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

связывающую тождественное отображение 1_{X^2} с отображением

$$h \circ g: X^2 \rightarrow X^2.$$

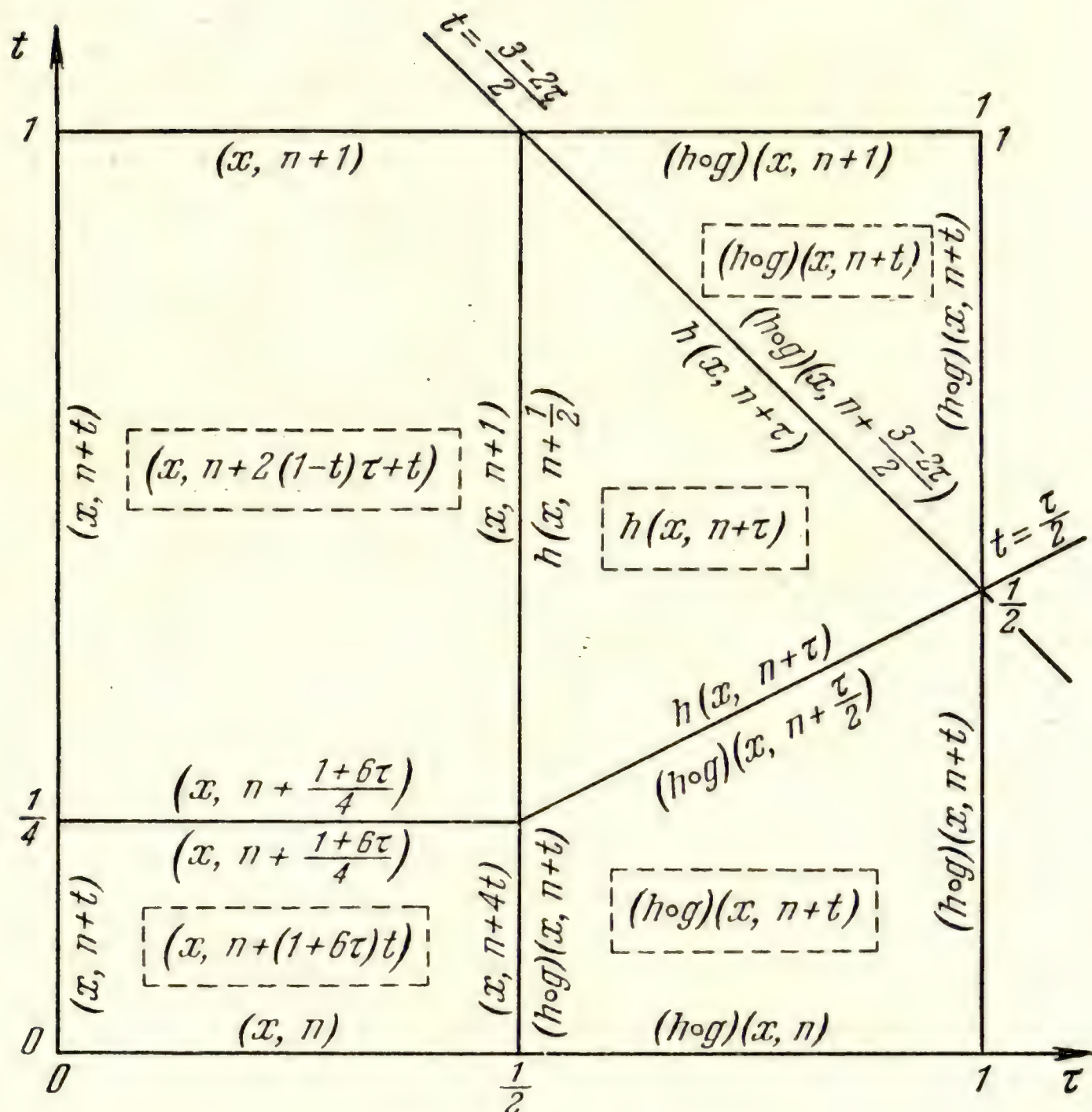


Рис. 5.

Аналогично в виду равенств

$$\begin{aligned} (g \circ h) \left(x, n + \frac{\tau}{2} \right) &= g(x, n + \tau), & 0 \leq \tau \leq 1, \\ (g \circ h) \left(x, n + \frac{3-2\tau}{2} \right) &= h \left(x, n + \frac{3-2\tau}{2} \right) = \\ &= g(x, n + \tau), & 1/2 \leq \tau \leq 1, \\ (g \circ h)(x, n + t) &= (x, n + 4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \end{aligned}$$

формула

$$\bar{\eta}_\tau(x, n + t) =$$

$$= \begin{cases} (x, n + (1 + 6\tau)t), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, 0 \leq t \leq 1/4, \\ (x, n + (1 - t)\tau + t), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, 1/4 \leq t \leq 1, \\ (g \circ h)(x, n + t), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq \tau/2, \\ g(x, n + \tau), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, \tau/2 \leq t \leq \frac{3-2\tau}{2}, \\ (g \circ h)(x, n + \tau), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, \frac{3-2\tau}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет некоторую гомотопию

$$\bar{\eta}_\tau: X^\Sigma \rightarrow X^\Sigma, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

связывающую отображение 1_{X^Σ} с отображением

$$g \circ h: X^\Sigma \rightarrow X^\Sigma.$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае отображение f^Σ действительно является гомотопической эквивалентностью.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть

$$g_n: Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq 0,$$

— гомотопические эквивалентности, обратные к гомотопическим эквивалентностям f_n , и пусть

$$i_n: X_n \subset X_{n+1}, \quad j_n: Y_n \subset Y_{n+1}$$

— отображения вложения. Так как $f_{n+1} \circ i_n = j_n \circ f_n$, то

$$i_n \circ g_n \sim g_{n+1} \circ f_{n+1} \circ i_n \circ g_n = g_{n+1} \circ j_n \circ f_n \circ g_n \sim g_{n+1} \circ j_n.$$

Пусть

$$h_{n,\tau}: Y_n \rightarrow X_{n+1}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

— произвольная гомотопия, связывающая отображение $i_n \circ g_n$ с отображением $g_{n+1} \circ j_n$. Легко видеть, что формула

$$h(y, n + t) = \begin{cases} (g_n(y), n + 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (h_{n,\tau-1}(y), n + 1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $y \in Y_n$, $n \geq t$ и $0 \leq t \leq 1$, однозначно определяет некоторое непрерывное отображение

$$h: Y^\Sigma \rightarrow X^\Sigma.$$

Рассмотрим отображение

$$h \circ f^\Sigma: X^\Sigma \rightarrow X^\Sigma.$$

Ясно, что

$$(h \circ f^\Sigma)(X_n^\Sigma) \subset X_n^\Sigma, \quad n \geq 0,$$

и потому для любого $n \geq 0$ отображение $h \circ f^\Sigma$ определяет некоторое отображение

$$(h \circ f^\Sigma)_n: X_n^\Sigma \rightarrow X_n^\Sigma.$$

При этом для любой точки $x \in X_n$ имеет место равенство

$$(h \circ f^\Sigma)_n(x, n) = ((g_n \circ f_n)(x), n).$$

Другими словами,

$$(h \circ f^\Sigma)_n \circ q_n^\Sigma = q_n^\Sigma \circ (g_n \circ f_n),$$

где q_n^Σ — построенная выше гомотопическая эквивалентность $q_n^\Sigma: X_n^\Sigma \rightarrow X_n^\Sigma$, обратная к гомотопической эквивалентности $p_n^\Sigma: X_n^\Sigma \rightarrow X_n^\Sigma$. Поэтому

$$(h \circ f^\Sigma)_n \sim (h \circ f^\Sigma)_n \circ (q_n^\Sigma \circ p_n^\Sigma) = q_n^\Sigma \circ (g_n \circ f_n) \circ p_n^\Sigma \sim q_n^\Sigma \circ p_n^\Sigma \sim 1_{X_n^\Sigma}.$$

Таким образом, отображение $h \circ f^\Sigma$ обладает (по отношению к подпространствам X_n^Σ) свойством, которого мы требовали от отображения f в первой части доказательства. Поэтому, по уже доказанному, отображение $h \circ f^\Sigma$ является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, отображение f^Σ гомотопически инъективно.

Аналогично отображение

$$f^\Sigma \circ h: Y^\Sigma \rightarrow Y^\Sigma$$

обладает тем свойством, что

$$(f^\Sigma \circ h)(Y_n^\Sigma) \subset Y_n^\Sigma, \quad n \geq 0,$$

и потому определяет отображения

$$(f^\Sigma \circ h)_n: Y_n^\Sigma \rightarrow Y_n, \quad n \geq 0,$$

удовлетворяющие соотношению

$$(f^\Sigma \circ h)_n \circ \bar{q}_n^\Sigma = \bar{q}_n^\Sigma \circ (f_n \circ g_n),$$

где $\bar{q}_n^\Sigma$ — отображение q_n^Σ , построенное для пространств Y_n . Из последнего соотношения следует, что отображения $(f^\Sigma \circ h)_n$ гомотопически тождественны. Поэтому отображение $f^\Sigma \circ h$ также является гомотопической эквивалентностью, и потому отображение f^Σ гомотопически надъективно.

Будучи одновременно гомотопически инъективным и гомотопически надъективным, отображение f^Σ является гомотопической эквивалентностью.

КЛЕТОЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

Общие клеточные разбиения доставляют нам, по-видимому, наиболее естественный запас объектов для построения гомотопической теории. Они обладают всеми основными геометрическими свойствами классических симплициальных разбиений (триангуляций), и вместе с тем их теория выгодно отличается от теории симплициальных разбиений своей общностью, стройностью и внутренней цельностью. Однако до сих пор никто, по-видимому, не пытался дать связного и независимого изложения основных свойств клеточных разбиений. Настоящая глава является первой попыткой в этом направлении.

Определение и простейшие свойства клеточных разбиений излагаются пп. 1 и 2.

В п. 3 доказывается, что любое клеточное разбиение является паракомпактным (и, следовательно, нормальным) пространством. Здесь же доказывается, что топологическое произведение двух клеточных разбиений является клеточным разбиением, если хотя бы одно из данных разбиений локально конечно или если оба они локально счетны.

В п. 4 после ряда простых замечаний о непрерывных отображениях клеточных разбиений доказывается, что любая клеточная пара удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопий, и формулируется (вместе с некоторыми следствиями) основная теорема о клеточных отображениях. Доказательству этой последней теоремы посвящен п. 5.

В заключительном п. 6 доказывается замечательная теорема Уайтхеда о том, что любая слабая гомотопическая эквивалентность, связывающая клеточные разбиения, является гомотопической эквивалентностью. В этом же пункте помещено несколько простых замечаний о квазиполиэдрах (т. е. пространствах, гомотопически эквивалентных клеточным разбиениям).

1. Клеточные предразбиения

Пусть X — произвольное хаусдорфово пространство. Подмножество e пространства X мы будем называть его (*открытой*) *клеткой*, если существует непрерывное отображение

$$\chi: E^n \rightarrow X \quad (1)$$

единичного евклидова шара E^n в пространство X , гомеоморфно отображающее открытый шар E^n на множество e и обладающее тем свойством, что $\chi(S^{n-1}) \cap e = \emptyset$. Размерность n шара E^n мы будем называть *размерностью* $\dim e$ клетки e . Ясно, что она однозначно определяется клеткой e (ибо шары E^n при различных n негомеоморфны). В случае, когда нужно специально указать размерность n клетки e , мы будем обозначать эту клетку символом e^n .

Образ $\chi(E^n)$ шара E^n при отображении (1) является компактным и потому замкнутым подмножеством хаусдорфова пространства X . Следовательно, замыкание $\bar{e} = \overline{\chi(E^n)}$ клетки e содержится в множестве $\chi(E^n)$ и потому с ним совпадает (ибо в силу непрерывности отображения χ имеет место включение $\chi(E^n) \subset \overline{\chi(E^n)}$ (см. свойства непрерывных отображений в п. 5 гл. 1). Итак,

образом шара E^n при отображении (1) является замыкание $\bar{e}$ клетки e .

Клетки пространства X отнюдь не должны быть открыты в X . Например, при $n=0$ шар $E^0 = E^0$ представляет собой одноточечное пространство, так что любая точка пространства X является его нульмерной клеткой.

При $n > 0$ точки шара E^n имеют вид vu , где $0 \leq v \leq 1$, а u — единичный вектор, т. е. точка единичной сферы S^{n-1} . Таким образом, любая точка множества $\bar{e}$ (после того как отображение (1) выбрано) имеет вид $\chi(vu)$, где $0 \leq v \leq 1$, а $|u| = 1$. При этом число v данной точкой определяется однозначно. Вектор u также определен однозначно, если только $0 < v < 1$.

Отображение (1) мы будем называть *характеристическим* для клетки e . Ясно, что вместе с ним характеристическим является и каждое отображение вида $\chi \circ \alpha$, где $\alpha: E^n \rightarrow E^n$ — произвольный гомеоморфизм шара E^n на себя. Однако могут существовать характеристические для клетки e отображения $E^n \rightarrow X$, отличные от отображений вида $\chi \circ \alpha$.

Так, например, для круга E^2 в плоскости наряду со всевозможными гомеоморфизмами $E^2 \rightarrow E^2$ характеристическими отображениями являются его отображения отождествления, при которых стягивается в точку некоторая дуга граничной окружности S^1 .

Иногда нам будет удобно представлять себе множество $\bar{e}$ в виде непрерывного образа не единичного шара E^n , а некоторого пространства E_e^n , гомеоморфного шару E^n (например, единичного куба или произведения $E^p \times E^q$, где $p + q = n$). В этом случае отображения $E_e^n \rightarrow X$, являющиеся композицией некоторого гомеоморфизма $E_e^n \rightarrow E^n$ и произвольного характеристического отображения $E^n \rightarrow X$, мы также будем называть *характеристическими отображениями*.

Так как пространство X , по условию, хаусдорфово, а шар E^n компактен, то характеристическое отображение χ (рассматриваемое как отображение шара E^n на замыкание $\bar{e}$ клетки e) является отображением отождествления и потому

топология множества $\bar{e}$ является топологией отождествления.

В частности, мы видим, что топология множества $\bar{e}$ не зависит от топологии пространства X в том смысле, что любая другая топология в X , в которой множество e является клеткой (с характеристическим отображением χ), индуцирует на $\bar{e}$ ту же топологию отождествления.

Заметим, что являясь непрерывным образом компактного и линейно связного множества E^n ,

множество $\bar{e}$ компактно и линейно связно.

Множество

$$\dot{e} = \bar{e} \setminus e$$

мы будем называть *границей* клетки e . При любом выборе характеристического отображения $\chi: E^n \rightarrow X$ оно совпадает с множеством $\chi(S^{n-1})$. Следовательно, при $n > 1$ множество $\dot{e}$ линейно связно, а при $n = 1$ оно состоит не более чем из двух точек. При $n = 0$ множество $\dot{e}$ пусто.

Основным объектом нашего исследования будут некоторые семейства K попарно непересекающихся клеток $e \subset X$. Для каждого такого семейства мы символом $|K|$ будем обозначать его *тело*, т. е. подпространство пространства X , являющееся объединением всех клеток $e \in K$, а символом K^n , где n — некоторое целое неотрицательное число, — его *n -й остов*, т. е. подсемейство семейства K , состоящее из всех клеток $e \in K$, размерность $\dim e$ которых не превосходит n .

К числу остовов удобно добавлять пустое подсемейство семейства K , считая его (-1) -м остовом K^{-1} , а также и само семейство K , считая его ∞ -м остовом K^∞ .

Выбрав для всех клеток e семейства K такие характеристические отображения $\chi_e: E_e \rightarrow X$, что $E_{e_1} \cap E_{e_2} = \emptyset$ при $e_1 \neq e_2$, мы можем определить топологическую сумму

$$P_K = \bigcup_{e \in K} E_e$$

пространств E_e и отображение

$$\chi: P_K \rightarrow X,$$

совпадающее на каждом из слагаемых E_e с соответствующим отображением χ_e . Построенное таким образом (очевидно, непрерывное) отображение $\chi: P_K \rightarrow X$ мы будем называть *характеристическим* для семейства K .

Семейство K попарно непересекающихся клеток $e \subset X$ мы будем называть *клеточным предразбиением* пространства X , если $|K| = X$ и для любого $n > 0$ граница $\dot{e}^n$ каждой n -мерной клетки $e^n \in K$ принадлежит подпространству $|K^{n-1}|$ (телу $n-1$ -го остова).

З а м е ч а н и е. Обычно условие $\chi(S^{n-1}) \cap e = \emptyset$ в определении клетки не включают, ибо интересны лишь клетки, составляющие предразбиения, а для таких клеток это условие выполнено автоматически.

Ясно, что

любое клеточное предразбиение K содержит хотя бы одну нульмерную клетку, т. е. его 0-й остов K^0 не пуст (если только, разумеется, пространство X не пусто).

В дальнейшем нульмерные клетки клеточного предразбиения K мы будем называть его *вершинами*.

Так как

$$K^m \subset K^n$$

при $m \leq n$ и, в частности, $K^0 \subset K^n$ при $n \geq 0$, то

любой остов K^n произвольного клеточного предразбиения K не пуст.

Предразбиение K называется *конечномерным*, если существует такое $n \geq 0$, что $K = K^n$. Наименьшее из этих n называется *размерностью* $\dim K$ предразбиения K . Ясно, что $K^m = K$ для любого $m \geq \dim K$. Кроме того, $\dim K^m \leq m$ для любого $m \geq 0$ (строгое неравенство $\dim K^m < m$ имеет место, если у разбиения K отсутствуют клетки размерности m).

З а м е ч а н и е. Таким образом, при неравных n и m возможно равенство $K^n = K^m$ (даже при n и m , меньших $\dim K$). Это возможно, когда у предразбиения отсутствуют клетки промежуточных размерностей.

П р и м е р ы п р е д р а з б и е н и й.

1) Всякое хаусдорфово пространство X можно «рассыпать» в семейство K , состоящее из всех его точек. Это семейство будет клеточным предразбиением пространства X , содержащим лишь нульмерные клетки.

2) Для любого $n \geq 0$ семейство $K = \{e^0, e^n\}$, состоящее из точки $e^0 = u_0 = (1, 0, \dots, 0)$ сферы S^n и ее дополнения $e^n = S^n \setminus u_0$, является клеточным предразбиением сферы S^n . Здесь $e^n = e^0$ (если $n > 0$), $K^m = \{e^0\}$ при $0 \leq m < n$ и $K^m = K$ при $m \geq n$.

3) Для любого $n \geq 0$ семейство $K = \{e^0, e^n, e^{n+1}\}$, состоящее из клетки $e^{n+1} = E^{n+1}$ и построенного в примере 2) предразбиения $\{e^0, e^n\}$ сферы S^n , представляет собой клеточное предразбиение шара E^{n+1} . Аналогично семейство, состоящее из двух точек 0 и 1 и открытого интервала $(0, 1)$, представляет собой клеточное предразбиение отрезка $I = [0, 1]$. Допуская гольность, мы это предразбиение будем обозначать тем же символом I .

4) Для любого $n \geq 0$ семейство K , состоящее из клетки $e^{n+1} = E^{n+1}$ и всех точек сферы S^n , также представляет собой клеточное предразбиение шара E^{n+1} . Его 0-й остов K^0 содержит (при $n > 0$) несчетное число клеток и представляет собой предразбиение примера 1), построенное для пространства $X = S^n$.

З а м е ч а н и е. Читатель, знакомый с понятием (конечно) триангулируемого пространства, немедленно обнаружит, что любая триангуляция такого пространства является его клеточным предразбиением. В дальнейшем изложении клеточные предразбиения такого рода не используются.

Подсемейство L клеточного предразбиения K мы будем называть его *подпредразбиением*, если $\bar{e} \subset |L|$ для любой клетки $e \in L$. Ясно, что

1) любое подпредразбиение L является клеточным предразбиением подпространства $|L|$;

2) любое подсемейство L клеточного предразбиения K , для которого подпространство $|L|$ замкнуто, является подпредразбиением;

3) для любого $n \geq 0$ остов K^n является подпредразбиением предразбиения K ;

4) объединение и пересечение любой (конечной или бесконечной) системы $\{L_\alpha\}$ подпредразбиений предразбиения K также является подпредразбиением, причем

$$|\bigcap L_\alpha| = \bigcap |L_\alpha|, \quad |\bigcup L_\alpha| = \bigcup |L_\alpha|.$$

В связи с утверждением 2) мы заметим, что вполне могут существовать и подпредразбиения L , для которых подпространство $|L|$ не замкнуто. (Например, любое подмножество пространства X является подпредразбиением указанного в примере 1) предразбиения этого пространства.) Однако

для любого конечного (т. е. состоящего из конечного числа клеток) подпредразбиения L подпространство $|L|$ замкнуто и даже компактно.

Действительно, в этом случае подпространство $|L|$ является объединением конечного числа компактных множеств $\bar{e}$, $e \in L$.

Из свойства 4) вытекает, в частности, что

для любого подмножества $A \subset X$ существует наименьшее подпредразбиение $L \subset K$, для которого $|L| \supset A$.

Таким подпредразбиением служит пересечение всех подпредразбиений $L \subset K$, для которых $|L| \supset A$. Мы будем обозначать его символом $K(A)$.

Ясно, что

1) для любой точки $x \in X$ имеет место равенство

$$K(x) = K(e) = K(\bar{e}),$$

где e — клетка предразбиения K , содержащая точку x ;

2) для любой клетки $e \in K$ подпредразбиение $K(e)$ состоит из подпредразбиения $K(\dot{e})$ и клетки e :

$$K(e) = \{K(\dot{e}), e\};$$

3) для любой клетки e , принадлежащей подпредразбиению L предразбиения K , имеет место равенство

$$L(e) = K(e).$$

Клеточное предразбиение K пространства X мы будем называть *точечно конечным*, если любая точка $x \in X$ принадлежит телу $|L|$ некоторого конечного подпредразбиения $L \subset K$ или, иными словами, если для любой точки $x \in X$ подпредразбиение $K(x)$ конечно. Аналогично, если любая точка $x \in X$ является внутренней точкой тела $|L|$ некоторого конечного (счетного) подпредразбиения $L \subset K$, то предразбиение K мы будем называть *локально конечным* (соответственно *локально счетным*). Ясно, что

любое локально конечное предразбиение K точечно конечно.

Кроме того,

любое подпредразбиение L точечно конечного (локально конечного или локально счетного) предразбиения K точечно конечно (соответственно локально конечно и локально счетно).

Далее, легко видеть, что

для любого локально конечного (локально счетного) предразбиения K пространства X характеристическое отображение

$$\chi: P_K \rightarrow X$$

локально компактно (соответственно локально счетно компактно).

Действительно, пусть p — произвольная точка пространства P_K . По условию, точка $\chi(p) \in X$ обладает в пространстве X окрестностью U , содержащейся в теле $|L|$ некоторого конечного (счетного) подпредразбиения $L \subset K$. Пусть $S = \chi^{-1}(U)$ и $C = \chi^{-1}(|L|)$. Ясно, что множество S представляет собой насыщенную (по отношению к отображению χ) окрестность точки p в пространстве P_K , а множество C является объединением конечного (соответственно счетного) числа слагаемых E_e топологической суммы P_K и потому замкнуто и компактно (соответственно счетно-компактно). Кроме того, множество C насыщенно по отношению к отображению χ и содержит замыкание $\bar{S}$ окрестности S . Таким образом, каждая точка пространства P_K обладает насыщенной окрестностью, замыкание

которой содержится в насыщенном, замкнутом и компактном (счетно-компактном) множестве. Но это, по определению, и означает, что отображение χ локально компактно (локально счетно-компактно).

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что если предразбиение K точечно конечно, то верно и обратное, т. е. любое точечно конечное предразбиение K , для которого характеристическое отображение $P_K \rightarrow X$ локально компактно (локально счетно-компактно), является локально конечным (локально счетным) предразбиением. Нам этот факт не понадобится.

Для любого замкнутого множества $A \subset X$ все множества вида $A \cap \bar{e}$, $e \in K$, разумеется, замкнуты (в X). Если верно обратное, т. е. если каждое множество $A \subset X$, для которого семейство $\{A \cap \bar{e}; e \in K\}$ состоит из замкнутых множеств, само замкнуто (в X), то мы будем говорить, что топология пространства X является по отношению к предразбиению K *слабой топологией*. Другими словами, топология пространства X является по отношению к предразбиению K слабой топологией, если это пространство представляет собой свободное объединение подпространств $\bar{e} \subset X$, $e \in K$. Ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда характеристическое отображение

$$\chi: P_K \rightarrow X$$

является отображением отождествления.

Аналогично для любого замкнутого множества $A \subset X$ и любого конечного подпредразбиения $L \subset K$ пересечение $A \cap |L|$ замкнуто в X . Легко видеть, что

если верно обратное, т. е. если множество $A \subset X$ замкнуто в X , когда оно обладает тем свойством, что для любого конечного подпредразбиения L предразбиения K пересечение $A \cap |L|$ замкнуто в X , то топология пространства X является по отношению к предразбиению K слабой топологией.

Действительно, если для любой клетки $e \in K$ пересечение $A \cap \bar{e}$ замкнуто, то для любого конечного подпредразбиения $L \subset K$ пересечение $A \cap |L|$ тоже замкнуто (ибо пространство $|L|$ является объединением конечного числа множеств вида $\bar{e}$, $e \in L$), и потому, согласно условию, множество A замкнуто.

Однако в пространстве X , топология которого является по отношению к предразбиению K слабой топологией, могут существовать незамкнутые подмножества A , обладающие тем свойством, что для любого конечного подпредразбиения $L \subset K$ пересечение $A \cap |L|$ замкнуто (таким свойством обладает, например, любое подмножество A сферы S^{n-1} в примере 4)).

Из доказанного утверждения непосредственно вытекает, в частности, что

для любого конечного предразбиения K пространства X (когда такое предразбиение существует) топология пространства X является по отношению к предразбиению K слабой топологией.

Более того, легко видеть, что

последнее утверждение имеет место не только для конечных, но и для любых локально конечных предразбиений.

Действительно, для любого локально конечного предразбиения K пространства X семейство $\{\bar{e} : e \in K\}$ представляет собой, очевидно, локально конечное семейство замкнутых подпространств пространства X , и потому это пространство является их свободным объединением (см. п. 1 гл. 1).

Пусть K и L — произвольные клеточные предразбиения хаусдорфовых пространств X и Y соответственно. Ясно, что в случае, когда пространства X и Y не пересекаются, объединение $K \cup L$ клеточных предразбиений K и L представляет собой клеточное предразбиение топологической суммы $X \cup Y$. Мы будем называть предразбиение $K \cup L$ суммой предразбиений K и L . Согласно только что сказанному

$$|K \cup L| = |K| \cup |L|.$$

Аналогичные утверждения имеют место и для любого числа слагаемых.

Далее, поскольку для любых $n \geq 0$ и $m \geq 0$ шар E^{n+m} гомеоморфен произведению $E^n \times E^m$, то для любых двух клеток $e^n \in K$ и $e^m \in L$ (с характеристическими отображениями $\chi_1 : E^n \rightarrow X$ и $\chi_2 : E^m \rightarrow Y$) произведение $e^n \times e^m$ представляет собой $n + m$ -мерную клетку пространства $X \times Y$

(за соответствующее характеристическое отображение можно принять, например, отображение $\chi_1 \times \chi_2: E^n \times E^m \rightarrow X \times Y$), причем

$$(e^n \times e^m)^* = \dot{e}^n \times e^m \cup e^n \times \dot{e}^m.$$

Следовательно, семейство $K \times L$ всех клеток вида $e_1 \times e_2$, $e_1 \in K$, $e_2 \in L$, представляет собой клеточное предразбиение пространства $X \times Y$: $|K \times L| = |K| \times |L|$. Мы будем называть предразбиение $K \times L$ *произведением* предразбиений K и L . Аналогично определяется произведение любого, конечного числа предразбиений.

Ясно, что

произведение точечно конечных (соответственно локально конечных и локально счетных) предразбиений точечно конечно (соответственно локально конечно и локально счетно).

В частном случае, когда предразбиение L является предразбиением $I = \{0, 1, (0, 1)\}$ отрезка $I = [0, 1]$, мы получаем предразбиение $K \times I$ произведения $X \times I$. Клетки этого предразбиения имеют вид $e \times 0$, $e \times 1$ и $e \times (0, 1)$, где $e \in K$. При этом размерность клеток $e \times 0$ и $e \times 1$ равна размерности n клетки e , а размерность клетки $e \times (0, 1)$ равна $n + 1$.

Пусть

$$\chi_K: P_K \rightarrow X, \quad \chi_L: P_L \rightarrow Y$$

— характеристические отображения для предразбиений K и L соответственно. Ясно, что в случае, когда пространства P_K и P_L выбраны непересекающимися, их топологическую сумму $P_K \cup P_L$ мы можем принять за пространство $P_{K \cup L}$, причем соответствующим характеристическим отображением $P_{K \cup L} \rightarrow X \cup Y$ мы можем считать тогда отображение

$$\chi_K \cup \chi_L: P_K \cup P_L \rightarrow X \cup Y.$$

Аналогично пространство $P_K \times P_L$ мы можем принять за пространство $P_{K \times L}$, а отображение

$$\chi_K \times \chi_L: P_K \times P_L \rightarrow X \times Y$$

— за отображение, характеристическое для предразбиения $K \times L$.

2. Клеточные разбиения

Клеточное предразбиение K пространства X мы будем называть *клеточным разбиением*, если оно точечно конечно и топология пространства X является по отношению к предразбиению K слабой топологией.

Из результатов предыдущего пункта непосредственно вытекает, что

любое локально конечное (в частности, любое конечное) предразбиение K является разбиением.

Таким образом, предразбиения, указанные в примерах 2) и 3) п. 1, являются разбиениями. Напротив, предразбиение примера 1) является разбиением, лишь когда пространство X дискретно (ибо в противном случае его топология не будет слабой топологией). В частности, при $X = S^n$, $n > 0$, это предразбиение разбиением не является. Аналогично предразбиение примера 4) п. 1 также не является разбиением, ибо оно не точечно конечно (заметим, что условие слабости топологии в этом примере выполнено).

Последнее предразбиение обладает, кроме того, подпредразбиениями, не являющимися разбиениями (ими являются произвольные подмножества сферы S^{n-1}). В то же время

любое подпредразбиение произвольного клеточного разбиения K само является разбиением.

Прежде чем доказывать последнее утверждение, мы заметим, что указанное в п. 1 достаточное условие слабости топологии пространства X является в случае разбиений и необходимым, так что

подмножество A пространства $X = |K|$ замкнуто, если для любого конечного подпредразбиения L разбиения K пересечение $A \cap |L|$ замкнуто.

Действительно, так как для любой клетки $e \in K$ пересечение $A \cap |K(e)|$ замкнуто (ибо подпредразбиение $K(e)$ конечно) и так как $\bar{e} \subset |K(e)|$, то пересечение $A \cap \bar{e} = (A \cap |K(e)|) \cap \bar{e}$ замкнуто. Поэтому подмножество A также замкнуто.

Отсюда вытекает, что, в отличие от случая произвольных предразбиений,

тело $|L|$ каждого подпредразбиения L разбиения K замкнуто в пространстве $X = |K|$.

Действительно, для любого конечного подпредразбиения $N \subset K$ пересечение $L \cap N$ также конечно и потому пересечение $|L| \cap |N| = |L \cap N|$ замкнуто.

Пусть теперь A — произвольное подмножество пространства $|L|$, обладающее тем свойством, что для любого конечного подпредразбиения $N \subset L$ пересечение $A \cap |N|$ замкнуто (в $|L|$, а потому, согласно доказанному, и в X). Тогда для любого конечного подпредразбиения $N \subset K$ пересечение

$$A \cap |N| = A \cap |L \cap N|$$

также замкнуто, и, следовательно, множество A замкнуто (в X , а потому и в $|L|$). Тем самым доказано, что топология пространства $|L|$ является по отношению к предразбиению L слабой топологией. Так как предразбиение L , кроме того, конечно конечно (будучи подпредразбиением конечно конечного разбиения K), то это предразбиение является, как выше и утверждалось, разбиением.

В дальнейшем подпредразбиения L произвольного клеточного разбиения K мы будем называть его *подразбиениями*.

При изучении свойств клеточных разбиений полезно иметь в виду, что

для любого компактного подмножества C пространства X и любого клеточного разбиения K пространства X подразбиение $K(C)$ конечно.

Для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что подмножество C пересекается лишь с конечным числом клеток $e \in K$, ибо тогда оно будет содержаться в конечном подразбиении, являющемся объединением подразбиений $K(e)$, для которых $e \cap C \neq \emptyset$.

Пусть существует бесконечная система $\{e_i\}$ различных клеток $e_i \in K$, для которых $e_i \cap C \neq \emptyset$ при каждом i , и пусть $x_i \in e_i \cap C$. Рассмотрим произвольное конечное подразбиение L разбиения K . В нем содержится лишь конечное число клеток e_i , причем $e_i \cap |L| = \emptyset$, если $e_i \notin L$. Поэтому подпространство $|L|$ содержит лишь конечное число точек x_i , так что пересечение $\{x_i\} \cap |L|$ замкнуто. Следовательно, множество $\{x_i\}$ замкнуто. По аналогичным соображениям любое подмножество множества $\{x_i\}$ также замкнуто, так что множество $\{x_i\}$ дискретно. Но это невозможно, так как любое дискретное подмножество компактного множества необходимо

конечно. Следовательно, множество C пересекается на самом деле лишь с конечным числом клеток разбиения K .

Из доказанного утверждения легко, например, следует, что *любое предразбиение K , для которого при каждом $n = 0, 1, \dots, \infty$ топология пространства $|K^n|$ является по отношению к предразбиению K^n слабой топологией, представляет собой разбиение.*

Действительно, поскольку $K = K^\infty$, нам нужно только доказать, что предразбиение K точечно конечно, для чего в свою очередь достаточно доказать, что для любого конечного n точечно конечно предразбиение K^n (ибо если $\dim e = n$, то $K(e) = K^n(e)$). Мы докажем это индукцией по n , учитывая, что предразбиение K^0 очевидным образом точечно конечно.

Пусть для некоторого $n > 0$ уже доказано, что предразбиение K^{n-1} точечно конечно. Так как, по условию, топология пространства $|K^{n-1}|$ является по отношению к этому предразбиению слабой топологией, то предразбиение K^{n-1} является разбиением, и потому, согласно только что доказанному утверждению, для любого компактного подмножества $C \subset |K^{n-1}|$ подпредразбиение $K^{n-1}(C) = K(C)$ конечно. В частности, для любой n -мерной клетки $e^n \in K$ конечно подпредразбиение $K(\dot{e}^{n-1})$. Но, как мы знаем, $K(e^n) = \{K(\dot{e}^n), e^n\}$. Поэтому подпредразбиение $K(e^n)$ также конечно.

При изучении клеточных разбиений важную роль играет также тот факт, что

для любой возрастающей последовательности

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$$

подразбиений разбиения K , объединением которой является все разбиение K , пространство $X = |K|$ представляет собой свободное объединение подпространств

$$|K_0| \subset |K_1| \subset \dots \subset |K_n| \subset \dots$$

Мы должны показать, что всякое подмножество A пространства X , для которого при любом n пересечение $A \cap |K_n|$ замкнуто, само замкнуто. Поскольку пространство X является свободным объединением множеств $\bar{e}$, $e \in K$, для этого достаточно доказать, что для любой клетки $e \in K$ замкнуто

пересечение $A \cap \bar{e}$. Пусть n — такое число, что $e \in K_n$. Тогда

$$A \cap \bar{e} = (A \cap |K_n|) \cap \bar{e},$$

и, следовательно, это пересечение замкнуто.

В частности,

для любого разбиения K пространства X это пространство является свободным объединением подпространств

$$|K^0| \subset |K^1| \subset \dots \subset |K^n| \subset \dots$$

Заметим, что утверждение, обратное к доказанному выше предложению, также имеет место, т. е.

если клеточное предразбиение K пространства X является объединением возрастающей последовательности

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$$

подпредразбиений K_n , каждое из которых представляет собой клеточное разбиение (подпространства $|K_n|$), и если пространство X является свободным объединением подпространств

$$|K_0| \subset |K_1| \subset \dots \subset |K_n| \subset \dots,$$

то предразбиение K представляет собой разбиение.

Действительно, так как для любой клетки $e \in K_n$ имеет место равенство $K(e) = K_n(e)$, то предразбиение K конечно. Поэтому нам нужно лишь доказать, что топология пространства X является по отношению к предразбиению K слабой топологией. Пусть A — произвольное подмножество пространства X , для которого семейство $\{A \cap \bar{e}; e \in K\}$ состоит из замкнутых множеств. Так как

$$(A \cap |K_n|) \cap \bar{e} = A \cap \bar{e}$$

при $e \in K_n$ и так как топология пространства $|K_n|$ является по отношению к разбиению K_n слабой топологией, то для любого $n \geq 0$ множество $A \cap |K_n|$ замкнуто в $|K_n|$. Поэтому множество A замкнуто в X . Следовательно, топология пространства X действительно является по отношению к предразбиению K слабой топологией.

Наличие у пространства X клеточного разбиения K накладывает на топологию этого пространства довольно сильные ограничения. Например, ясно, что

любое пространство X , допускающее клеточное разбиение K , является каонным пространством.

Далее, поскольку замыкание $\bar{e}$ каждой клетки e произвольного клеточного разбиения K связно, любая компонента связности A пространства $X = |K|$ либо содержит такое замыкание целиком, $A \cap \bar{e} = \bar{e}$, либо с ним не пересекается, $A \cap \bar{e} = \emptyset$. Так как в обоих случаях пересечение $A \cap \bar{e}$ замкнуто и открыто в $\bar{e}$, компонента связности A замкнута и открыта в X . Это означает, что

любое пространство X , допускающее клеточное разбиение K , является топологической суммой своих компонент связности.

Кроме того, для каждой компоненты связности $A \subset X$ совокупность L всех клеток $e \in K$, замыкания которых содержатся в A (т. е. для которых $A \cap \bar{e} = \bar{e}$), представляет собой подразбиение разбиения K , причем тело этого подразбиения совпадает с A : $|L| = A$.

Таким образом,

любая компонента связности A пространства X , допускающего клеточное разбиение K , служит телом $|L|$ некоторого подразбиения $L \subset K$.

С другой стороны, поскольку множества $\bar{e}$, $e \in K$, не только связны, но даже и линейно связны, компоненты линейной связности A пространства X также обладают тем свойством, что для любой клетки $e \in K$ либо $A \cap \bar{e} = \emptyset$, либо $A \cap \bar{e} = \bar{e}$, и потому каждая компонента линейной связности A одновременно замкнута и открыта в X . Следовательно,

каждое связное пространство X , допускающее клеточное разбиение K , линейно связно.

Далее, легко видеть, что

для каждого пространства X , допускающего клеточное разбиение K , любая его компонента связности является компонентой линейной связности, и, обратно, любая его компонента линейной связности является компонентой связности.

Действительно, любая компонента связности пространства X , будучи телом некоторого подразбиения разбиения K , линейно связна и потому является компонентой линейной связности. Обратно, так как любая компонента линейной связности

замкнута и одновременно открыта, то она совпадает с содержащей ее компонентой связности.

Поскольку каждая компонента связности пространства X , являясь телом некоторого подразбиения, содержит хотя бы одну вершину разбиения K и поскольку эта компонента линейно связна, то

любую точку пространства $X = |K|$ можно соединить путем хотя бы с одной из вершин разбиения.

Поэтому

пространство $X = |K|$ связно, если связно его подпространство $|K^1|$.

Оказывается, что обратное утверждение также верно, т. е. *если пространство $X = |K|$ связно, то его подпространство $|K^1|$ также связно.*

Действительно, пусть A — произвольная компонента связности пространства $|K^1|$. Как мы знаем, $A = |L|$, где L — некоторое подразбиение разбиения остова K^1 . Покажем, что существует такая последовательность $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n \subset \dots$ подразбиений $L_n \subset K^n$, что

1) $L_1 = L$;

2) $(L_{n+1})^n = L_n$;

3) для любой клетки $e \in K^n$ либо $\bar{e} \cap |L_n| = \emptyset$, либо $\bar{e} \cap |L_n| = \bar{e}$.

Пусть для некоторого $n > 0$ подразбиение L_n уже построено. Из условия 3) немедленно следует, что тело $|L_n|$ этого подразбиения замкнуто и одновременно открыто в пространстве $|K^n|$. Следовательно, для любой $n+1$ -мерной клетки $e^{n+1} \in K$ либо $\dot{e}^{n+1} \cap |L_n| = \emptyset$, либо $\dot{e}^{n+1} \cap |L_n| = \dot{e}^{n+1}$ (напомним, что множество $\dot{e}^{n+1}$ связно). Поэтому совокупность L_{n+1} всех клеток $e \in K^{n+1}$, для которых $\bar{e} \cap |L_n| \neq \emptyset$, является подразбиением разбиения K^{n+1} . Ясно, что это подразбиение удовлетворяет условиям 1) — 3).

Рассмотрим теперь подразбиение

$$L_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

разбиения K . Ясно, что его тело $|L_\infty| \subset X$ обладает тем свойством, что для любой клетки $e \in K$ либо $\bar{e} \cap |L_\infty| = \emptyset$, либо $\bar{e} \cap |L_\infty| = \bar{e}$. Поэтому подпространство $|L_\infty|$ замкнуто и одновременно открыто в X . Следовательно, $|L_\infty| = X$, т. е.

$L_\infty = K$. Но ясно, что $(L_\infty)^1 = L_1 = L$. Поэтому $L = K^1$ и, значит, $A = |L| = |K^1|$. Следовательно, подпространство $|K^1|$ пространства X связно.

Поскольку $(K^n)^1 = K^1$ для любого $n \geq 1$, из последних двух утверждений немедленно вытекает, что

если пространство $X = |K|$ связно, то для любого $n \geq 1$ его подпространство $|K^n|$ также связно; если хотя бы для одного $n \geq 1$ подпространство $|K^n|$ связно, то все пространство X также связно.

Что же касается подпространства $|K^0|$ то, как легко видеть, для любого клеточного разбиения K пространства X подпространство $|K^0|$ дискретно.

Поэтому подпространство $|K^0|$ тогда и только тогда связно, когда разбиение K содержит лишь одну нульмерную клетку (такие разбиения называются *одновершинными*).

Соглашение о терминологии

В дальнейшем ради сокращения формулировок мы не будем различать клеточные разбиения K и отвечающие им пространства $|K|$. В соответствии с этим мы будем допускать такие обороты речи, как «связное клеточное разбиение K », «непрерывное отображение разбиения K в разбиение L » и т. п., понимая под ними, соответственно, «клеточное разбиение K , для которого пространство $|K|$ связно», «непрерывное отображение пространства $|K|$ в пространство $|L|$ » и т. д. В частности, формула $e \in K$ будет, как и выше, означать, что клетка e принадлежит клеточному разбиению K , а формула $e \subset K$, — что клетка e лежит в пространстве $|K|$.

В тех случаях, когда это соглашение может привести к недоразумениям, мы будем, естественно, по-прежнему различать разбиения K и пространства $|K|$. При этом пространства вида $|K|$, т. е. пространства, допускающие клеточные разбиения, мы будем называть *клеточными полиэдрами*.

3. Теорема о паракомпактности

В этом пункте мы докажем, что любое клеточное разбиение (т. е. пространство $|K|$; см. соглашение о терминологии в конце предыдущего пункта) паракомпактно, т. е. что в любое его открытое покрытие Γ можно вписать локально

конечное покрытие Δ . Конструкцию покрытия Δ мы произведем, «поднимаясь» шаг за шагом по остовам K^n разбиения K . Для описания этого построения нам удобно ввести следующее общее определение:

Пусть $X \subset Y$ и пусть $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, $\{V_\beta; \beta \in B\}$ — некоторые семейства открытых множеств пространств X и Y соответственно. Семейство $\{V_\beta; \beta \in B\}$ мы будем называть *распространением* семейства $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, если $A \subset B$ и

$$U_\alpha = V_\alpha \cap X$$

для любого $\alpha \in A$.

Для того чтобы построить открытое покрытие Δ разбиения K , достаточно, очевидно, построить последовательность открытых покрытий

$$\Delta^n = \{V_\beta^n; \beta \in B^n\}$$

остовов K^n , обладающую тем свойством, что для любого $n > 0$ покрытие Δ^n является распространением покрытия Δ^{n-1} . Действительно, тогда семейство Δ множеств

$$V_\beta = \bigcup_n V_\beta^n,$$

где суммирование распространено на все n , для которых $\beta \in B^n$, будет, как легко видеть, открытым покрытием разбиения K (с множеством индексов B , являющимся объединением множеств $B^0 \subset B^1 \subset \dots \subset B^n \subset \dots$).

Чтобы это покрытие было вписано в данное покрытие

$$\Gamma = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$$

разбиения K , нужно обеспечить, чтобы существовало такое отображение α

$$\alpha: B \rightarrow A,$$

что для любого $n > 0$ имеет место включение

$$V_\beta^n \subset U_{\alpha(\beta)} \cap K^n.$$

Для проведения доказательства нам удобнее будет потребовать большего, а именно, чтобы имело место включение

$$\bar{V}_\beta^n \subset U_{\alpha(\beta)} \cap K^n.$$

Рассмотрим теперь вопрос об условиях, обеспечивающих локальную конечность покрытия

$$\Delta = \{V_\beta; \beta \in B\}.$$

Пусть x — произвольная точка пространства K . Чтобы построить некоторую окрестность точки x в пространстве K , достаточно для любого n , для которого $x \in K^n$, задать в пространстве K^n окрестность W_x^n точки x , обладающую тем свойством, что при $x \in K^{n-1}$

$$W_x^n \cap K^{n-1} = W_x^{n-1}.$$

Действительно, тогда формула

$$W_x = \bigcup_n W_x^n$$

(суммирование распространено на все n , для которых $x \in K^n$) определит нам некоторую окрестность точки x во всем пространстве K . Этим способом можно, очевидно, получить любую окрестность W_x (достаточно положить $W_x^n = W_x \cap K^n$).

Заметим, что при $W_x \cap V_\beta \neq \emptyset$ существует такое число $n \geq 0$, что $x \in K^n$ и

$$W_x^n \cap V_\beta^n \neq \emptyset.$$

Предположим теперь, что окрестности W_x^n обладают следующими двумя свойствами:

i) пересечение $W_x^n \cap V_\beta^n$ при $x \in K^m$, где $m \leq n$, тогда и только тогда непусто, когда $\beta \in B^m$ и непусто пересечение $W_x^m \cap V_\beta^m$;

ii) при $x \in K^n \setminus K^{n-1}$ пересечение $W_x^n \cap V_\beta^n$ непусто лишь для конечного числа индексов β .

Из только что сказанного непосредственно вытекает, что при выполнении условий i) и ii) пересечение $W_x \cap V_\beta$ будет непустым лишь для конечного числа индексов β . Иными словами, существование окрестностей W_x^n , удовлетворяющих условиям i) и ii), обеспечивает локальную конечность покрытия Δ .

Резюмируя все сказанное, мы видим, что для построения локально конечного открытого покрытия Δ , вписанного в данное открытое покрытие Γ , достаточно построить

а) последовательность открытых покрытий $\Delta^n = \{V_\beta^n; \beta \in B^n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, каждое из которых является распространением предыдущего покрытия;

б) отображение

$$\alpha: B \rightarrow A,$$

где $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n$, обладающее тем свойством, что для любого $n \geq 0$ и любого $\beta \in B^n$ имеет место включение

$$\bar{V}_\beta^n \subset U_{\alpha(\beta)} \cap K^n;$$

с) для любого $n \geq 0$ и любой точки $x \in K^n$ окрестности W_x^n , обладающее указанными выше свойствами i) и ii).

Построение этих объектов мы проведем индукцией по числу n .

При $n = 0$ за множество B^0 мы примем 0-й остов K^0 разбиения K . Отображение α на множестве B^0 мы определим, выбрав для каждой точки $\beta \in B^0 = K^0$ содержащий ее элемент покрытия Γ и приняв за $\alpha(\beta)$ индекс этого элемента. За множество V_β^0 , соответствующее точке $\beta \in B^0$, мы примем саму эту точку. Аналогично за множество W_x^0 , соответствующее точке $x \in K^0$, мы также примем саму эту точку. Поскольку пространство K^0 дискретно, легко видеть, что все наши условия выполнены.

Пусть для некоторого $n \geq 0$ уже построены множество B^n , отображение α этого множества в множество A , открытые множества $V_\beta^n \subset K^n$ и окрестности $W_x^n \subset K^n$, $x \in K^n$, удовлетворяющие условиям а), б), с).

В тривиальном случае $K^{n+1} = K^n$ мы положим

$$B^{n+1} = B^n, \quad V_\beta^{n+1} = V_\beta^n, \quad W_x^{n+1} = W_x^n.$$

Ясно, что построенные таким образом множества индексов B^{n+1} , открытые множества V_β^{n+1} и окрестности W_x^{n+1} по-прежнему удовлетворяют условиям а), б), с).

Таким образом, нам нужно рассмотреть лишь случай, когда $K^{n+1} \neq K^n$, т. е. когда разбиение K содержит $n+1$ -мерные клетки e^{n+1} . Для каждой такой клетки мы, выбрав некоторое характеристическое отображение

$$\chi: E^{n+1} \rightarrow X,$$

положим

$$\begin{aligned} U'_\alpha &= \chi^{-1}(U_\alpha) = \chi^{-1}(U_\alpha \cap \bar{e}^{n+1}), & \alpha \in A, \\ V'_\beta &= \chi^{-1}(V_\beta^n) = \chi^{-1}(V_\beta^n \cap \dot{e}^{n+1}), & \beta \in B^n. \end{aligned}$$

Множества U'_α (многие из этих множеств, вообще говоря пусты) составляют открытое покрытие Γ' шара E^{n+1} , а множества V'_β (среди которых также могут быть пустые множества) — открытое покрытие его граничной сферы S^n . При этом ввиду условия b) для любого элемента $\beta \in B^n$ имеет место включение

$$\overline{V'_\beta} \subset U'_{\alpha(\beta)} \cap S^n$$

(откуда, в частности, следует, что покрытие $\{V'_\beta\}$ вписано в покрытие $\Gamma' \cap S^n = \{U'_\alpha \cap S^n; \alpha \in A\}$). Кроме того, ввиду условия c) (в силу которого покрытие $\Delta^n = \{V_\beta^n; \beta \in B^n\}$ пространства K^n локально конечно) покрытие $\{V'_\beta; \beta \in B^n\}$ сферы S^n локально конечно. (Впрочем, легко по индукции видеть, что на самом деле лишь конечное число элементов этого покрытия не пусто.)

Далее, для каждой точки $x \in K^n$ мы положим

$$W'_x = \chi^{-1}(W_x^n) = \chi^{-1}(W_x^n \cap \dot{e}^{n+1}).$$

Ясно, что (возможно пустые) множества W'_x открыты в сфере S^n и обладают тем свойством, что для каждой точки x существует лишь конечное число индексов β , для которых $W'_x \cap V'_\beta \neq \emptyset$.

Для любого множества $G \subset S^n$ и любого положительного $\varepsilon < 1$ мы будем символом G_ε обозначать «радиальное продолжение на ε » множества G внутрь шара, т. е. подмножество шара E^{n+1} , состоящее из всех точек $v = vu \in E^{n+1}$, $0 \leq v \leq 1$, $|u| = 1$, для которых

$$1 - \varepsilon < v \leq 1, \quad u \in G.$$

Ясно, что если G открыто в сфере S^n , то множество G_ε открыто в шаре E^{n+1} .

Множества G_ε обладают тем свойством, что $G_\varepsilon \cap S^n = G$. При этом для любого $\varepsilon' < \varepsilon$ имеет место включение

$$G_{\varepsilon'} \subset G_\varepsilon.$$

Кроме того, для любых множеств $G, H \subset S^n$ и любых положительных $\varepsilon < 1$ и $\eta < 1$ пересечение $G_\varepsilon \cap H_\eta$ их «радиаль-

ных продолжений» не пусто тогда и только тогда, когда не пусто пересечение $G \cap H$ самих множеств. В частности, множество G_ε не пусто тогда и только тогда, когда не пусто множество G .

Выбрав теперь для любого элемента $\beta \in B^n$ некоторое положительное число $\varepsilon_\beta < 1$, мы положим

$$V_\beta^* = (V'_\beta)_{\varepsilon_\beta}.$$

Так как $\bar{V}'_\beta \subset U'_{\alpha(\beta)} \cap S^n$, то при достаточно малых ε_β имеет место включение

$$V_\beta^* \subset U'_{\alpha(\beta)}$$

(и даже включение $\bar{V}_n^* \subset U'_{\alpha_0(\beta)}$), так что все множества V_β^* , $\beta \in B^n$, составляют открытое (и, очевидно, локально конечное) покрытие «примыкающего» к сфере S^n множества

$$V^* = \bigcup_{\beta \in B^n} V_\beta^*,$$

вписанное в покрытие $\Gamma' \cap V^* = \{U'_\alpha \cap V^*\}$.

Так как множество $E^{n+1} \setminus V^*$ замкнуто в шаре E^{n+1} , то оно компактно, и потому его можно покрыть конечным числом непустых множеств покрытия Γ' . Пусть $U'_{\alpha_1}, \dots, U'_{\alpha_s}$ — эти множества. Поскольку V^* открыто и содержит сферу S^n , то в открытое покрытие $\{U'_{\alpha_1}, \dots, U'_{\alpha_s}\}$ множества $E^{n+1} \setminus V^*$ можно вписать такое открытое покрытие $\{T_1, \dots, T_s\}$, что

$$\bar{T}_i \subset U'_{\alpha_i}, \quad \bar{T}_i \cap S^n = \emptyset.$$

Для единообразия обозначений мы вместо T_i будем писать $V_{\alpha_i}^*$. Здесь верхний значок *, в отличие от предыдущего, конечно, не означает, что $V_{\alpha_i}^*$ получено радиальным продолжением. Кроме того, это обозначение предполагает, что множества B^n и A не пересекаются; ясно, что последнее предположение общности не ограничивает. Очевидно, что множества V_β^* , $\beta \in B^n$, и $V_{\alpha_i}^*$, $i = 1, \dots, s$, составляют открытое локально конечное (по существу, даже конечное) покрытие Δ^* шара E^{n+1} , вписанное в покрытие Γ' .

Так как множество $\bigcup_{i=1}^s \bar{V}_{\alpha_i}^*$ замкнуто и не пересекается со сферой S^n , то для любой точки $x \in K^n$ существует такое

положительное $\varepsilon'_x < 1$, что множество

$$W_x^* = (W'_x)_{\varepsilon'_x}$$

не пересекается с множеством $\bigcup_{i=1}^s \overline{V}_{\alpha_i}^*$. Множества W_x^* открыты в шаре E^{n+1} и обладают тем свойством, что

$$W_x^* \cap S^n = W'_x.$$

Кроме того, каждое из множеств W_x^* пересекается лишь с конечным числом множеств покрытия Δ^* .

Пусть v — произвольная внутренняя точка шара E^{n+1} . Так как покрытие Δ^* локально конечно, то эта точка обладает окрестностями, целиком состоящими из внутренних точек шара E^{n+1} и пересекающимися лишь с конечным числом множеств этого покрытия. Выбрав одну из таких окрестностей, мы обозначим ее символом W_x^* , где $x \in e^{n+1}$ — образ точки v при характеристическом отображении χ . Здесь значок $*$ вновь не означает радиального продолжения, а введен лишь для единообразия обозначений.

Все построенные объекты нам придется рассматривать ниже для всех клеток $e^{n+1} \in K$ одновременно. В связи с этим мы во все обозначения введем дополнительный индекс e^{n+1} . Таким образом, мы будем рассматривать отображения $\chi_{e^{n+1}}$, числа $s_{e^{n+1}}$, индексы $\alpha_{i, e^{n+1}}$, множества $V_{\beta, e^{n+1}}^*$ и т. п.

Теперь у нас уже все готово для построения нужных нам объектов при $n+1$. Множество B^{n+1} мы получим, добавив к множеству B^n всевозможные пары вида (i, e^{n+1}) , где $e^{n+1} \in K$, $i = 1, \dots, s_{e^{n+1}}$. Отображение α на множестве B^{n+1} мы определим формулой

$$\alpha(\beta) = \begin{cases} \alpha(\beta), & \text{если } \beta \in B^n, \\ \alpha_{i, e^{n+1}}, & \text{если } \beta = (i, e^{n+1}), \end{cases}$$

множества $V_{\beta}^{n+1} \subset K^{n+1}$, $\beta \in B^{n+1}$, — формулой

$$V_{\beta}^{n+1} = \begin{cases} V_{\beta}^n \cup \bigcup_{e^{n+1} \in K} \chi_{e^{n+1}}(V_{\beta, e^{n+1}}^*), & \text{если } \beta \in B^n, \\ \chi_{e^{n+1}}(V_{\alpha_{i, e^{n+1}}}), & \text{если } \beta = (i, e^{n+1}), \end{cases}$$

и, наконец, окрестности W_x^{n+1} , $x \in K^{n+1}$, — формулой

$$W_x^{n+1} = \begin{cases} W_x^n \cup \bigcup_{e^{n+1} \in K} \chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^*), & \text{если } x \in K^n, \\ \chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^{n+1}), & \text{если } x \in e^{n+1}. \end{cases}$$

Так как для любой клетки $e^{n+1} \in K$ характеристическое отображение

$$\chi_{e^{n+1}} : E^{n+1} \rightarrow X$$

гомеоморфно на открытом шаре $E^{n+1} = E^{n+1} \setminus S^n$, а $V_{\alpha_i, e^{n+1}}^* \subset E^{n+1}$ для каждого $i = 1, \dots, s_{e^{n+1}}$, то для любого $\beta = (i, e^{n+1})$ множество $V_\beta^{n+1} = \chi_{e^{n+1}} (V_{\alpha_i, e^{n+1}}^*)$ открыто в $\bar{e}^{n+1}$.

Следовательно, это множество открыто и в K^{n+1} , потому что для любой клетки $e \in K^{n+1}$, отличной от клетки e^{n+1} , пересечение $V_\beta^{n+1} \cap \bar{e}$, очевидно, пусто (и, значит, открыто в $\bar{e}$).

Далее, так как для любого $\beta \in B^n$ и любой клетки $e^{n+1} \in K$ имеет место равенство

$$V_{\beta, e^{n+1}}^* \cap S^n = V_{\beta, e}^{n+1} = \chi_{e^{n+1}}^{-1} (V_\beta^n),$$

то множество $V_{\beta, e^{n+1}}^*$ насыщенно по отношению к отображению $\chi_{e^{n+1}}$ (рассматриваемому как отображение шара E^{n+1} на замыкание $\bar{e}^{n+1}$ клетки e^{n+1}) и потому множество $\chi_{e^{n+1}} (V_{\beta, e^{n+1}}^*)$ открыто в $\bar{e}^{n+1}$. С другой стороны, для любой клетки $e \in K^{n+1}$ либо $V_\beta^{n+1} \cap \bar{e} = V_\beta^n \cap \bar{e}$ (если $\dim e \leq n$), либо $V_\beta^{n+1} \cap \bar{e} = \chi_{e^{n+1}} (V_{\beta, e^{n+1}}^*)$ (если $e = e^{n+1}$). Поскольку в обоих случаях пересечение $V_\beta^{n+1} \cap \bar{e}$ открыто в $\bar{e}$, тем самым доказано, что множество V_β^{n+1} открыто в пространстве K^{n+1} и при $\beta \in B^n$.

Аналогично доказывается, что все множества вида W_x^{n+1} также открыты в пространстве K^{n+1} .

Проверим теперь для этих множеств условия i) и ii). В первую очередь мы рассмотрим условие ii).

Пусть $x \in K^{n+1} \setminus K^n$ и $\beta \in B^{n+1}$. Рассмотрим клетку e^{n+1} разбиения K , содержащую точку x . По определению,

$$W_x^{n+1} = \chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^*),$$

и потому пересечение $W_x^{n+1} \cap V_\beta^{n+1}$ может быть не пусто, лишь когда $\beta \in B^n$ или когда $\beta = (i, e^{n+1})$, где $i = 1, \dots, s_{e^{n+1}}$. Так как число индексов β , имеющих вид (i, e^{n+1}) , конечно, то достаточно доказать, что число тех $\beta \in B^n$, для которых это пересечение не пусто, также конечно. Но ясно, что при $\beta \in B^n$

$$W_x^{n+1} \cap V_\beta^{n+1} = \chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^* \cap V_{\beta, e^{n+1}}^*),$$

и потому, согласно выбору множества $W_{x, e^{n+1}}^*$, пересечение $W_x^{n+1} \cap V_\beta^{n+1}$ не пусто лишь для конечного числа индексов $\beta \in B^n$.

Проверим теперь условие i). Пусть $m < n + 1$, $\beta \in B^{n+1}$ и $x \in K^m$. Так как $m < n + 1$, то

$$W_x^{n+1} = W_x^n \cup \bigcup_{e^{n+1} \in K} \chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^*).$$

Поэтому если $\beta = (i, e^{n+1})$, то

$$W_x^{n+1} \cap V_\beta^{n+1} = \chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^* \cap V_{\alpha_{i, e^{n+1}}}^*) = \emptyset.$$

Если же $\beta \in B^n$, то ввиду включений

$$\chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^*) \cap K^n \subset W_x^n,$$

$$\chi_{e^{n+1}} (V_{\beta, e^{n+1}}^*) \cap K^n \subset V_\beta^n$$

будет иметь место равенство

$$W_x^{n+1} \cap V_\beta^{n+1} = (W_x^n \cap V_\beta^n) \cup \bigcup_{e^{n+1} \in K} \chi_{e^{n+1}} (W_{x, e^{n+1}}^* \cap V_{\beta, e^{n+1}}^*).$$

Пусть для некоторой клетки $e^{n+1} \in K$ пересечение

$$W_{x, e^{n+1}}^* \cap V_{\beta, e^{n+1}}^*$$

непусто. Тогда непусто пересечение

$$W'_{x, e^{n+1}} \cap V'_{\beta, e^{n+1}} = \chi_{e^{n+1}}^{-1} (W_x^n \cap V_\beta^n),$$

а потому и пересечение

$$W_x^n \cap V_\beta^n.$$

Отсюда вытекает, что пересечение $W_x^{n+1} \cap V_\beta^{n+1}$, $\beta \in B^n$, не пусто тогда и только тогда, когда непусто пересечение $W_x^n \cap V_\beta^n$, т. е. в силу предположения индукции, когда $\beta \in B^m$ и непусто пересечение $W_x^m \cap V_\beta^m$.

Таким образом, построение покрытий Δ^n и окрестностей W_x^n по индукции осуществлено для всех n . Согласно сказанному выше, тем самым доказано, что

в любое открытое покрытие Γ клеточного разбиения K можно вписать локально конечное открытое покрытие Δ .

Другими словами, мы доказали, что
любое клеточное разбиение K является паракомпактным пространством.

Поскольку пространство K , по условию, хаусдорфово, из этого утверждения непосредственно следует, что
любое клеточное разбиение K является нормальным (и даже устойчиво нормальным) пространством.

Рассмотрим теперь характеристическое отображение $\chi_{K \times L}: P_{K \times L} \rightarrow K \times L$ для предразбиения $K \times L$, являющегося произведением двух клеточных разбиений K и L . По только что доказанному пространства K и L регулярны. Кроме того, как мы знаем, если разбиение K локально конечно (локально счетно), то характеристическое отображение $\chi_K: P_K \rightarrow K$ локально компактно (локально счетно). С другой стороны, как было замечено в конце п. 1, мы можем считать, что $P_{K \times L} = P_K \times P_L$ и $\chi_{K \times L} = \chi_K \times \chi_L$. Следовательно, в силу доказанной в п. 5 гл. 1 теоремы, отображение $\chi_{K \times L}$ является отображением отождествления, если хотя бы одно из разбиений K и L локально конечно или если оба эти разбиения локально счетны. Поскольку предразбиение $K \times L$ очевидным образом точечно конечно, тем самым доказано, что

произведение $K \times L$ клеточных разбиений K и L является клеточным разбиением, если хотя бы одно из разбиений K и L локально конечно или если оба эти разбиения локально счетны.

В частности,

для любого клеточного разбиения K произведение $K \times I$ является клеточным разбиением.

З а м е ч а н и е. Как показал Даукер, существуют клеточные разбиения K и L , произведение $K \times L$ которых клеточным разбиением не является.

4. Непрерывные отображения клеточных разбиений

Пусть K — произвольное клеточное разбиение и Y — произвольное топологическое пространство.

Так как разбиение K является свободным объединением множеств $\bar{e}$, $e \in K$, то

однозначное отображение

$$f: K \rightarrow Y$$

тогда и только тогда непрерывно, когда для любой клетки $e \in K$ непрерывно отображение

$$f|_{\bar{e}}: \bar{e} \rightarrow Y.$$

Аналогично, так как клеточное разбиение K является свободным объединением своих остовов K^n , то

отображение

$$f: K \rightarrow Y$$

тогда и только тогда непрерывно, когда для любого конечного $n \geq 0$ непрерывно отображение

$$f|_{K^n}: K^n \rightarrow Y.$$

В дальнейшем мы неоднократно будем строить отображения

$$f: K \rightarrow Y,$$

конструируя для любого $n \geq 0$ «согласованные» непрерывные отображения f^n , т. е. такие непрерывные отображения

$$f^n: K^n \rightarrow Y,$$

что

$$f^{n+1}|_{K^n} = f^n$$

при любом $n \geq 0$, и полагая для любой точки $x \in K$

$$f(x) = f^n(x), \quad \text{если } x \in K^n.$$

Согласно предыдущему утверждению,

так построенное отображение

$$f: K \rightarrow Y$$

непрерывно.

Все эти утверждения применимы, в частности, к разбиению $K \times I$ и к непрерывным отображениям $K \times I \rightarrow Y$, т. е. к гомотопиям $f_t: K \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$. Поскольку разбиение $K \times I$ является, очевидно, свободным объединением множеств $\bar{e} \times I$, мы получаем отсюда, что

семейство отображений

$$f_t: K \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

тогда и только тогда является гомотопией, когда для любой клетки $e \in K$ гомотопией является семейство

$$f_t|_{\bar{e}}: \bar{e} \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

а также тогда и только тогда, когда для любого $n \geq 0$ гомотопией является семейство

$$f_t|_{K^n}: K^n \rightarrow Y.$$

Кроме того,

если для всех $n \geq 0$ нам заданы «согласованные» гомотопии остовов, т. е. такие гомотопии

$$f_t^n: K^n \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

что

$$f_t^{n+1}|_{K^n} = f_t^n, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

при любом $n \geq 0$, то, положив для каждой точки $x \in K$ и любого $t \in I$

$$f_t(x) = f_t^n(x), \quad \text{если } x \in K^n,$$

мы получим некоторую гомотопию

$$f_t: K \rightarrow Y, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Иногда мы будем рассматривать не последовательность $K^0, K^1, \dots, K^n, \dots$ остовов, а произвольную возрастающую последовательность

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$$

подразбиений разбиения K , объединением которых является все разбиение K . Так как разбиение K представляет собой свободное объединение любой такой последовательности, то

все доказанные выше утверждения остаются справедливыми и при замене последовательности остовов

произвольной возрастающей последовательностью подразбиений разбиения K , объединением которой является все это разбиение.

С другой стороны, так как любое замкнутое (или открытое) подпространство X разбиения K является свободным объединением множеств $X \cap \bar{e}$, $e \in K$, то все сказанное выше справедливо (с очевидными изменениями) и для любого такого пространства. Так, например,

отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

тогда и только тогда непрерывно, когда для любой клетки $e \in K$ непрерывно отображение

$$f|_{X \cap \bar{e}}: X \cap \bar{e} \rightarrow Y,$$

а также тогда и только тогда, когда для любого $n \geq 0$ непрерывно отображение

$$f|_{X \cap K^n}: X \cap K^n \rightarrow Y.$$

Пару (K, L) , состоящую из клеточного разбиения K и произвольного его подразбиения L , мы будем называть *клеточной парой*. Используя сделанные выше замечания, легко можно доказать, что свойство распространяемости отображений сфер, лежащее в основе определения m -связных пространств (см. п. 1 гл. 2), имеет место для любых клеточных пар (K, L) , для которых $\dim(K \setminus L) \leq m + 1$, т. е. для которых $\dim e \leq m + 1$ для каждой клетки $e \in K \setminus L$. Именно,

если $\dim(K \setminus L) \leq m + 1$, то любое отображение $f: L \rightarrow Y$ подразбиения L в m -связное ($m \geq 0$) пространство Y может быть распространено до некоторого отображения $g: K \rightarrow Y$.

Действительно, пусть

$$K_n = K^n \cup L, \quad n \geq 0.$$

Для любого $n = 0, 1, \dots, m + 1$ мы построим такое непрерывное отображение

$$g_n: K_n \rightarrow Y,$$

что $g_n|_L = f$, $g_{n+1}|_{K_n} = g_n$. Тогда отображение g_{m+1}

и будет искомым отображением g (ибо, согласно условию, $K_{m+1} = K$).

Отображение g_0 мы построим, произвольно определив его на вершинах разбиения K , не принадлежащих подразбиению L (на L оно, разумеется, должно совпадать с f). Ясно, что это отображение непрерывно.

Пусть для некоторого неотрицательного $n \leq m$ отображение g_n уже построено. Если $K_{n+1} = K_n$, то мы положим $g_{n+1} = g_n$. Пусть $K_{n+1} \neq K_n$ и пусть e^{n+1} — произвольная $n+1$ -мерная клетка разбиения K , не принадлежащая подразбиению L . Выбрав для каждой такой клетки некоторое характеристическое отображение

$$\chi_{e^{n+1}} : E^{n+1} \rightarrow K,$$

рассмотрим композицию

$$g_n \circ \chi_{e^{n+1}} | S^n : S^n \rightarrow Y,$$

ограничения $\chi_{e^{n+1}} | S^n$ отображения $\chi_{e^{n+1}}$ на сфере S^n и отображения g_n . Так как пространство Y , по условию, m -связно, а $n \leq m$, мы можем распространить эту композицию до некоторого отображения

$$\xi_{e^{n+1}} : E^{n+1} \rightarrow Y.$$

Для любой точки $x \in K_{n+1}$ мы теперь положим

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{если } x \in K_n, \\ \xi_{e^{n+1}}(\chi_{e^{n+1}}^{-1}(x)), & \text{если } x \notin K_n, \end{cases}$$

где e^{n+1} — клетка разбиения K , содержащая точку x . Ясно, что тем самым мы получим однозначное непрерывное отображение

$$g_{n+1} : K_{n+1} \rightarrow Y,$$

обладающее всеми требуемыми свойствами.

Покажем теперь, что

любая клеточная пара (K, L) удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии.

Действительно, пусть Y — произвольное пространство, $f : K \rightarrow Y$ — произвольное отображение и $g_t : L \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, — такая гомотопия, что $g_0 = f|_L$. Мы должны построить

гомотопию $f_t: K \rightarrow Y$, для которой $f_0 = f$ и $f_t|_L = g_t$ при любом $t \in I$. Пусть $K_n = K^n \cup L$. Согласно сказанному выше, для построения гомотопии f_t достаточно построить для любого $n \geq 0$ такую гомотопию

$$f_t^n: K_n \rightarrow Y,$$

что

$$f_0^n = f|_{K_n}, \quad f_t^n|_L = g_t \quad \text{и} \quad f_t^{n+1}|_{K_n} = f_t^n.$$

Для любой точки $x \in K_0$ мы определим гомотопию f_t^0 формулой

$$f_t^0(x) = \begin{cases} g_t(x), & \text{если } x \in L, \\ f(x), & \text{если } x \in K^0. \end{cases}$$

Ясно, что эта формула действительно определяет гомотопию, для которой $f_0^0 = f|_{K_0}$ и $f_t^0|_L = g_t$ при любом $t \in I$.

Пусть для некоторого $n \geq 0$ гомотопия f_t^n уже построена. Если $K_{n+1} = K_n$, то мы положим $f_t^{n+1} = f_t^n$, $0 \leq t \leq 1$. Пусть $K_{n+1} \neq K_n$ и пусть e^{n+1} — произвольная $n+1$ -мерная клетка разбиения K , не принадлежащая подразбиению L . Выбрав для каждой такой клетки e^{n+1} характеристическое отображение

$$\chi_{e^{n+1}}: E^{n+1} \rightarrow K,$$

мы для каждой точки $x = \chi_{e^{n+1}}(vu)$, $0 \leq v \leq 1$, $|u| = 1$, множества $\bar{e}^{n+1}$ и любого числа $t \in I$ положим

$$g_{e^{n+1}, t}(x) = \begin{cases} f\left(\chi_{e^{n+1}}\left(\frac{2v}{2-t}u\right)\right), & \text{если } 0 \leq v \leq \frac{2-t}{2}, \\ f_{2v+t-2}^n(\chi_{e^{n+1}}(u)), & \text{если } \frac{2-t}{2} \leq v \leq 1. \end{cases}$$

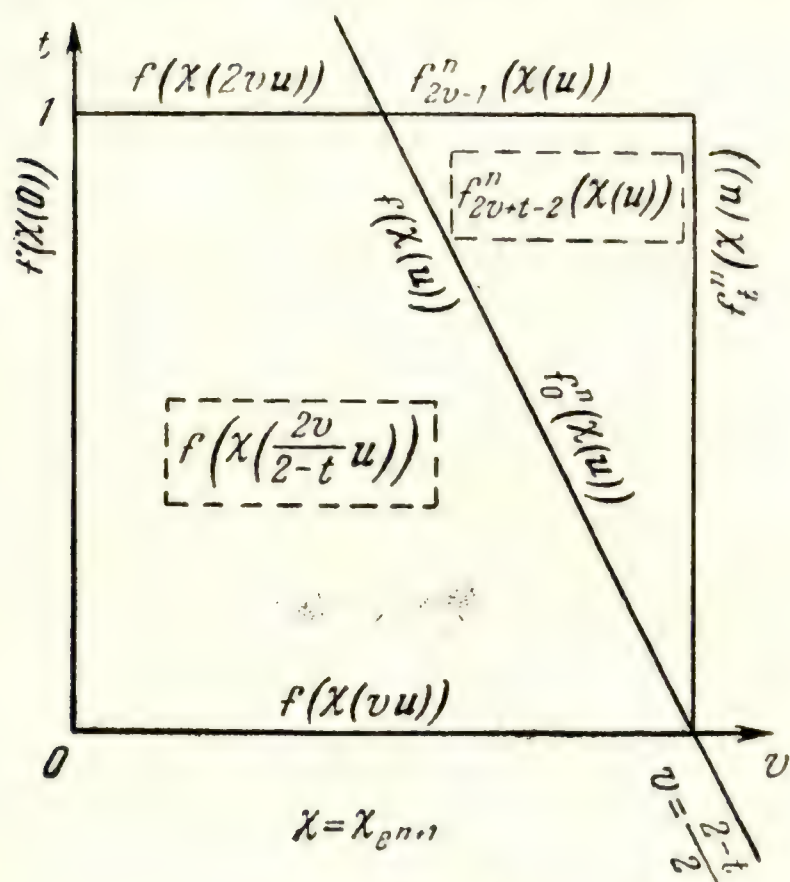


Рис. 6.

Легко видеть (рис. 6), что эта формула однозначно определяет некоторое отображение

$$g_{e^{n+1}, t} : \bar{e}^{n+1} \rightarrow Y$$

(зависящее от выбора отображения χ). При этом, так как семейство отображений

$$g_{e^{n+1}, t} \circ \chi_{e^{n+1}} : E^{n+1} \rightarrow Y$$

является, очевидно, гомотопией, то и семейство отображений $g_{e^{n+1}, t}$ также представляет собой гомотопию (ибо характеристическое отображение $\chi_{e^{n+1}}$, рассматриваемое как отображение $E^{n+1} \rightarrow \bar{e}^{n+1}$, является отображением отождествления, а отрезок I компактен, так что отображение $\chi_{e^{n+1}} \times 1 : E^{n+1} \times I \rightarrow \bar{e}^{n+1} \times I$ также является отображением отождествления). Эта гомотопия обладает тем свойством, что

$$g_{e^{n+1}, 0} = f|_{\bar{e}^{n+1}} \text{ и } g_{e^{n+1}, t}|_{\dot{e}^{n+1}} = f_t^n|_{\dot{e}^{n+1}}$$

для любого $t \in I$. Поэтому формула

$$f_t^{n+1}(x) = \begin{cases} f_t^n(x), & \text{если } x \in K_n, \\ g_{e^{n+1}, t}(x), & \text{если } x \in e^{n+1} \in K_{n+1} \setminus K_n, \end{cases}$$

определяет некоторую гомотопию $f_t^{n+1} : K_{n+1} \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, обладающую, очевидно, всеми требуемыми свойствами.

Таким образом, гомотопии f_t^n построены, по индукции, для всех $n \geq 0$. Сформулированное выше предложение тем самым полностью доказано.

З а м е ч а н и е. Частным случаем доказанного предложения является сформулированное в п. 4 гл. 2 утверждение, ибо все перечисленные в этом утверждении пары, как легко видеть, клеточны.

Мы видим, таким образом, что все результаты п. 3 гл. 2 применимы к произвольным клеточным парам (K, L) , ибо вместе с парой (K, L) клеточной является также и пара $(K \times I, I(K, L))$. Таким образом, во-первых,

для любой клеточной пары (K, L) , любого пространства Y и любых двух гомотопных отображений

$$f, g : L \rightarrow Y$$

пространства $K \cup_f Y$ и $K \cup_g Y$ гомотопически эквивалентны

причем соответствующую гомотопическую эквивалентность можно выбрать так, чтобы на K она являлась тождественным отображением,

и, во-вторых,

для любой клеточной пары (K, L) , любого пространства Y , любого непрерывного отображения

$$f: L \rightarrow Y$$

и любого пространства Z , гомотопически эквивалентного пространству Y , каждую гомотопическую эквивалентность

$$h: Y \rightarrow Z$$

можно распространить до некоторой гомотопической эквивалентности

$$H: K \cup_f Y \rightarrow K \cup_{h \circ f} Z.$$

Вообще говоря, пространство $K \cup_f Y$ не является клеточным разбиением даже в случае, когда и пространство Y представляет собой клеточное разбиение. Можно лишь утверждать, что

для любой клеточной пары (K, L) , любого клеточного разбиения Q и любого непрерывного отображения

$$f: L \rightarrow Q$$

пространство $K \cup_f Q$ гомотопически эквивалентно некоторому клеточному разбиению $\tilde{Q}$, содержащему разбиение Q в качестве своего подразбиения, причем гомотопическую эквивалентность $K \cup_f Q \rightarrow \tilde{Q}$ можно выбрать так, чтобы на Q она являлась тождественным отображением.

Для доказательства этого утверждения мы введем в рассмотрение непрерывные отображения

$$f: K \rightarrow Q$$

клеточного разбиения K в клеточное разбиение Q , обладающие тем свойством, что

$$f(K^n) \subset Q^n$$

для любого $n \geq 0$. Такие отображения клеточных разбиений мы будем называть *клеточными*. Сформулированное выше

утверждение будет, очевидно, доказано, если мы покажем, во-первых, что

любое непрерывное отображение $K \rightarrow Q$ гомотопно некоторому клеточному отображению $K \rightarrow Q$

и, во-вторых, что

для любой клеточной пары (K, L) , любого клеточного разбиения Q и любого клеточного отображения

$$f: L \rightarrow Q$$

пространство $K \cup_f Q$ является клеточным разбиением, содержащим разбиение Q в качестве подразбиения.

Рассмотрим сначала второе утверждение. Поскольку клеточные разбиения K и Q являются, как мы знаем, нормальными пространствами, то пространство $K \cup_f Q$ хаусдорфово (п. 6 гл. 1). Кроме того, поскольку на $K \setminus L$ и Q естественная проекция $\alpha: K \cup Q \rightarrow K \cup_f Q$ является гомеоморфизмом, то для любой клетки $e \in (K \setminus L) \cup Q$ (с характеристическим отображением χ) множество $\alpha(e)$ является клеткой пространства $K \cup_f Q$ (с характеристическим отображением $\alpha \circ \chi$). При этом ввиду того, что отображение f клеточно, все клетки $\alpha(e)$, $e \in (K \setminus L) \cup Q$ составляют клеточное подразбиение этого пространства.

Покажем, что это подразбиение точечно конечно, т. е. что любая его клетка $\alpha(e)$ принадлежит некоторому конечному подподразбиению. При $e \in Q$ это очевидно, ибо отображение $\alpha|_Q$ гомеоморфно, и потому образ $\alpha(Q(e))$ при отображении α подразбиения $Q(e)$ является конечным подподразбиением подразбиения $K \cup_f Q$, содержащим клетку $\alpha(e)$. Пусть $e \in K \setminus L$. Так как подразбиение $K(e) \cap L$ конечно, то оно компактно, и потому его образ $f(K(e) \cap L) \subset Q$ при отображении f содержится в некотором конечном подразбиении Q_e разбиения Q . Рассмотрим множество $\alpha(K(e) \cup Q_e)$. Оно, очевидно, компактно. Кроме того, оно является объединением клеток вида $\alpha(e)$, $e \in (K(e) \setminus L) \cup Q_e$. Поэтому это множество представляет собой конечное подподразбиение подразбиения $K \cup_f Q$, содержащее клетку $\alpha(e)$.

Таким образом, для доказательства рассматриваемого утверждения нам осталось лишь доказать, что топология пространства $K \cup_f Q$ является слабой топологией. Как мы

знаем, для этого достаточно доказать (см. п. 1), что множество $A \subset K \cup_f Q$ замкнуто, если замкнуто его пересечение $A \cap P$ с любым конечным подпредразбиением $P \subset K \cup_f Q$. В то же время, поскольку естественная проекция α является отображением отождествления, а топологическая сумма $K \cup Q$ — клеточным разбиением, множество $A \subset K \cup_f Q$ тогда и только тогда замкнуто, когда для любой клетки $e \in K \cup Q$ замкнуто пересечение $\alpha^{-1}(A) \cap \bar{e}$. Таким образом, нам нужно доказать, что если пересечение $A \cap P$ некоторого множества $A \subset K \cup_f Q$ с любым конечным подпредразбиением $P \subset K \cup_f Q$ замкнуто, то для любой клетки $e \in K \cup Q$ замкнуто пересечение $\alpha^{-1}(A) \cap \bar{e}$. Легко видеть, что этот факт будет доказан, если мы покажем, что для любой клетки $e \in K \cup Q$ множество $\alpha(e)$ содержится в некотором конечном подпредразбиении P_e предразбиения $K \cup_f Q$.

Действительно, поскольку подпредразбиение P_e , будучи конечным, замкнуто, а $\alpha(e) \subset P_e$, то $\alpha(\bar{e}) \subset \overline{\alpha(e)} \subset P_e$, и потому $\bar{e} \subset \alpha^{-1}(P_e)$. Следовательно,

$$\alpha^{-1}(A) \cap \bar{e} \subset \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(P_e) \cap \bar{e} \subset \alpha^{-1}(A \cap P_e) \cap \bar{e} \subset \alpha^{-1}(A) \cap \bar{e},$$

и потому

$$\alpha^{-1}(A) \cap \bar{e} = \alpha^{-1}(A \cap P_e) \cap \bar{e}.$$

По условию, правая часть этого равенства замкнута. Поэтому замкнута и его левая часть.

Таким образом, нам нужно только доказать, что для любой клетки $e \in K \cup Q$ существует такое конечное подпредразбиение $P_e \subset K \cup_f Q$, что $\alpha(e) \subset P_e$. Но если $e \notin L$, то множество $\alpha(e)$ представляет собой клетку предразбиения $K \cup_f Q$ и потому, по уже доказанному, содержится в некотором конечном подпредразбиении P_e этого предразбиения. Пусть $e \in L$. Так как множество $f(\bar{e}) \subset Q$ компактно, то оно содержится в некотором конечном подразбиении разбиения Q . Поэтому и в этом случае множество $\alpha(e) = f(e) \subset f(\bar{e})$ (вообще говоря, клеткой уже не являющееся) содержится в некотором конечном подпредразбиении P_e предразбиения $K \cup_f Q$.

Тем самым утверждение о том, что предразбиение $K \cup_f Q$ является разбиением, полностью доказано.

В частности, мы видим, что

для любой клеточной пары (K, L) пространство K/L является клеточным разбиением.

Аналогично,

цилиндр Z_f любого клеточного отображения $f: K \rightarrow L$ является клеточным разбиением (с клетками вида $e \in K$, $e \in L$ и $e \times (0, 1)$, $e \in K$).

Замечание. Для справедливости доказанного выше утверждения требование клеточности отображения f не необходимо. Достаточно, чтобы это отображение обладало тем свойством, что $f(L \cap \dot{e}) \subset Q^{n-1}$ для любой клетки $e \in K \setminus L$, где $n = \dim e$.

Что же касается первого из сформулированных выше утверждений, то его можно даже несколько усилить. Именно, оказывается, что

любое непрерывное отображение $K \rightarrow Q$, являющееся на некотором подразбиении $L \subset K$ клеточным отображением, гомотопно относительно L клеточному отображению $K \rightarrow Q$.

Мы докажем эту основную для дальнейшего теорему о клеточных отображениях в следующем пункте. Конец же этого пункта мы посвятим выводу из нее одного важного следствия.

Гомотопию

$$f_t: K \rightarrow Q, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

мы будем называть *клеточной*, если отображения f_0 и f_1 клеточны и если

$$f_t(K^n) \subset Q^{n+1} \quad \text{для любого } n \geq 0.$$

Ясно, что гомотопия $f_t: K \rightarrow Q$, $0 \leq t \leq 1$, тогда и только тогда клеточна, когда соответствующее ей отображение $K \times I \rightarrow Q$ является клеточным отображением. Клеточные отображения, связанные клеточной гомотопией, мы будем называть *клеточно гомотопными*.

Из теоремы о клеточных отображениях вытекает, что если клеточные отображения

$$f, g: K \rightarrow Q$$

гомотопны относительно некоторого (возможно, пустого) подразбиения $L \subset K$, то они и клеточно гомотопны относительно L .

Действительно, утверждение, что отображения f и g гомотопны относительно L , означает, что существует такое отображение

$$F: K \times I \rightarrow Q,$$

что

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

для любой точки $x \in K$ и

$$F(x, t) = f(x) = g(x)$$

для любых точек $x \in L$ и $t \in I$. Ясно, что отображение F клеточно на подразбиении

$$I(K, L) = L \times 0 \cup K \times I \cup L \times 1$$

разбиения $K \times I$, и потому, согласно теореме о клеточных отображениях, оно гомотопно относительно этого подразделения некоторому клеточному отображению

$$G: K \times I \rightarrow Q.$$

Соответствующее отображению G семейство отображений

$$g_t: K \rightarrow Q, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и представляет собой, очевидно, клеточную гомотопию относительно L , связывающую отображения f и g .

Таким образом, при изучении гомотопических свойств клеточных разбиений мы можем, без потери общности, ограничиться рассмотрением лишь клеточных отображений и их клеточных гомотопий.

Применим, например, это замечание к исследованию гомотопических групп $\pi_n(X; x_0)$ в случае, когда пространство X является клеточным разбиением K . При этом мы можем, очевидно, предполагать, что точка x_0 является некоторой вершиной e^0 разбиения K .

Условившись рассматривать сферу S^n как клеточное разбиение с нульмерной клеткой u_0 и n -мерной клеткой $S^n \setminus u_0$, мы применим к произвольному отображению

$$\varphi: (S^n, u_0) \rightarrow (K, e^0)$$

теорему о клеточных отображениях. Поскольку точки u_0 и e^0 являются вершинами, это отображение клеточно на u_0 . Следовательно, согласно теореме о клеточных отображениях,

оно гомотопно относительно u_0 некоторому клеточному отображению

$$\psi: (S^n, u_0) \rightarrow (K, e^0).$$

Но последнее отображение, будучи клеточным, представляет собой отображение сферы S^n в n -мерный остов K^n разбиения K . Следовательно, любое отображение $(S^n, u_0) \rightarrow (K, e^0)$ гомотопно относительно u_0 отображению вида $i \circ \psi$, где $i: K^n \rightarrow K$ — отображение вложения, а ψ — некоторое отображение $(S^n, u_0) \rightarrow (K^n, e^0)$. Это означает, что

отображение вложения $i: K^n \rightarrow K$ определяет эпиморфизм

$$i_*: \pi_n(K^n; e^0) \rightarrow \pi_n(K; e^0)$$

группы $\pi_n(K^n; e^0)$ на группу $\pi_n(K; e^0)$.

Аналогично, используя тот факт, что гомотопные клеточные отображения клеточно гомотопны, мы получаем, что

группа $\pi_n(K; e^0)$ изоморфна группе $\pi_n(K^{n+1}; e^0)$ (и, вообще, любой группе $\pi_n(K^m; e^0)$ с $m \geq n + 1$).

В частности, из этого общего утверждения непосредственно вытекает, что

для любого $n < m$ имеет место равенство

$$\pi_n(S^m; u_0) = 0,$$

т. е. что

сфера S^m является $m - 1$ -связным пространством.

Подчеркнем, однако, что мы получили это утверждение, опираясь на теорему о клеточных отображениях. С другой стороны, в следующем пункте при доказательстве последней теоремы мы будем это утверждение существенно использовать. Поэтому, во избежание порочного круга, мы будем вынуждены дать ему там независимое доказательство.

5. Доказательство теоремы о клеточных отображениях

Пусть Q — произвольное клеточное разбиение и

$$\Phi = Q_{-1} \subset Q_0 \subset \dots \subset Q_n \subset \dots$$

— произвольная возрастающая последовательность его подразбиений (объединением этих подразбиений разбиение Q

может и не быть). Отображение

$$f: K \rightarrow Q$$

некоторого клеточного разбиения K в разбиение Q мы будем называть *подчиненным* последовательности $\{Q_n\}$, если

$$f(K^n) \subset Q_n$$

для любого $n \geq 0$. Соответственно этому мы будем говорить, что для последовательности $\{Q_n\}$ имеет место теорема о подчиненных отображениях, если для любой клеточной пары (K, L) каждое отображение $f: K \rightarrow Q$, ограничение $f|_L$ которого подчинено $\{Q_n\}$, гомотопно относительно L подчиненному $\{Q_n\}$ отображению $g: K \rightarrow Q$.

В случае, когда последовательность $\{Q_n\}$ состоит из остовов Q^n разбиения Q , подчиненность отображения f означает его клеточность. Таким образом, сформулированная в предыдущем пункте теорема о клеточных отображениях означает, что

для последовательности $\{Q^n\}$ остовов разбиения Q имеет место теорема о подчиненных отображениях.

Основой доказательства теоремы о клеточных отображениях является тот факт, что

если последовательность $\{Q_n\}$ такова, что для любого $n \geq 0$ каждое отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q, Q_{n-1})$ гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q_n, Q_{n-1})$, то для последовательности $\{Q_n\}$ имеет место теорема о подчиненных отображениях.

Иными словами, если последовательность $\{Q_n\}$ обладает указанным свойством, то каждое непрерывное отображение $f: K \rightarrow Q$, подчиненное на L последовательности $\{Q_n\}$, гомотопно относительно L некоторому подчиненному последовательности $\{Q_n\}$ отображению $g: K \rightarrow Q$.

Согласно сделанным в начале предыдущего пункта замечаниям, для построения гомотопии

$$f_t: K \rightarrow Q \text{ rel } L, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

связывающей отображение f с отображением g , нам достаточно для каждого $n \geq 0$ построить такую гомотопию

$$f_t^n: K^n \rightarrow Q, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

что

$$f_0^n = f|_{K^n}, \quad f_1^n(K^n) \subset Q_n, \quad f_t^n|_{L^n} = f|_{L^n}, \quad f_t^{n+1}|_{K^n} = f_t^n$$

для любого $n \geq 0$ и любого $t \in I$.

По условию, каждое отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q, Q_{n-1})$ гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q_n, Q_{n-1})$. При $n=0$ это означает, что для любой точки $y \in Q$ существует такой путь $u_y: I \rightarrow Q$, что $u_y(0) = y$ и $u_y(1) \in Q_0$. Для каждой точки $x \in K^0$ и любого числа $t \in I$ мы положим

$$f_t^0(x) = \begin{cases} u_{f(x)}(t), & \text{если } x \notin L, \\ f(x), & \text{если } x \in L. \end{cases}$$

Ясно, что тем самым мы получим некоторую гомотопию

$$f_t^0: K^0 \rightarrow Q, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для которой

$$f_0^0 = f|_{L^0}, \quad f_1^0(K^0) \subset Q_0, \quad f_t^0|_{L^0} = f|_{L^0}.$$

Пусть для некоторого $n \geq 0$ гомотопия f_t^n уже построена. Если $K^{n+1} = K^n$, то мы положим $f_t^{n+1} = f_t^n$. Пусть $K^{n+1} \neq K^n$. Поскольку пара (K^{n+1}, K^n) , будучи клеточной, удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, существует такая гомотопия

$$g_t: K^{n+1} \rightarrow Q, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

что

$$g_0 = f|_{K^{n+1}},$$

и

$$g_t|_{K^n} = f_t^n$$

для любого $t \in I$.

Рассмотрим отображение

$$g_1: K^{n+1} \rightarrow Q.$$

Так как $g_1|_{K^n} = f_1^n$, то

$$g_1(K^n) \subset Q_n.$$

Пусть e^{n+1} — произвольная $n+1$ -мерная клетка разбиения K и пусть

$$\chi: E^{n+1} \rightarrow K$$

— произвольное отображение, характеристическое для этой клетки. Так как $\dot{e}^{n+1} \subset K^n$ и $g_1(K^n) \subset Q_n$, то

$$g_1 \circ \chi : (E^{n+1}, S^n) \rightarrow (Q, Q_n).$$

Поэтому, согласно условию, существует такая гомотопия

$$\xi_t : E^{n+1} \rightarrow Q \text{ rel } S^n,$$

что

$$\xi_0 = g_1 \circ \chi, \quad \xi_1(E^{n+1}) \subset Q_{n+1}.$$

Для любой точки $x = \chi(vu)$, $0 \leq v \leq 1$, $|u| = 1$, любой клетки e^{n+1} и любого числа $t \in I$ мы положим

$$h_{e^{n+1}, t}(x) = \begin{cases} g_{\frac{2t}{1+v}}(\chi(vu)), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1+v}{2}, \\ \xi_{\frac{2t-v-1}{1-v}}((vu)), & \text{если } \frac{1+v}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Без труда проверяется (рис. 7), что тем самым мы получим некоторую однозначно определенную гомотопию

$$h_{e^{n+1}, t} : \bar{e}^{n+1} \rightarrow L, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Чтобы построить гомотопию f_t^{n+1} , мы рассмотрим теперь произвольную точку $x \in K^{n+1}$. В случае, когда $x \notin K^n$, точка x принадлежит некоторой однозначно определенной $n+1$ -мерной клетке $e_x^{n+1} \in K$. Для любого числа $t \in I$ мы положим

$$f_t^{n+1}(x) = \begin{cases} f_t^n(x), & \text{если } x \in K^n, \\ f(x), & \text{если } x \notin K^n \text{ и } e_x^{n+1} \in L, \\ h_{e_x^{n+1}, t}(x), & \text{если } x \notin K^n \text{ и } e_x^{n+1} \notin L. \end{cases}$$

Легко видеть, что тем самым мы получим такую гомотопию

$$f_t^{n+1} : K^{n+1} \rightarrow Q,$$

что

$$f_0^{n+1} = f|_{K^{n+1}}, \quad f_1^{n+1}(K^{n+1}) \subset Q_{n+1}$$

и

$$f_t^{n+1}|_{L^{n+1}} = f_{K^{n+1}}, \quad f_t^{n+1}|_{K^n} = f_t^n \text{ для любого } t \in I.$$

Тем самым гомотопии f_t^n построены для всех $n \geq 0$.

Сформулированное выше предложение полностью доказано.

Рассмотрим теперь следующее утверждение:

(A_n) . Любое отображение

$$(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q, Q^{n-1})$$

гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению

$$(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q^n, Q^{n-1}).$$

Согласно только что доказанному предложению, для доказательства теоремы о клеточных отображениях достаточно для любого $n \geq 0$ доказать утверждение (A_n) .

Замечание. При $n=0$ утверждение (A_n) справедливо (ибо в этом случае оно попросту утверждает, что любую точку разбиения Q можно соединить путем с некоторой его вершиной). Таким образом, это утверждение требует доказательства лишь при $n > 0$.

Пару (X, X_0) , состоящую из некоторого хаусдорфова пространства X и его замкнутого подпространства X_0 , обладающего тем свойством, что дополнение $X \setminus X_0$ является m -мерной ($m \geq 0$) клеткой e^m , мы будем называть m -мерной относительной клеткой.

Рассмотрим следующее утверждение:

(B_n) . Для любого $m > n$ и любой m -мерной относительной клетки (X, X_0) каждое непрерывное отображение f шара E^n в пространство X , переводящее сферу S^{n-1} в подпространство X_0 , т. е. являющееся отображением пары (E^n, S^{n-1}) в пару (X, X_0) , гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $E^n \rightarrow X_0$.

Легко видеть, что

если для некоторого $n \geq 0$ утверждение (B_n) справедливо, то справедливо и утверждение (A_n) (для

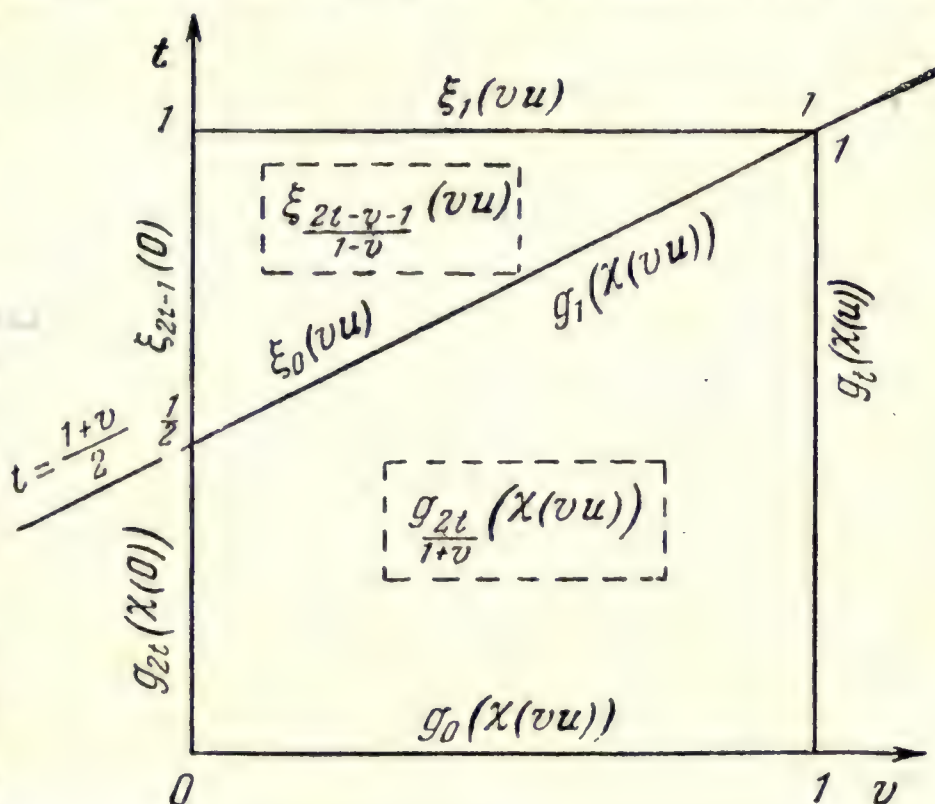


Рис. 7.

любого клеточного разбиения Q и любого отображения $f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q, Q^{n-1})$.

Действительно, пусть утверждение (B_n) справедливо и пусть f — произвольное отображение шара E^n в некоторое клеточное разбиение Q , переводящее сферу S^{n-1} в $(n-1)$ -й остов Q^{n-1} . Так как шар E^n компактен, то его образ $f(E^n)$ при отображении f также компактен и потому содержится в некотором конечном подразбиении разбиения Q . Поэтому, без ограничения общности, мы можем с самого начала предполагать, что Q конечно.

Пользуясь конечностью разбиения Q , мы докажем для него утверждение (A_n) индукцией по его размерности $m = \dim Q$ и по числу $a_m(Q)$ его m -мерных клеток. Если $m = n$, то утверждение (A_n) тривиальным образом верно. Предполагая, что это утверждение уже доказано для всех конечных разбиений Q , для которых либо $\dim Q < m$, где $m > n$, либо число $a_m(Q)$ меньше некоторого целого положительного числа k , рассмотрим произвольное разбиение Q , для которого $\dim Q = m$ и $a_m(Q) = k$. Выбрав произвольную m -мерную клетку $e^m \in Q$ и положив $Q_0 = Q \setminus e^m$, мы, очевидно, получим m -мерную относительную клетку (Q, Q_0) . Так как любое отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q, Q^{n-1})$ автоматически является отображением $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Q, Q_0)$, то, согласно утверждению (B_n) , каждое такое отображение гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $g: E^n \rightarrow Q_0$. С другой стороны, ясно, что подпространство Q_0 является клеточным разбиением, для которого либо $\dim Q_0 < m$, либо $a_m(Q_0) < k$. Поэтому, в силу предположения индукции, отображение g гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $h: E^n \rightarrow Q_0^n = Q^n$. Следовательно, и отображение f гомотопно относительно S^{n-1} отображению h . Тем самым утверждение (A_n) полностью доказано.

Таким образом, для доказательства теоремы о клеточных отображениях нам достаточно доказать для любого $n \geq 0$ утверждение (B_n) .

З а м е ч а н и е. Подобно утверждению (A_n) утверждение (B_n) при $n = 0$ тривиальным образом верно (ибо множество $\bar{e}^m$ линейно связно).

Рассмотрим теперь следующее утверждение:

(C_n) . Для любого $m > n$ и любой m -мерной относительной клетки (X, X_0) каждое отображение $f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow$

$\rightarrow (X, X_0)$ гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $g: E^n \rightarrow X$, обладающему тем свойством, что образ $g(E^n)$ шара E^n при отображении g не содержит всей клетки $e^m = X \setminus X_0$.

Легко видеть, что

из утверждения (C_n) вытекает утверждение (B_n) .

Действительно, пусть утверждение (C_n) справедливо и пусть x_0 — произвольная точка клетки e^m , не принадлежащая множеству $g(E^n)$. Выберем такое отображение

$$\chi: E^m \rightarrow \bar{e}^m,$$

характеристическое для клетки e^m , что $\chi(0) = x_0$ (ясно, что такое отображение всегда можно найти). Легко видеть, что, положив

$$g(x) = \chi(v(x)u(x)), \quad x \in G$$

(где g — отображение $E^n \rightarrow X$, предусмотренное утверждением (C_n)), мы однозначно определим на открытом подмножестве $G = g^{-1}(e^m)$ шара E^n два непрерывных отображения:

$$v: G \rightarrow I, \quad u: G \rightarrow S^{m-1}$$

(так как, по условию, $\chi(0) \notin g(E^n)$, то $v(x) \neq 0$ для каждой точки $x \in G$ и потому отображение $u: G \rightarrow S^{m-1}$ однозначно определено). Для любой точки $x \in E^n$ и любого числа $t \in I$ мы теперь положим

$$g_t(x) = \begin{cases} \chi(((1-t)v(x) + t)u(x)), & \text{если } x \in G, \\ g(x), & \text{если } x \notin G. \end{cases}$$

Ясно, что тем самым мы получим некоторую гомотопию $g_t: E^n \rightarrow X$ относительно S^{n-1} , для которой $g_0 = g$ и $g_1(E^n) \subset X_0$. Таким образом, отображение g , а потому и отображение f , гомотопны относительно S^{n-1} некоторому отображению $E^n \rightarrow X_0$. Утверждение (B_n) тем самым полностью доказано.

Таким образом, нам осталось лишь доказать для всех $n > 0$ утверждение (C_n) .

С этой целью мы рассмотрим следующее утверждение:

(D_n) Для любого $m > n$, любой m -мерной относительной клетки (X, X_0) и любого отображения $f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow$

$\rightarrow (X, X_0)$ существует такое отображение

$$g: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, X_0),$$

что

- 1) образ $g(E^n)$ шара E^n при отображении g не содержит всей клетки $e^m = X \setminus X_0$;
- 2) отображение g совпадает с отображением f вне некоторого открытого множества $U \subset E^n$;
- 3) образ множества U при каждом из отображений f и g содержится в клетке e^m .

Легко видеть, что

предусмотренное утверждением (D_n) отображение g гомотопно относительно S^{n-1} отображению f .

Действительно, пусть

$$\chi: E^m \rightarrow X$$

— произвольное отображение, характеристическое для клетки e^m . Так как, по условию, $f(U) \subset e^m$ и $g(U) \subset e^m$, то на множестве U определены однозначные непрерывные отображения

$$f' = \chi^{-1} \circ f: U \rightarrow E^m,$$

$$g' = \chi^{-1} \circ g: U \rightarrow E^m.$$

Для любой точки $v \in E^n$ и любого числа $t \in I$ мы положим

$$g_t(v) = \begin{cases} \chi(tf'(v) + (1-t)g'(v)), & \text{если } v \in U, \\ f(v), & \text{если } v \notin U. \end{cases}$$

Ясно, что тем самым мы получим гомотопию $g_t: E^n \rightarrow X$ относительно S^{n-1} , связывающую отображение f с отображением g .

В силу условия 1) утверждения (D_n) доказанное предложение означает, что

из справедливости утверждения (D_n) вытекает справедливость утверждения (C_n) .

Таким образом, для доказательства теоремы о клеточных отображениях нам осталось только для любого $n > 0$ доказать утверждение (D_n) . Мы проведем это доказательство индукцией по числу n . В первую очередь мы рассмотрим случай $n = 1$.

Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка клетки e^m и пусть F — ее полный прообраз $f^{-1}(x_0)$ при отображении $f: E^1 \rightarrow X$. Множество F представляет собой замкнутое подмножество отрезка $E^1 = [-1, 1]$, не содержащее его концов. Поскольку отображение f непрерывно, а клетка e^m открыта в пространстве X , на отрезке E^1 существует такая конечная система открытых интервалов (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, k$, что их объединение U содержит множество F и переходит при отображении f в клетку e^m . Так как множество $e^m \setminus x_0$ линейно связно (ибо $m > 1$), то для любого $i = 1, \dots, k$ существует такое отображение g_i замкнутого отрезка $[a_i, b_i]$ в множество $e^m \setminus x_0$, что $g_i(a_i) = f(a_i)$ и $g_i(b_i) = f(b_i)$. Но тогда ясно, что отображение $g: E^1 \rightarrow X$, определенное формулой

$$g(v) = \begin{cases} g_i(v), & \text{если } v \in (a_i, b_i), \\ f(v), & \text{если } v \notin U, \end{cases}$$

непрерывно и удовлетворяет всем условиям утверждения (D_1) . Тем самым утверждение (D_1) полностью доказано.

Предположим теперь, что для некоторого $n > 1$ уже доказаны утверждения $(D_1), \dots, (D_{n-1})$, и докажем утверждение (D_n) .

С этой целью мы предварительно заметим, что

из справедливости утверждений $(D_1), \dots, (D_{n-1})$ вытекает, что для любого $m > n$ сфера S^m является $n-1$ -связным пространством.

Поскольку из утверждения (D_k) , $k = 1, \dots, n-1$, вытекает утверждение (B_k) , для доказательства этого предложения достаточно доказать, что

из справедливости утверждения (B_k) вытекает, что для любого $m > k$ сфера S^m является k -асферическим пространством.

Пусть g — произвольное отображение $S^k \rightarrow S^m$. Выбрав некоторое отображение

$$\chi: E^k \rightarrow S^k,$$

переводящее сферу $S^{k-1} \subset E^k$ в точку $u_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^k$ и гомеоморфно отображающее открытый шар $E^k = E^k \setminus S^{k-1}$ на множество $S^k \setminus u_0$ (т. е. отображение, характеристическое для клетки $S^k \setminus u_0$), мы рассмотрим отображение

$$f = g \circ \chi: (E^k, S^{k-1}) \rightarrow (S^m, u_0),$$

где $w_0 = g(u_0) \in S^m$. Поскольку пара (S^m, w_0) является, очевидно, m -мерной относительной клеткой и $m > k$, к этому отображению применимо утверждение (B_k) . Следовательно, оно гомотопно относительно S^{k-1} отображению шара E^k в точку w_0 . Пусть

$$f_t: E^k \rightarrow S^m$$

— соответствующая гомотопия. Ясно, что для любого $t \in I$ отображение

$$g_t = f_t \circ \chi^{-1}: S^k \rightarrow S^m$$

однозначно определено и что все эти отображения составляют гомотопию, связывающую отображение g с постоянным отображением $S^k \rightarrow w_0$. Следовательно, сфера S^m k -асферична.

Используя доказанные в п. 1 гл. 2 утверждения, мы немедленно получаем отсюда, что

из справедливости утверждений $(D_1), \dots, (D_{n-1})$ следует, что для любого $m > n$ произведение $S^{m-1} \times (0, 1)$ является $n-1$ -связным пространством.

После этих предварительных замечаний мы уже можем перейти непосредственно к доказательству утверждения (D_n) (в предположении, что утверждения $(D_1), \dots, (D_{n-1})$ уже доказаны).

Пусть $m > n$ и пусть

$$f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, X_0)$$

— произвольное отображение пары (E^n, S^{n-1}) в некоторую m -мерную относительную клетку (X, X_0) . Пусть, кроме того, x_0 — произвольная внутренняя точка клетки $e^m = X \setminus X_0$ и пусть

$$F = f^{-1}(x_0)$$

— ее полный прообраз при отображении f . Так как, по условию, граница S^{n-1} шара E^n переходит при отображении f в подпространство X_0 , то множество F (очевидно, замкнутое) содержится в открытом шаре $E^n = E^n \setminus S^{n-1}$. По аналогичным соображениям, множество $G = f^{-1}(e^m)$ (очевидно, открытое) также содержится в шаре E^n . Поскольку $F \subset G$, то существует настолько мелкий кубильяж евклидова пространства R^n (т. е. разбиение пространства R^n на кубы n ортого-

нальными системами параллельных гиперплоскостей), что множество F обладает содержащейся в открытом множестве G окрестностью U , являющейся объединением некоторых открытых кубов этого кубильяжа. Пусть P — замыкание множества U , а Q — граница этого замыкания, т. е. его пересечение с объединением всех замкнутых кубов рассматриваемого кубильяжа, ему не принадлежащих. Ясно, что множество P представляет собой клеточное разбиение размерности n (клетками которого являются открытые кубы рассматриваемого кубильяжа и их открытые грани), а подмножество Q — его клеточное подразбиение. С другой стороны, ясно, что $F \cap Q = \emptyset$ и потому

$$f(Q) \subset e^m \setminus x_0,$$

так что отображение $f|_Q$ мы можем рассматривать как отображение

$$f|_Q: Q \rightarrow e^m \setminus x_0.$$

Наконец, очевидно, что множество $e^m \setminus x_0$ гомеоморфно произведению $S^{m-1} \times (0, 1)$ и потому, в силу предположения индукции и сделанных выше замечаний, $n - 1$ -связно.

Таким образом, отображение $f|_Q$ представляет собой непрерывное отображение подразбиения Q разбиения P в $n - 1$ -связное пространство $e^m \setminus x_0$, причем $\dim(P \setminus Q) \leq n$. Следовательно, в силу доказанной в предыдущем пункте теоремы, для этого отображения существует некоторое распространение

$$h: P \rightarrow e^m \setminus x_0.$$

Мы определим отображение

$$g: E^n \rightarrow X,$$

положив

$$g(v) = \begin{cases} h(v), & \text{если } v \in P, \\ f(v), & \text{если } v \notin P, \end{cases}$$

для любой точки $v \in E^n$. Ясно, что это отображение непрерывно и удовлетворяет всем условиям утверждения (D_n) .

Тем самым утверждения (D_n) доказаны для всех $n > 0$. Вместе с ними полностью доказана и теорема о клеточных отображениях.

З а м е ч а н и е. Попутно мы доказали, что для любого $n > 0$ сфера S^n является $n - 1$ -связным пространством (см. конец п. 4).

6. Теорема Уайтхеда. Квазиполиэдры

Вернемся к предложению, доказанному в начале предыдущего пункта. Полагая в этом предложении $Q = K$ и $Q_0 = Q_1 = \dots = Q_n = \dots = K_0$, где K_0 — некоторое подразбиение клеточного разбиения K , мы немедленно получаем, что

если для каждого $n \geq 0$ любое отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (K, K_0)$ гомотопно относительно S^{n-1} некоторому отображению $E^n \rightarrow K_0$, то каждое отображение

$$f: (K, K_0) \rightarrow (K, K_0)$$

гомотопно относительно K_0 некоторому отображению

$$g: K \rightarrow K_0.$$

Согласно доказанному в конце п. 4 гл. 2 утверждению, условия этого предложения выполнены, если подразбиение K_0 является репрезентативным подпространством пространства K . С другой стороны, в случае, когда отображение f представляет собой тождественное отображение 1_K разбиения K , предусмотренное этим предложением отображение g является, очевидно, ретракцией $K \supset K_0$. Таким образом,

любое подразбиение K_0 разбиения K , являющееся его репрезентативным подпространством, представляет собой деформационный ретракт пространства K .

Другими словами,

для подразбиений клеточных разбиений свойство «быть репрезентативным подпространством» равносильно свойству «быть деформационным ретрактом».

Из этого предложения легко следует, что

для любых клеточных разбиений K и L каждая слабая гомотопическая эквивалентность

$$f: K \rightarrow L$$

является гомотопической эквивалентностью.

Другими словами,
 для отображений клеточных разбиений свойство
«быть слабой гомотопической эквивалентностью» равно-
 сильно свойству *«быть гомотопической эквивалентно-
 стью»*.

Действительно, согласно теореме о клеточных отображе-
 ниях, мы, без ограничения общности, можем считать, что
 отображение f клеточно и потому его цилиндр Z_f является
 клеточным разбиением. С другой стороны, тот факт, что
 отображение f представляет собой слабую гомотопическую
 эквивалентность, означает, как мы знаем, что подпростран-
 ство K цилиндра Z_f репрезентативно. Поэтому, поскольку
 это подпространство является, очевидно, подразбиением ци-
 линдра Z_f , оно представляет собой его деформационный рет-
 ракт и, следовательно, отображение f является гомотопиче-
 ской эквивалентностью.

Доказанное предложение известно как теорема У а й т х е д а. Оно является одним из основных орудий исследования
 гомотопических свойств клеточных разбиений. Например, из
 этой теоремы почти непосредственно следует, что

*любое клеточное разбиение K является гомотопиче-
 ским пределом каждой возрастающей последовательности*

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$$

*его подразбиений, объединение которых совпадает со всем
 разбиением K .*

Действительно, пространство K^∞ , соответствующее рас-
 сматриваемой последовательности, является, очевидно, клеточ-
 ным разбиением, а естественное отображение

$$p^\infty : K^\infty \rightarrow K$$

— слабой гомотопической эквивалентностью. Поэтому сог-
 ласно теореме Уайтхеда это отображение представляет собой
 гомотопическую эквивалентность.

Топологическое пространство X мы будем называть *ква-
 zipолиэдром*, если оно гомотопически эквивалентно некото-
 рому клеточному разбиению. Ясно, что теорема Уайтхеда
 остается справедливой и для кваzipолиэдров, т. е.

любое непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow Y$$

квазиполиэдра X в квазиполиэдр Y , являющееся слабой гомотопической эквивалентностью, представляет собой гомотопическую эквивалентность.

Кроме того, из сказанного в конце п. 4 немедленно следует, что

для любой клеточной пары (K, L) и любого непрерывного отображения $f: L \rightarrow Y$ подразделения L в произвольный квазиполиэдр Y пространство $K \cup_f Y$ является квазиполиэдром.

З а м е ч а н и е. Квазиполиэдры составляют замечательный класс топологических пространств, отличающийся тем свойством, что практически любые «разумные» операции над топологическими пространствами не выводят за его пределы. Например, для любых квазиполиэдров X и Y пространство Y^X всех непрерывных отображений $X \rightarrow Y$, рассматриваемое в так называемой «компактно-открытой топологии» (см. п. 1 гл. 9), также является квазиполиэдром, и каждое топологическое пространство X , для которого существует гомотопически инъективное отображение $X \rightarrow Y$ в некоторый квазиполиэдр Y , само необходимо является квазиполиэдром. С другой стороны, во всех гомотопических вопросах можно ограничиться лишь квазиполиэдрами, ибо для любого пространства X существует непрерывное отображение некоторого квазиполиэдра Z в пространство X , являющееся слабой гомотопической эквивалентностью. Эти свойства квазиполиэдров нам не понадобятся, и мы их оставим без доказательства.

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ. I

Эта глава в основном посвящена построению тензорного исчисления на произвольных гладких многообразиях.

В подготовительном п. 1- мы вводим понятие гладкого предмногообразия как хаусдорфова топологического пространства, на котором задан (если употребить модную сейчас терминологию) некоторый пучок ростков вещественнозначных функций.

В п. 2, также имеющем подготовительный характер, мы для евклидовых пространств доказываем классическую теорему о дифференцируемых отображениях с отличным от нуля якобианом; при этом специально подчеркиваем некоторые существенные для дальнейшего детали, связанные с оценкой диаметра области, в которой отображение диффеоморфно, обычно оставляемые без рассмотрения.

В п. 3 определяются гладкие многообразия как гладкие предмногообразия, локально диффеоморфные евклидовым пространствам. Здесь же вводится понятие произведения гладких многообразий.

В п. 4 доказываются аналоги леммы Урысона и теоремы Титце для гладких функций. Здесь же доказывается, что любое выпуклое открытое подмножество евклидова пространства диффеоморфно открытому шару.

В п. 5 вводятся векторные поля как дифференцирования алгебры гладких функций и показывается, что в любой координатной окрестности каждое векторное поле является линейной комбинацией частных дифференцирований по локальным координатам.

В п. 6 вводится понятие вектора в точке, определяется многообразие M_* всех векторов во всевозможных точках данного многообразия M и показывается, что введенные в п. 5 векторные поля можно интерпретировать как гладкие отображения $M \rightarrow M_*$. В этом же пункте вводится понятие дифференциала гладкого отображения и в связи с этим понятие регулярного отображения.

В п. 7 аналогичным образом рассматриваются линейные дифференциальные формы, а в п. 8 — тензорные поля произвольного типа.

В п. 9 строится алгебра тензоров и тензорных полей. В частности, здесь подробно рассматривается операция свертывания.

В заключительном п. 10 определяется понятие риманова пространства и на основе результатов п. 4 доказывается, что на любом гладком сепарабельном (т. е. со счетной базой) многообразии существует поле метрического тензора, т. е. что каждое такое многообразие можно определить как риманово пространство.

1. Гладкие предмногообразия

Пусть M — произвольное множество и пусть $f, f^1, \dots, f^r$ — некоторые вещественные функции, определенные на пространстве M . Мы будем говорить, что функция f *гладко зависит* от функций $f^1, \dots, f^r$, если существует такая бесконечно дифференцируемая функция $u(t^1, \dots, t^r)$ вещественных переменных $t^1, \dots, t^r$, определенная (и бесконечно дифференцируемая) для всех значений этих переменных, что $f = u(f^1, \dots, f^r)$ на M , т. е. такая, что

$$f(p) = u(f^1(p), \dots, f^r(p)) \quad (1)$$

для любой точки $p \in M$. Если равенство (1) имеет место лишь для точек p некоторого множества $U \subset M$, то мы будем говорить, что функция f *гладко зависит* от функций $f^1, \dots, f^r$ *на множестве* U .

З а м е ч а н и е. Некоторые авторы требуют, чтобы функция u , осуществляющая гладкую зависимость (1), была определена (и бесконечно дифференцируема) лишь в некотором открытом множестве арифметического пространства R^r , содержащем все точки вида $(f^1(p), \dots, f^r(p))$, $p \in M$. Легко можно показать, что это (формально более общее) определение, по существу, совпадает с нашим определением. С другой стороны, часто требуют не бесконечной дифференцируемости функции u , а существования у нее лишь конечного числа производных (до некоторого фиксированного порядка N). Без труда можно проверить, что вся развиваемая ниже теория остается в силе и при таком определении гладкой зависимости, если только число N достаточно велико.

Пусть теперь M — топологическое пространство. Мы будем говорить, что заданная на M функция f *гладко зависит* от функций $f^1, \dots, f^r$ *вблизи* точки $p_0 \in M$, если равенство (1) имеет место для всех точек p некоторой окрестности точки p_0 . Аналогично мы будем говорить, что две функции *совпадают вблизи* точки $p_0 \in M$, если они принимают одни и те же значения в некоторой окрестности этой точки.

Гладкостью на топологическом пространстве M мы будем называть такое непустое множество $\mathcal{O}$ вещественных функций, определенных на пространстве M , что

1) любая функция, гладко зависящая от функций из $\mathcal{O}$, сама принадлежит $\mathcal{O}$;

2) любая функция, совпадающая вблизи каждой точки $p \in M$ с некоторой функцией из $\mathcal{O}$ (вообще говоря, зависящей от точки p), сама принадлежит $\mathcal{O}$.

Из условия 1) вытекает, что все постоянные функции принадлежат $\mathcal{O}$ и что сумма и произведение любых функций из $\mathcal{O}$ также принадлежат $\mathcal{O}$. Следовательно,

всякая гладкость $\mathcal{O}$ является алгеброй над полем K вещественных чисел.

Эта алгебра коммутативна, ассоциативна и обладает единицей.

Хаусдорфово топологическое пространство M , на котором задана некоторая гладкость $\mathcal{O} = \mathcal{O}(M)$, мы будем называть *гладким предмногообразием*, а функции $f \in \mathcal{O}$ — *гладкими на M функциями*.

Заметим, что гладкость очень слабо связана с топологией (только через условие 2)). В частности, гладкие функции, вообще говоря, могут и не быть непрерывными. Тесное взаимодействие гладкости и топологии осуществляется лишь для многообразий (см. ниже, п. 3).

Важный пример гладкого предмногообразия мы получим, рассмотрев произвольное m -мерное линейное пространство L . Выбрав в этом пространстве некоторый базис, мы можем каждую функцию на L рассматривать как функцию m вещественных переменных — координат векторов из L в данном базисе. Очевидно, что совокупность $\mathcal{O}(L)$ всех функций на L , являющихся бесконечно дифференцируемыми функциями координат, не зависит от выбора базиса и удовлетворяет условиям 1) и 2) определения гладкости. В дальнейшем, говоря о линейном пространстве L как о гладком предмногообразии, мы всегда будем подразумевать, что за гладкие на L функции приняты именно функции из $\mathcal{O}(L)$.

В частности, гладким предмногообразием является арифметическое пространство R^m . Гладкие на R^m функции — это просто бесконечно дифференцируемые функции координат $t^1, \dots, t^m$ его точек.

Пусть N — произвольное подпространство некоторого гладкого предмногообразия M . Вещественную функцию f ,

определенную на N , мы будем называть *гладкой (на N)*, если вблизи любой точки $p \in N$ она совпадает с некоторой гладкой на M функцией, т. е. если для любой точки $p \in N$ существуют в M такая ее окрестность U и такая гладкая на M функция g , что

$$f|_{U \cap N} = g|_{U \cap N}.$$

Легко видеть, что

совокупность $\mathcal{O}(N)$ всех гладких на N функций является гладкостью (на N).

Действительно, пусть функция f на N гладко зависит от гладких на N функций $f^1, \dots, f^r$, т. е. пусть

$$f = u(f^1, \dots, f^r) \text{ на } N,$$

где u — некоторая бесконечно дифференцируемая функция r вещественных переменных. По определению, для любой точки $p \in N$ и любого $i = 1, \dots, r$ существуют в M такая окрестность U_i точки p и такая гладкая на M функция g^i , что

$$f^i|_{U_i \cap N} = g^i|_{U_i \cap N}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Пусть $U = \bigcap_{i=1}^r U_i$ и пусть $g = u(g^1, \dots, g^r)$. Тогда $g \in \mathcal{O}(M)$ и

$$f|_{U \cap N} = g|_{U \cap N}.$$

Таким образом, для любой точки $p \in N$ существуют в M такая ее окрестность U и такая гладкая на M функция g , что $f = g$ на $U \cap N$. Следовательно, функция f является гладкой на N функцией. Тем самым для множества $\mathcal{O}(N)$ условие 1) определения гладкости полностью проверено.

Проверим теперь условие 2). Пусть заданная на N функция f вблизи любой точки $p \in N$ совпадает с некоторой гладкой на N функцией, т. е. пусть для любой точки $p \in N$ существуют в N такая окрестность V точки p и такая гладкая на N функция h , что $h = f$ на V . По определению, в M существуют такая окрестность W точки p и такая гладкая на M функция g , что $h = g$ на $N \cap W$. Пусть U — такая окрестность точки p в M , что $U \cap N \subset W \cap V$. Тогда $f = g$ на $N \cap U$. Таким образом, вблизи любой точки $p \in N$ функция f совпадает с некоторой гладкой на M функцией g . Поэтому функция f является гладкой на N функцией. Условие 2) тем самым также проверено.

Подпространство $N \subset M$, рассматриваемое вместе с гладкостью $\mathcal{O}(N)$, мы будем называть *подпредмногообразием* предмногообразия M . Согласно доказанному утверждению, любое подпредмногообразие является гладким предмногообразием.

Функцию f , гладкую в некоторой окрестности точки $p \in M$ (и определенную в этой или большей окрестности), мы будем называть функцией, *гладкой в точке p* . Ясно, что если мы условимся считать две гладкие в точке p функции одинаковыми, когда они совпадают вблизи этой точки, то совокупность $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}_M(p)$ всех таких функций также будет являться алгеброй над полем R .

Замечание. В терминологии теории пучков алгебра $\mathcal{O}(p)$ есть не что иное, как алгебра ростков гладких в p функций, а алгебра $\mathcal{O}(M)$ — алгебра сечений пучка этих ростков. Мы не будем пользоваться этой терминологией, поскольку привлечение аппарата теории пучков нам, по существу, не понадобится.

Пусть N и M — произвольные гладкие предмногообразия. Непрерывное отображение

$$\Phi : N \rightarrow M$$

гладкого предмногообразия N в гладкое предмногообразие M мы будем называть *гладким в точке $p \in N$* , если для любой гладкой в точке $\Phi(p) \in M$ функции f сложная функция $f \circ \Phi$ гладка в точке p . В случае, когда отображение Φ гладко во всех точках $p \in N$, мы будем говорить, что это отображение *гладко на N* . Примером гладкого отображения является отображение вложения $i : N \subset M$ произвольного подпредмногообразия N предмногообразия M . Другим примером может служить произвольная гладкая на M функция f , рассматриваемая как отображение предмногообразия M в числовую ось R .

Гомеоморфное отображение

$$\Phi : N \rightarrow M$$

предмногообразия N на предмногообразие M мы будем называть *диффеоморфизмом* (или *диффеоморфным отображением*), если оно гладко на N , а обратное к нему отображение

$\Phi^{-1}: M \rightarrow N$ гладко на M . Предмногообразия N и M , для которых существует хотя бы один диффеоморфизм $N \rightarrow M$, называются диффеоморфными. Как правило, диффеоморфные предмногообразия мы будем рассматривать как одинаковые.

Отображение $\Phi: N \rightarrow M$ мы будем называть диффеоморфным в точке $p \in N$, если оно осуществляет диффеоморфное отображение некоторой окрестности точки p на некоторую окрестность точки $\Phi(p)$. Отображение, диффеоморфное во всех точках $p \in N$, мы будем называть локально диффеоморфным. Ясно, что

отображение $\Phi: N \rightarrow M$ тогда и только тогда диффеоморфно, когда оно биективно и локально диффеоморфно

2. Теорема об обратных функциях

В частном случае, когда предмногообразия N и M являются открытыми подмножествами U и V пространства $\mathbb{R}^m$, каждое гладкое отображение

$$\varphi: U \rightarrow V$$

задается системой m гладких (т. е. бесконечно дифференцируемых) функций

$$u^1(t^1, \dots, t^m), \dots, u^m(t^1, \dots, t^m),$$

выражающих координаты $u^1, \dots, u^m$ точки $\varphi(t) \in V$ через координаты $t^1, \dots, t^m$ точки $t \in U$. Якобиан

$$\frac{D(u^1, \dots, u^m)}{D(t^1, \dots, t^m)} = \det \left\| \frac{\partial u^i}{\partial t^j} \right\|_{i, j=1, \dots, m}$$

этой системы функций мы будем называть якобианом отображения φ и будем обозначать его символом D_φ . Этот якобиан представляет собой гладкую функцию на открытом множестве U . Из правила дифференцирования сложных функций непосредственно вытекает, что якобиан $D_{\psi \circ \varphi}$ композиции $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$ двух гладких отображений $\varphi: U \rightarrow V$ и $\psi: V \rightarrow W$, где U , V и W — открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, выражается через якобианы D_ψ и D_φ отображений ψ и φ согласно формуле

$$D_{\psi \circ \varphi} = (D_\psi \circ \varphi) \cdot D_\varphi. \quad (1)$$

В частности, если отображение φ диффеоморфно, то

$$D_{\varphi^{-1} \circ \varphi} = D_\varphi^{-1}.$$

Следовательно,
якобиан D_φ диффеоморфного отображения

$$\varphi: U \rightarrow V$$

ни в одной точке множества U не обращается в нуль.

Далее, поскольку для любого открытого множества $U_0 \subset U$ якобиан D_ι отображения вложения $\iota: U_0 \subset U$ равен, очевидно, единице, мы, применив соотношение (1) к отображению $\varphi \circ \iota$, немедленно получим, что

якобиан D_{φ_0} ограничения $\varphi_0 = \varphi|_{U_0}$ произвольного гладкого отображения $\varphi: U \rightarrow V$ на множестве $U_0 \subset U$ является ограничением $D_\varphi|_{U_0}$ якобиана D_φ отображения φ :

$$D_{\varphi_0} = D_\varphi|_{U_0}.$$

Поэтому

если отображение $\varphi: U \rightarrow V$ диффеоморфно в точке $t_0 \in U$, то его якобиан D_φ отличен от нуля в этой точке.

В частности,

якобиан D_φ произвольного локально диффеоморфного отображения

$$\varphi: U \rightarrow V$$

отличен от нуля всюду на множестве U .

Оказывается, что обратное утверждение также справедливо, т. е.

если якобиан D_φ гладкого отображения

$$\varphi: U \rightarrow V$$

отличен от нуля в точке $t_0 \in U$, то отображение φ диффеоморфно в этой точке.

Это утверждение известно как теорема об обратных функциях. Хотя ее доказательство можно найти в любом достаточно полном курсе анализа, мы все же изложим его здесь, поскольку нам будут нужны некоторые аспекты этой теоремы, обычно оставляемые в стороне.

Ясно, что при доказательстве теоремы об обратных функциях мы, без ограничения общности, можем считать, что $t_0 = 0$, $\varphi(t_0) = 0$ и что множество U представляет собой шар $|t| < R$ некоторого радиуса $R > 0$ с центром в точке 0.

Так как отображение φ , по условию, гладко, то для любых двух точек $t, t+h \in U$ имеет место равенство

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \varphi'(t)h + |h|\varepsilon(h, t),$$

где $\varphi'(t)$ — линейный оператор, матрицей которого служит матрица якобиана отображения φ , а $\varepsilon(h, t)$ — некоторый вектор, длина $|\varepsilon(h, t)|$ которого стремится к нулю при $|h| \rightarrow 0$. Оператор $\varphi'(t)$ гладко зависит от точки $t = (t^1, \dots, t^m)$ в том смысле, что элементы $\frac{\partial u^i}{\partial t^j}$ его матрицы являются бесконечно дифференцируемыми функциями переменных $t^1, \dots, t^m$. Поэтому этот оператор удовлетворяет в точке 0 условию Липшица, т. е. существует такое постоянное число $M > 0$, что для любых точек $t \in U, h \in R^m$ имеет место равенство

$$|\varphi'(t)h - \varphi'(0)h| \leq M \cdot |t| \cdot |h|.$$

Пусть

$$m = \inf_{|h|=1} |\varphi'(0)h|.$$

Так как, по условию,

$$D_\varphi(0) = \det \varphi'(0) \neq 0,$$

то $m > 0$ и потому $r_0 = \min\left(R, \frac{m}{2M}\right) > 0$.

Легко видеть, что при $|t| < r_0$ оператор $\varphi'(t)$ обратим. Действительно, если $\varphi'(t)h = 0$, то

$$|\varphi'(0)h| = |\varphi'(t)h - \varphi'(0)h| \leq M \cdot |t| \cdot |h| < Mr_0 \leq m,$$

что при $h \neq 0$ невозможно.

Пусть теперь $|t| < r_0$ и $|t+h| < r_0$. Каждому единичному вектору $e \in R^m$ мы отнесем числовую функцию $f(\lambda)$ вещественной переменной $\lambda \in I$, равную скалярному произведению векторов $\varphi(t+\lambda h)$ и e :

$$f(\lambda) = (\varphi(t+\lambda h), e).$$

Так как

$$f'(\lambda) = (\varphi'(t+\lambda h)h, e),$$

то, применив к функции $f(\lambda)$ теорему Лагранжа, мы получим, что

$$(\varphi(t+h), e) - (\varphi(t), e) = (\varphi'(t+\lambda_0 h)h, e),$$

где λ_0 — некоторое (зависящее от вектора e) число отрезка I . Следовательно,

$$\begin{aligned} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| &\geq |(\varphi(t+h) - \varphi(t), e)| = \\ &= |(\varphi'(t + \lambda_0 h) h, e)| \geq \\ &\geq |(\varphi'(0) h, e)| - |(\varphi'(t + \lambda_0 h) h - \varphi'(0) h, e)|. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |(\varphi'(t + \lambda_0 h) h - \varphi'(0) h, e)| &\leq |\varphi'(t + \lambda_0 h) h - \varphi'(0) h| \leq \\ &\leq M \cdot |t + \lambda_0 h| \cdot |h| \leq Mr_0 |h| \leq \frac{m}{2} |h|. \end{aligned}$$

Кроме того, если $e = \frac{\varphi'(0) h}{|\varphi'(0) h|}$, то

$$|(\varphi'(0) h, e)| = |\varphi'(0) h| \geq m |h|.$$

Поэтому

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \geq \frac{m}{2} |h|. \quad (2)$$

При этом, как легко видеть, равенство возможно здесь лишь при $h = 0$. Следовательно, если $h \neq 0$, то

$$\varphi(t+h) \neq \varphi(t).$$

Это означает, что на шаре $U_0: |t| < r_0$ отображение φ инъективно, и потому на множестве

$$V_0 = \varphi(U_0)$$

определено обратное отображение

$$\varphi^{-1}: V_0 \rightarrow U_0.$$

В силу соотношения (2) отображение φ^{-1} непрерывно.

Покажем, что множество V_0 открыто в пространстве R^m , т. е. что любая его точка $\varphi(t_0)$, $|t_0| < r_0$, является его внутренней точкой. Пусть $|t_0| < r < r_0$ и пусть

$$\delta = \frac{m}{4} (r - |t_0|) > 0.$$

Мы покажем, что открытый шар радиуса δ с центром в точке $\varphi(t_0)$ целиком содержится в множестве V_0 , т. е. что для любой точки $c \notin V_0$ (если такая точка существует) имеет место неравенство

$$|\varphi(t_0) - c| \geq \delta.$$

С этой целью мы рассмотрим число

$$\eta = \inf_{|t| \leq r} |\varphi(t) - c| > 0.$$

По определению, в шаре $|t| \leq r$ существует такая последовательность точек t_n , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(t_n) - c| = \eta.$$

Поскольку шар $|t| \leq r$ компактен, мы можем считать (переходя, если это нужно, к подпоследовательности), что последовательность t_n сходится к некоторой точке a . Легко видеть, что

$$|a| = r.$$

Действительно, так как $|a| \leq r < r_0$, то оператор $\varphi'(a)$ обратим и потому существует такой вектор $h \in R^m$, что

$$\varphi'(a)h = c - \varphi(a).$$

Пусть $|a| < r$ и пусть λ — настолько малое положительное число, что

$$|a + \lambda h| \leq r.$$

Так как

$$\varphi(a + \lambda h) = \varphi(a) + \lambda \varphi'(a)h + \lambda \varepsilon(\lambda),$$

где $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, то

$$\varphi(a + \lambda h) - c = (1 - \lambda)(\varphi(a) - c) + \lambda \varepsilon(\lambda),$$

и потому

$$\begin{aligned} |\varphi(a + \lambda h) - c| &\leq (1 - \lambda)|\varphi(a) - c| + \lambda|\varepsilon(\lambda)| \leq \\ &\leq (1 - \lambda)\eta + \lambda|\varepsilon(\lambda)|. \end{aligned}$$

Следовательно, если λ достаточно мало, то

$$|\varphi(a + \lambda h) - c| < \eta.$$

Это неравенство противоречит определению числа η , и, следовательно, предположение $|a| < r$ ложно.

Воспользуемся теперь неравенством (2). Согласно этому неравенству

$$\begin{aligned} |\varphi(t_0) - c| + |\varphi(t_n) - c| &\geq |\varphi(t_n) - \varphi(t_0)| \geq \\ &\geq \frac{m}{2} |t_n - t_0| \geq \frac{m}{2} (|t_n| - |t_0|). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая, что, по только что доказанному, $|t_n| \rightarrow |a| = r$, мы получим отсюда, что

$$|\varphi(t_0) - c| + \eta \geq \frac{m}{2}(r - |t_0|) = 2\delta.$$

Поскольку $\eta \leq |\varphi(t_0) - c|$, это возможно лишь при

$$|\varphi(t_0) - c| \geq \delta.$$

Для завершения доказательства теоремы об обратных функциях осталось доказать, что в открытом множестве V_0 отображение φ^{-1} гладко. С этой целью мы сначала докажем, что оно дифференцируемо, т. е. что для любой точки $t_1 \in V_0$ существует такой линейный оператор $(\varphi^{-1})'(t_1)$, что для любых двух точек $t_1, t_1 + h_1 \in V_0$ имеет место равенство

$$\varphi^{-1}(t_1 + h_1) - \varphi^{-1}(t_1) = (\varphi^{-1})'(t_1) h_1 + |h_1| \eta(h_1, t_1), \quad (3)$$

где $|\eta(h_1, t_1)| \rightarrow 0$ при $|h_1| \rightarrow 0$.

Пусть $t = \varphi^{-1}(t_1)$ и $t + h = \varphi^{-1}(t_1 + h_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(t)^{-1} h_1 &= \varphi(t)^{-1} (\varphi(t + h) - \varphi(t)) = h + |h| \varphi'(t)^{-1} \varepsilon(h, t) = \\ &= \varphi^{-1}(t_1 + h_1) - \varphi^{-1}(t_1) + |h| \varphi'(t)^{-1} \varepsilon(h, t). \end{aligned}$$

Но это означает, что для отображения φ^{-1} имеет место равенство (3) с

$$(\varphi^{-1})'(t_1) = \varphi(t)^{-1} \quad \text{и} \quad \eta(h_1, t_1) = \frac{|h|}{|h_1|} \varphi'(t)^{-1} \varepsilon(h, t).$$

Поскольку $(\varphi^{-1})'(t_1) = \varphi'(t)^{-1}$, из элементарных формул для матрицы обратного оператора немедленно следует, что все элементы матрицы оператора $(\varphi^{-1})'(t)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями координат точки t_1 . Следовательно, отображение φ^{-1} гладко.

Тем самым теорема об обратных функциях полностью доказана.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем нам придется рассматривать не одно гладкое отображение φ , а целое семейство φ_x таких отображений. Мы будем предполагать, что

1) все эти отображения определены на одном и том же шаре $|t| \leq R$;

2) для любого x якобиан D_{φ_x} отображения φ_x в точке 0 отличен от нуля;

3) параметр x пробегает некоторое топологическое пространство X ;

4) отображения φ_x непрерывно зависят от параметра x в том смысле, что функции $u_x^i(t^1, \dots, t^m)$, задающие эти отображения, непрерывно зависят от x .

В этом случае константу Липшица M можно, очевидно, выбрать так, чтобы она непрерывно зависела от параметра x . Кроме того, ясно, что число m также непрерывно зависит от x . Поэтому непрерывно от x будет зависеть и число r_0 . Таким образом,

в рассматриваемом случае радиусы r_x окрестностей точки 0 , в которых отображения φ_x являются диффеоморфизмами, можно выбрать так, чтобы они непрерывно зависели от параметра x .

3. Гладкие многообразия

Гладкое предмногообразие M называется *m -мерным гладким многообразием*, если каждая его точка p обладает окрестностью U , диффеоморфной некоторому открытому подмножеству пространства R^m . При $m=0$ каждое такое предмногообразие является дискретным пространством, т. е. состоит из отдельных изолированных точек. Поскольку этот случай неинтересен, мы всюду в дальнейшем будем предполагать, что $m > 0$.

Окрестность U точки p , предусмотренную определением гладкого многообразия, мы будем называть *координатной окрестностью* этой точки, а ее диффеоморфное отображение в пространство R^m — *координатным диффеоморфизмом*. На каждой координатной окрестности U координатный диффеоморфизм

$$\xi: U \rightarrow R^m$$

определяет согласно формуле

$$\xi(q) = (x^1(q), \dots, x^m(q)), \quad q \in U, \quad (1)$$

m вещественных функций $x^1 = x^1(q), \dots, x^m = x^m(q)$, которые мы будем называть *локальными координатами в точке p* , соответствующими данному координатному диффеоморфизму ξ .

Легко видеть, что

функции $x^1, \dots, x^m$, определенные в некоторой окрестности U точки p , тогда и только тогда являются в окрестности U локальными координатами, когда

1) определенное формулой (1) отображение

$$\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

является гомеоморфизмом окрестности U на некоторое открытое множество $U^0 \subset \mathbb{R}^m$;

2) функции $x^1, \dots, x^m$ гладки на U ;

3) каждая функция f , гладкая в точке $q \in U$, гладко зависит вблизи этой точки от функций $x^1, \dots, x^m$.

Действительно, если функции $x^1, \dots, x^m$ являются в окрестности U локальными координатами, то условие 1) выполнено по определению, условие 2) выполнено потому, что $x^i = t^i \circ \xi$, где t^i — функции на $\mathbb{R}^m$, сопоставляющие каждой точке из $\mathbb{R}^m$ ее i -ю координату, и, наконец, условие 3) выполнено потому, что, в силу гладкости обратного отображения $\xi^{-1}: U^0 \rightarrow U$, функция $f \circ \xi^{-1}$ гладка в точке $\xi(q) \in \mathbb{R}^m$, т. е. совпадает вблизи этой точки с некоторой гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией u на $\mathbb{R}^m$, и, следовательно, в соответствующей окрестности точки q имеет место равенство $f = u \circ \xi$, т. е. равенство $f = u(x^1, \dots, x^m)$.

Обратно, если функции $x^1, \dots, x^m$ удовлетворяют условиям 1) — 3), то отображение ξ будет диффеоморфизмом, так как в силу условия 1) оно гомеоморфно, в силу условия 2) гладко (ибо $u \circ \xi = u(x^1, \dots, x^m)$ для любой функции u на $\mathbb{R}^m$) и в силу условия 3) обратное отображение ξ^{-1} также гладко (ибо соотношение $f = u(x^1, \dots, x^m)$ означает, что $u = f \circ \xi^{-1}$).

Поскольку локальные координаты $x^1, \dots, x^m$, очевидно, непрерывны, из доказанного утверждения непосредственно вытекает, что

любая гладкая на гладком многообразии функция непрерывна на этом многообразии.

Ясно, что в любой точке p гладкого многообразия M существует бесконечно много различных систем локальных координат. Чтобы получить из данной системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$, определенной, скажем, в окрестности U ,

другую систему, можно, например, взять произвольную окрестность V , содержащуюся в U , и рассмотреть ограничения

$$y^1 = x^1|_V, \dots, y^m = x^m|_V$$

функций $x^1, \dots, x^m$ на окрестности V . Ясно, что функции $y^1, \dots, y^m$ будут локальными координатами в окрестности V . Можно также взять произвольный диффеоморфизм φ открытого множества $U^0 = \xi(U)$ (где ξ — координатный диффеоморфизм, определяющий локальные координаты $x^1, \dots, x^m$) на некоторое другое открытое множество V_0 пространства R^m и рассмотреть функции $y^1, \dots, y^m$, определенные диффеоморфизмом $\varphi \circ \xi$. Эти функции будут локальными координатами в той же окрестности U , что и координаты $x^1, \dots, x^m$. Легко видеть, что этих двух преобразований достаточно для того, чтобы связать друг с другом две произвольные системы локальных координат в точке p . Действительно, если одна система определена в окрестности U координатным диффеоморфизмом ξ , а другая — в окрестности V координатным диффеоморфизмом η , то в окрестности $U \cap V$ имеет место равенство $\eta = \varphi \circ \xi$, где φ — диффеоморфизм $\eta \circ \xi^{-1}: \xi(U \cap V) \rightarrow \eta(U \cap V)$.

Эти замечания вместе с теоремой об обратных функциях непосредственно приводят, в частности, к следующему утверждению, известному как теорема о замене локальных координат:

гладкие в точке p функции

$$y^i = u^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, m,$$

тогда и только тогда являются локальными координатами в этой точке, когда якобиан функций $u^1, \dots, u^m$ в точке $\xi(p) \in R^m$ отличен от нуля.

Примером локальных координат могут служить функции, определенные на некотором линейном пространстве L и сопоставляющие каждому вектору этого пространства его координаты в данном базисе. (Соответствующая координатная окрестность U совпадает при этом со всем пространством L .) Это показывает, что

любое m -мерное линейное пространство является m -мерным гладким многообразием.

В частности, m -мерным гладким многообразием является арифметическое пространство R^m .

Подпредмногообразия гладкого многообразия, вообще говоря, многообразиями не являются. Подпредмногообразие гладкого многообразия, само являющееся гладким многообразием, мы будем называть *подмногообразием* этого многообразия. Легко видеть, что

любое открытое подпредмногообразие W гладкого многообразия M является его подмногообразием.

Действительно, для любой точки $p \in W$ пересечение $U \cap W$, где U — произвольная координатная окрестность точки p в многообразии M , будет, очевидно, координатной окрестностью точки p в предмногообразии W . При этом локальными координатами в окрестности $U \cap W$ служат ограничения $x^1|_{U \cap W}, \dots, x^m|_{U \cap W}$ локальных координат $x^1, \dots, x^m$, определенных в окрестности U .

В частности,

любое открытое подмножество пространства R^m является гладким многообразием.

Пусть M и N — произвольные гладкие многообразия размерностей m и n соответственно. Рассмотрим их топологическое произведение $M \times N$ и естественные проекции

$$\pi: M \times N \rightarrow M, \quad \rho: M \times N \rightarrow N,$$

определенные соответственно формулами

$$\pi(p, q) = p, \quad \rho(p, q) = q, \quad (p, q) \in M \times N.$$

Любой функции f на M мы отнесем функцию $\hat{f}$ на $M \times N$, положив

$$\hat{f} = f \circ \pi.$$

Аналогично любой функции g на N мы отнесем функцию $\hat{g}$ на $M \times N$, положив

$$\hat{g} = g \circ \rho.$$

Таким образом,

$$\hat{f}(p, q) = f(p), \quad \hat{g}(p, q) = g(q)$$

для любой точки $(p, q) \in M \times N$.

Пусть $\mathcal{O}(M \times N)$ — совокупность всех функций на $M \times N$, которые вблизи любой точки $(p, q) \in M \times N$ гладко зависят от функций типа $\hat{f}$, $f \in \mathcal{O}(M)$ и $\hat{g}$, $g \in \mathcal{O}(N)$. Ясно, что

$\mathcal{O}(M \times N)$ представляет собой гладкость на пространстве $M \times N$. При этом

снабженное этой гладкостью пространство $M \times N$ является гладким многообразием размерности $m + n$.

Действительно, для любых локальных координат $x^1, \dots, x^m$ и $y^1, \dots, y^n$ в точках p и q многообразий M и N соответственно функции $\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m, \hat{y}^1, \dots, \hat{y}^n$ образуют, как легко видеть, систему локальных координат в точке (p, q) .

Построенное гладкое многообразие $M \times N$ мы будем называть *произведением* многообразий M и N . По самому построению

естественные проекции

$$\pi: M \times N \rightarrow M, \quad \rho: M \times N \rightarrow N$$

являются гладкими отображениями.

Произведение $M_1 \times \dots \times M_k$ конечного числа гладких многообразий $M_1, \dots, M_k$ определяется аналогично. Функциями, гладкими на этом произведении, являются, по определению, функции, гладко зависящие вблизи любой его точки от функций вида $f_i \circ \pi_i$, где $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ — естественная проекция, а f_i — произвольная гладкая на M_i функция. Естественные проекции π_i в этом случае также являются гладкими отображениями.

Ясно, что наличие на топологическом пространстве M строения гладкого многообразия налагает на это пространство довольно сильные топологические ограничения. (Строение гладкого предмногообразия таких ограничений еще не налагает.) В частности, поскольку любая точка произвольного гладкого многообразия M обладает окрестностью, гомеоморфной открытому множеству пространства $\mathbb{R}^m$, это многообразие локально компактно и имеет счетный локальный вес. Кроме того, будучи по условию хаусдорфовым, оно, в силу локальной компактности, регулярно. Таким образом,

любое гладкое многообразие является регулярным локально компактным пространством счетного локального веса.

В частности,

любое гладкое многообразие является канонным пространством второй категории.

Кроме того,
любое сепарабельное гладкое многообразие является паракомпактным пространством со счетной базой.

З а м е ч а н и е. В частности, любое сепарабельное многообразие является нормальным пространством. Для несепарабельных многообразий это, вообще говоря, неверно.

4. E-многообразия

Гладкое многообразие N мы будем называть *E-многообразием*, если для любого гладкого многообразия M , любого его компактного подмножества $C \subset M$ и любого гладкого отображения $\Psi: C \rightarrow N$ существует такое гладкое отображение $\Phi: M \rightarrow N$, что $\Psi = \Phi|_C$. В этом пункте мы докажем, что

каждое открытое выпуклое подмножество пространства R^m является E-многообразием.

С этой целью мы предварительно докажем, что для любого компактного подмножества C произвольного гладкого многообразия M и любого открытого множества $U \supset C$ существует гладкая на M функция f , принимающая значения из отрезка $I = [0, 1]$, равная единице на C и равная нулю вне U .

Это утверждение можно рассматривать как уточнение леммы Урысона для случая гладких многообразий. Предусмотренную им функцию f мы будем поэтому называть *гладкой функцией Урысона* пары (U, C) .

В первую очередь мы рассмотрим случай $M = R^m$. Пусть $a \leq t \leq b$ и пусть

$$F(t) = k \int_a^t e^{-\frac{1}{(t-a)(b-t)}} dt,$$

где нормирующий множитель k выбран так, чтобы $F(b) = 1$. Легко видеть, что все производные функции $F(t)$ в точках a и b равны нулю. Поэтому, доопределив функцию $F(t)$ для всех значений t формулой

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq a, \\ 1, & \text{если } t \geq b, \end{cases}$$

мы получим бесконечно дифференцируемую на всей оси R функцию, принимающую значения из отрезка I , равную нулю при $t \leq a$ и единице при $t \geq b$.

Пусть теперь E и $E' \supset E$ — два (замкнутых) концентрических шара пространства R^m с радиусами $\rho > 0$ и $\rho' > \rho$ соответственно. Мы определим на пространстве R^m числовую функцию g , положив для любой точки $t \in R^m$

$$g(t) = F(r),$$

где F — только что построенная функция с $a = \rho$ и $b = \rho'$, а r — расстояние точки t от общего центра шаров E и E' . Функция g бесконечно дифференцируема, принимает значения из отрезка I , равна нулю на внутренности шара E и равна единице вне шара E' .

Рассмотрим всевозможные замкнутые шары пространства R^m , содержащие хотя бы одну точку множества C и целиком содержащиеся в открытом множестве U . Поскольку множество C , по условию, компактно, существует конечная система $E_1, \dots, E_k$ таких шаров, покрывающих множество C . Поскольку множество U открыто, для каждого шара E_i существует такой концентрический шар E'_i большего радиуса, что $E'_i \subset U$. Пусть g_i — функция g , построенная для шаров E_i и E'_i . Ясно, что функция $g_1 \dots g_k$ бесконечно дифференцируема, принимает значения из отрезка I , равна нулю на внутренности каждого шара E_i , а потому и на множестве C , и равна единице вне всех шаров E'_i , а потому и вне множества U . Следовательно, функция $f = 1 - g_1 \dots g_k$ и является искомой гладкой функцией Урысона пары (U, C) .

Перейдем теперь к общему случаю произвольного многообразия M . Пусть p — произвольная точка множества C и пусть U_p — некоторая ее координатная окрестность. Поскольку многообразие M является регулярным локально компактным пространством, точка p обладает такими окрестностями W_p и V_p , что $\overline{W_p} \subset V_p$, $\overline{V_p} \subset U_p \cap U$ и замыкание $\overline{W_p}$ окрестности W_p компактно. Пусть V_p^0 и W_p^0 — образы окрестностей W_p и V_p при координатном диффеоморфизме $\xi: U_p \rightarrow R^m$. Поскольку множество $\overline{W_p^0} = \xi(\overline{W_p})$ компактно, а множество V_p^0 открыто и содержит множество W_p^0 , к этим множествам применим уже доказанный частный случай рассматриваемого утверждения. Следовательно, на пространстве

$\mathbb{R}^m$ существует бесконечно дифференцируемая функция h_p , принимающая значения из отрезка I , равная единице на множестве $\overline{W}_p^0$ и нулю вне множества V_p^0 .

Мы определим на многообразии M числовую функцию g_p , полагая для любой точки $q \in M$

$$g_p(q) = \begin{cases} h_p(x^1(q), \dots, x^m(q)), & \text{если } q \in U_p, \\ 0, & \text{если } q \notin U_p, \end{cases}$$

где $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты, определенные в окрестности U_p . Ясно, что функция g_p определена однозначно. Кроме того, вблизи любой точки $q \in M$ она либо совпадает с гладкой в q функцией $h_p(x^1, \dots, x^m)$, либо с гладкой функцией 0 (напомним, что, по условию, $\overline{V}_p \subset \overline{U}_p$). Следовательно, эта функция является гладкой на многообразии M функцией. Она принимает значения из отрезка I , равна единице на множестве $\overline{W}_p$ и нулю вне множества V_p .

Поскольку множество C компактно, в нем существует такая конечная система точек $p_1, \dots, p_k$, что соответствующие множества $\overline{W}_{p_1}, \dots, \overline{W}_{p_k}$ составляют покрытие множества C . Пусть $V_{p_1}, \dots, V_{p_k}$ — окрестности V_p , а $g_{p_1}, \dots, g_{p_k}$ — функции g_p , соответствующие точкам $p_1, \dots, p_k$. Ясно, что функция

$$f = 1 - (1 - g_{p_1}) \dots (1 - g_{p_k})$$

принимает значения из отрезка I , равна единице на любом множестве $\overline{W}_{p_i}$, а значит, и на множестве C , и равна нулю вне всех множеств V_{p_i} , а потому и вне множества U .

Таким образом, эта функция и является искомой гладкой функцией Урысона пары (U, C) .

Рассмотрим теперь вопрос об аналогичном уточнении теоремы о существовании разложения единицы.

Пусть $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ — произвольное локально конечное открытое покрытие многообразия M . Разложение единицы $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, мы будем называть *гладким*, если все составляющие его функции f_α являются гладкими на M функциями. Из только что доказанного уточнения леммы Урысона непосредственно вытекает, что

если многообразие M является нормальным пространством, то для каждого его открытого локально конечного покрытия $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, обладающего тем свойством, что для любого $\alpha \in A$ замыкание $\bar{U}_\alpha$ множества U_α компактно, существует подчиненное этому покрытию гладкое разложение единицы $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно повторить (с соответствующими тривиальными изменениями) доказательство аналогичного утверждения из п. 3 гл. 1.

Важное видоизменение предыдущего предложения мы получим, рассмотрев в многообразии M (уже не обязательно нормальном) произвольное компактное подмножество C . Пусть $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ — произвольное семейство открытых множеств многообразия M , являющееся покрытием множества C (т. е. такое, что $C \subset \bigcup U_\alpha$). Семейство $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$ гладких на M функций f_α мы будем называть *подчиненным покрытием* $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$, *гладким разложением единицы на множестве C* , если

1) для любого $\alpha \in A$ функция f_α неотрицательна и ее носитель $\overline{[f_\alpha \neq 0]}$ содержится в множестве U_α ;

2) для любой точки $p \in C$ имеет место равенство

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) = 1.$$

При этом, естественно, предполагается, что последнее условие имеет смысл. Это предположение заведомо выполнено, если покрытие $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ конечно. С другой стороны, ввиду компактности множества C предположение о конечности покрытия $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ общности, по существу, не ограничивает. В дальнейшем мы всегда будем считать, что это покрытие конечно.

Предположим теперь, что для (конечного) покрытия $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ существует такое открытое (в M) покрытие $\{V_\alpha; \alpha \in A\}$ множества C , что для любого $\alpha \in A$ множество $\bar{V}_\alpha$ компактно и содержится в U_α . (Это условие заменяет теперь как условие нормальности многообразия M , так и условие компактности множеств $\bar{U}_\alpha$.) Оказывается, что

в этом предположении существует подчиненное покрытие $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ гладкое разложение единицы на множестве C .

Действительно, пусть h_α — гладкая функция Урысона пары $\{U_\alpha, \overline{V}_\alpha\}$. Рассмотрим функцию

$$g_\alpha = \frac{h_\alpha}{\sum_{\alpha \in A} h_\alpha}.$$

Так как $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha \neq 0$ на $V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, то функция g_α определена на открытом множестве V и является гладкой на V функцией. При этом

$$\sum_{\alpha \in A} g_\alpha = 1 \text{ на } V.$$

Поскольку многообразие M является регулярным пространством, компактное множество C обладает такой окрестностью W , что $\overline{W} \subset V$. Пусть h — гладкая функция Урысона пары (W, C) . Для любого $\alpha \in A$ мы определим на многообразии M функцию f_α , положив

$$f_\alpha(p) = \begin{cases} g_\alpha(p) h(p), & \text{если } p \in V, \\ 0, & \text{если } p \notin V. \end{cases}$$

Ясно, что эта функция гладка на M и ее носитель содержится в множестве U_α . Кроме того,

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1 \text{ на } C.$$

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Теперь мы можем без труда доказать, что *числовая ось $\mathbb{R}$ является E-многообразием.*

Действительно, пусть M — произвольное гладкое многообразие и C — его произвольное компактное подмножество. Мы должны доказать, что для любой гладкой на C функции g существует такая гладкая на M функция f , что $f|_C = g$. Пусть p — произвольная точка множества C . По определению гладких на C функций, существуют такая окрестность $U_p \subset M$ точки p и такая гладкая на M функция g_p , что

$$g|_{U_p \cap C} = g_p|_{U_p \cap C}.$$

Пусть V_p — окрестность точки p , замыкание $\overline{V_p}$ которой компактно и содержится в окрестности U_p . Поскольку множество C компактно, существует такая конечная система точек $p_1, \dots, p_n \in C$, что множество

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_{p_i}$$

содержит множество C . Ясно, что соответствующие окрестности $U_{p_1}, \dots, U_{p_n}$ составляют покрытие множества C , удовлетворяющее всем условиям предыдущего предложения. Пусть $\{f_1, \dots, f_n\}$ — соответствующее гладкое разложение единицы на множестве C . Так как для любой точки $p \in C$ и любого $i = 1, \dots, n$ либо $g_{p_i}(p) = g(p)$ (если $p \in U_i \cap C$), либо $f_i(p) = 0$ (если $p \notin U_{p_i} \cap C$), то формула

$$f = f_1 g_{p_1} + \dots + f_n g_{p_n}$$

определяет на M гладкую функцию, обладающую требуемым свойством (т. е. совпадающую на C с функцией g).

Тем самым сформулированное выше утверждение (представляющее собой аналог теоремы Титце) полностью доказано.

З а м е ч а н и е. Ясно, что носитель $\overline{[f \neq 0]}$ построенной функции f компактен. Таким образом, мы на самом деле доказали, что

любая гладкая на компактном подмножестве C многообразия M функция является ограничением некоторой гладкой на M функции, обладающей компактным носителем.

Из доказанного утверждения вытекает, что для любого $m \geq 1$ арифметическое m -мерное пространство R^m является E -многообразием.

Действительно, любое гладкое отображение $C \rightarrow R^m$ задается m гладкими функциями, и для того чтобы распространить это отображение на все многообразие M , достаточно распространить на M эти функции.

Рассмотрим теперь единичный открытый шар E^m пространства R^m . Легко видеть, что

шар E^m диффеоморфен пространству R^m .

Действительно, сопоставляя каждой точке $t = (t^1, \dots, t^m)$ пространства R^m точку v шара E^m с координатами

$$v^i = \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{arctg} |t|}{|t|} t^i, \quad i = 1, \dots, m,$$

мы, очевидно, получим диффеоморфизм

$$R^m \rightarrow E^m.$$

Поскольку многообразие, диффеоморфное E -многообразию, само, очевидно, является E -многообразием, отсюда вытекает, что

шар E^m является E -многообразием.

Пусть теперь D — произвольное открытое ограниченное выпуклое подмножество пространства R^m . Для доказательства того, что это подмножество является E -многообразием, достаточно, согласно сказанному выше, доказать, что оно диффеоморфно шару E^m .

С этой целью мы выберем произвольную точку $x_0 \in D$ и рассмотрим функцию $\varphi(u)$ векторов $u \in S^{m-1}$, определяющую границу тела $P = \overline{D}$ в «полярных координатах» с центром в точке x_0 . Простые элементарно геометрические соображения показывают, что функция φ удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует такое число L , что

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

для любых точек $u_1, u_2 \in S^{m-1}$.

С другой стороны, легко видеть, что

для любой удовлетворяющей условию Липшица функции φ на сфере S^{m-1} существует в замкнутом единичном шаре E^m такая непрерывная функция g , что

1) *функция g в открытом шаре E^m является гладкой функцией;*

2) *на сфере S^{m-1} функция g совпадает с функцией φ ;*

3) *в точке 0 функция g отлична от нуля;*

4) *вдоль каждого радиуса шара E^m функция g монотонно возрастает.*

Такую функцию g можно, например, определить формулой

$$g(vu) = A \left(e^{1 - \frac{1}{v^2}} - 1 \right) + \\ + \frac{2^n e^{1 - \frac{1}{v^2}}}{(1 - v^n)} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{i=1}^m \omega \left(\frac{2(t^i - u^i)}{1 - v} \right) \right] \varphi \left(\frac{t}{|t|} \right) dt^1 \dots dt^m, \\ 0 \leq v \leq 1, u \in S^{m-1},$$

где

1) A — некоторое достаточно большое положительное число;

2) $u^1, \dots, u^m$ — координаты точки $u \in S^{m-1}$;

3) t — точка пространства R^m с координатами $t^1, \dots, t^m$;

4) $\omega(t)$ — гладкая функция, определенная формулой

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{\frac{1}{t^2 - 1}}, & \text{если } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |t| \geq 1, \end{cases} \quad k = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{t^2 - 1}} dt.$$

Проверка того, что так определенная функция g удовлетворяет всем условиям 1) — 4), вполне элементарна и мы ее опустим.

Построив для соответствующей выпуклому множеству D функции φ функцию g , мы определим отображение

$$\Phi: E^m \rightarrow D,$$

положив для любой точки $vu \in E^m$, $0 \leq v < 1$, $u \in S^{m-1}$,

$$\Phi(vu) = x_0 + g(vu)u.$$

Без труда проверяется, что построенное таким образом отображение Φ является диффеоморфизмом. Тем самым мы доказали, что

любое открытое ограниченное выпуклое подмножество D пространства R^m диффеоморфно шару E^m и потому является E -многообразием.

Рассмотрим, наконец, случай, когда открытое выпуклое множество D не ограничено. Пусть M — произвольное гладкое многообразие, C — его произвольное компактное подмножество и Ψ — произвольное гладкое отображение множества C в выпуклое множество D . Поскольку множество C компактно, а отображение Ψ непрерывно, образ $\Psi(C)$ множества C при отображении Ψ компактен и потому ограничен, т. е. содержится в некотором открытом шаре пространства $\mathbb{R}^m$ достаточно большого радиуса. Пусть D' — пересечение множества D с этим шаром. Множество D' открыто, ограничено и выпукло. Поэтому, согласно уже доказанному, это множество является E -многообразием. С другой стороны, так как $\Psi(C) \subset D'$, то отображение Ψ мы можем рассматривать как отображение $C \rightarrow D'$. Следовательно, существует такое гладкое отображение $\Phi: M \rightarrow D'$, что $\Phi|_C = \Psi$. Наконец, поскольку $D' \subset D$, мы можем считать, что отображение Φ представляет собой гладкое отображение $M \rightarrow D$.

Тем самым сформулированное в начале этого пункта предложение полностью доказано.

З а м е ч а н и е. Случай неограниченного выпуклого множества D можно рассмотреть аналогично случаю ограниченного множества, доказав, что любое такое множество также диффеоморфно шару E^m . Если множество D не содержит ни одной прямой (к этому типу, например, относится внутренность параболоида вращения), то посредством подходящего проективного преобразования оно немедленно преобразуется в некоторое ограниченное выпуклое множество. Если же множество D содержит хотя бы одну прямую, то, как нетрудно доказать, оно представляет собой цилиндр над некоторым m — 1-мерным выпуклым множеством. В этом случае диффеоморфизм множества D на шар E^m легко строится индукцией по числу m .

Рассмотрим в заключение произвольное открытое подмногообразие W некоторого гладкого многообразия M . По определению, ограничение $f|_W$ произвольной гладкой на M функции f является гладкой на W функцией. Другими словами, соответствие $f \rightarrow f|_W$ определяет некоторое отображение (так называемое отображение ограничения)

$$\mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(W),$$

являющееся, очевидно, гомоморфизмом алгебры $\mathcal{O}(M)$ в алгебру $\mathcal{O}(W)$.

Вообще говоря, отображение ограничения $\mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(W)$ эпиморфизмом не является, т. е. (в отличие от случая компактных подпредмногообразий) не любая гладкая на W функция является ограничением некоторой функции, гладкой на M . Однако из доказанных выше результатов непосредственно следует, что это отображение *локально эпиморфно* в том смысле, что

каково бы ни было открытое множество $V \subset W$, замыкание $\bar{V}$ которого компактно и содержится в W , для любой гладкой на W функции g существует такая гладкая на M функция f , что $f|_V = g|_V$.

5. Векторные поля

Пусть M — произвольное гладкое многообразие. *Векторным полем* на многообразии M мы будем называть произвольное дифференцирование алгебры $\mathcal{O}(M)$, т. е. такое линейное отображение X этой алгебры в себя, что

$$X(fg) = f \cdot Xg + Xfg.$$

для любых функций $f, g \in \mathcal{O}(M)$. Очевидно, что совокупность $\mathcal{O}^1(M)$ всех векторных полей на многообразии M является $\mathcal{O}(M)$ -модулем относительно операций

$$\begin{aligned} (X + Y)g &= Xg + Yg, & X, Y &\in \mathcal{O}^1(M), & g &\in \mathcal{O}(M), \\ (fX)g &= f \cdot Xg, & X &\in \mathcal{O}^1(M), & f, g &\in \mathcal{O}(M). \end{aligned}$$

Кроме того, легко видеть, что для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$ отображение

$$[X, Y]: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(M),$$

определенное формулой

$$[X, Y]g = X(Yg) - Y(Xg), \quad g \in \mathcal{O}(M),$$

также является векторным полем, причем операция $[X, Y]$ определяет модуль $\mathcal{O}^1(M)$ как алгебру Ли, т. е. эта операция антикоммутативна:

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad X, Y \in \mathcal{O}^1(M),$$

и удовлетворяет тождеству Якоби:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \\ X, Y, Z \in \mathcal{O}^{-1}(M).$$

Пусть W — произвольное открытое подмногообразие многообразия M и пусть X — произвольное векторное поле на M . Как было отмечено в конце предыдущего пункта, для любой гладкой на W функции g и любой точки $p \in W$ существует на многообразии M такая гладкая функция f , что $g = f$ на некоторой окрестности точки p . Пусть f_1 и f_2 — две гладкие на M функции, обладающие этим свойством, и пусть V — такая окрестность точки p , что $f_1 = f_2 = g$ на V . Пусть, кроме того, h — гладкая функция на многообразии M , равная единице в некоторой точке $q \in V$ и нулю вне окрестности V . Тогда $h(f_1 - f_2) = 0$ на M и потому

$$h \cdot X(f_1 - f_2) + Xh \cdot (f_1 - f_2) = 0 \quad \text{на } M.$$

Поскольку

$$h(q) = 1, \quad f_1(q) = f_2(q), \quad X(f_1 - f_2) = Xf_1 - Xf_2,$$

отсюда вытекает, что

$$(Xf_1)(q) - (Xf_2)(q) = (Xh)(q) \cdot (f_1(q) - f_2(q)) = 0,$$

т. е. что

$$(Xf_1)(q) = (Xf_2)(q).$$

Следовательно, положив

$$\bar{g}(q) = (Xf)(q), \quad q \in V,$$

где f — произвольная гладкая на M функция, для которой $f|_V = g|_V$, мы получим на V некоторую однозначно определенную, гладкую на V , функцию $\bar{g}$. Ясно, что функции $\bar{g}$, соответствующие различным окрестностям V точки p , принимают в точке p одно и то же значение. Поэтому, положив

$$(Yg)(p) = \bar{g}(p), \quad p \in V,$$

мы однозначно определим на W некоторую функцию Yg . Эта функция вблизи любой точки $p \in W$ совпадает с гладкой в p функцией $\bar{g}$ и потому сама является гладкой на W .

функцией. Следовательно, соответствие $g \rightarrow Yg$ определяет некоторое отображение

$$Y: \mathcal{O}(W) \rightarrow \mathcal{O}(W),$$

причем без труда проверяется, что это отображение представляет собой дифференцирование алгебры $\mathcal{O}(W)$, т. е. является векторным полем на многообразии W .

Поле Y мы будем называть *ограничением* поля X на открытом подмногообразии W и будем обозначать его символом $X|_W$ и даже просто символом X , если недоразумение исключено. Легко проверяется, что отображение ограничения

$$\mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(W),$$

сопоставляющее каждому полю $X \in \mathcal{O}^1(M)$ поле $X|_W \in \mathcal{O}^1(W)$, сохраняет все введенные выше алгебраические операции, т. е. является как гомоморфизмом модулей (если $\mathcal{O}(W)$ -модуль $\mathcal{O}^1(W)$ рассматривать в силу отображения ограничения $\mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(W)$ как $\mathcal{O}(M)$ -модуль), так и гомоморфизмом алгебр Ли.

Так же как и для функций, отображение ограничения $\mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(W)$, вообще говоря, не эпиморфно, т. е. не всякое поле $Y \in \mathcal{O}^1(W)$ является ограничением некоторого поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$. Оно лишь *локально эпиморфно* в том смысле, что,

каково бы ни было открытое множество $V \subset W$, замыкание $\bar{V}$ которого компактно и содержится в W , для любого поля $Y \in \mathcal{O}^1(W)$ существует такое поле $X \in \mathcal{O}^1(M)$, что

$$X|_V = Y|_V.$$

Это поле X можно определить, например, формулой

$$(Xf)(p) = \begin{cases} h(p) \cdot (Y(f|_W))(p), & \text{если } p \in W, \\ 0, & \text{если } p \notin W, \end{cases}$$

где f — произвольная гладкая на M функция, p — произвольная точка многообразия M , а h — гладкая на M функция, равная единице на $\bar{V}$ и равная нулю вне некоторого открытого множества $U \supset \bar{V}$, замыкание $\bar{U}$ которого принадлежит W .

В частном случае, когда открытое подмногообразие W является координатной окрестностью U , можно легко описать все векторные поля на W . Пусть $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты, определенные в окрестности U . Как мы знаем, для любой гладкой на U функции f и любой точки $p \in U$ существует такая окрестность $V \subset U$ точки p , что на V функция f гладко зависит от координат $x^1, \dots, x^m$, т. е.

$$f = u(x^1, \dots, x^m) \text{ на } V,$$

где $u = u(t^1, \dots, t^m)$ — некоторая гладкая на $\mathbb{R}^m$ функция (однозначно определенная функцией f). Пусть V_1 — другая окрестность точки p , обладающая тем же свойством, т. е. такая, что $f = u_1(x^1, \dots, x^m)$ на V_1 , где $u_1 = u_1(t^1, \dots, t^m)$ — некоторая гладкая на $\mathbb{R}^m$ функция. Ясно, что функции u и u_1 совпадают в некоторой окрестности точки $\xi(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ (а именно, в окрестности $\xi(V \cap V_1)$, являющейся образом при координатном диффеоморфизме $\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ окрестности $V \cap V_1$ точки p), и потому их частные производные $\frac{\partial u}{\partial t^i}$ и $\frac{\partial u_1}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, m$, принимают в точке $\xi(p)$ одно и то же значение. Отсюда вытекает, что формула

$$h_i(p) = \left(\frac{\partial u}{\partial t^i} \right)_{\xi(p)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

однозначно определяет на U некоторые функции $h_1, \dots, h_m$. В окрестности V функции h_i совпадают с гладкими функциями $\frac{\partial u}{\partial t^i}(x^1, \dots, x^m)$ и потому являются гладкими в p функциями. Поскольку точка p произвольна, это означает, что каждая функция h_i гладка на U . Мы будем обозначать ее символом $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ и называть *частной производной* функции f по координате x^i . Согласно этому определению,

если

$$f = u(x^1, \dots, x^m) \text{ на } V \subset U,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial t^i}(x^1, \dots, x^m) \text{ на } V.$$

Без труда проверяется, что отображение

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

представляет собой векторное поле на U и что построенные таким образом векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

где δ_i^j — символ Кронекера ($\delta_i^j = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_i^j = 1$, если $i = j$).

В частности, мы видим, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ линейно независимы (в $\mathcal{O}(U)$ -модуле $\mathcal{O}^1(U)$).

В частном случае $M = \mathbb{R}^m$ за окрестность U можно принять все пространство $\mathbb{R}^m$, а за локальные координаты $x^1, \dots, x^m$ — функции, сопоставляющие каждой точке $t \in \mathbb{R}^m$ ее координаты $t^1, \dots, t^m$. Ясно, что в этом случае

векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ представляют собой обычные операции частного дифференцирования по переменным $t^1, \dots, t^m$.

В частности, при $m = 1$ имеется лишь одна координата $t = t^1$ и мы получаем, что

векторное поле $\frac{\partial}{\partial t}$ представляет собой дифференцирование $\frac{d}{dt}$ по переменной t .

Возвращаясь к гладкой на U функции f и окрестности V в которой $f = u(x^1, \dots, x^m)$, мы, не теряя общности, можем очевидно, считать, что образ $\xi(V)$ окрестности V при координатном диффеоморфизме

$$\xi(q) = (x^1(q), \dots, x^m(q)), \quad q \in V$$

является открытым шаром пространства $\mathbb{R}^m$ с центром в точке 0 . В этом открытом шаре функция $u(t^1, \dots, t^m)$

допускает представление¹⁾

$$\begin{aligned} u(t^1, \dots, t^m) &= u(0, \dots, 0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} u(st^1, \dots, st^m) ds = \\ &= u(0, \dots, 0) + t^i \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t^i}(st^1, \dots, st^m) ds. \end{aligned}$$

Следовательно, определив на V гладкие функции $g_i = g_i(q)$ формулой

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t^i}(sx^1(q), \dots, sx^m(q)) ds,$$

мы получим соотношение

$$f = f(p) + x^i g_i \text{ на } V, \quad (1)$$

где число $f(p)$ рассматривается как постоянная функция на V , принимающая во всех точках $q \in V$ одно и то же значение $f(p)$.

Пусть X — произвольное векторное поле на окрестности U . Легко видеть, что формула

$$X_p f = (Xf)(p), \quad p \in U, f \in \mathcal{O}(p),$$

где справа под X подразумевается ограничение поля X на соответствующей окрестности точки p , определяет некоторое линейное отображение X_p алгебры $\mathcal{O}(p)$ в поле $\mathbf{R}$, обладающее тем свойством, что

$$X_p(fg) = X_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p g \quad (2)$$

для любых функций $f, g \in \mathcal{O}(p)$.

Из соотношения (2) немедленно вытекает, что

$$X_p(c) = 0 \text{ для любой постоянной } c.$$

¹⁾ Здесь, как и всюду в дальнейшем, мы (следуя принятому в тензорном исчислении соглашению) считаем, что по двум одинаковым индексам, один из которых верхний, а другой — нижний, производится суммирование (пределы которого каждый раз ясны из контекста).

Поэтому, применив отображение X_p к обеим частям формулы (1), мы получим, что

$$X_p f = X_p x^i \cdot g_i(p).$$

Но,

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t^i}(0, \dots, 0) ds = \frac{\partial u}{\partial t^i}(0, \dots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Таким образом,

$$X_p f = X_p x^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \quad (3)$$

Так как по определению $X_p = (Xf)(p)$ и так как функция f является произвольной гладкой на U функцией, а p — произвольной точкой из U , то

$$X = X x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ на } U. \quad (4)$$

Поскольку поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ линейно независимы, тем самым доказано, что

модуль $\mathcal{O}^1(U)$ над алгеброй $\mathcal{O}(U)$ обладает базисом $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$, состоящим из m элементов; любое поле $X \in \mathcal{O}^1(U)$ выражается через этот базис по формуле (4).

В частном случае, когда $M = \mathbf{R}^m$, мы получаем отсюда, что частные дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^m}$ составляют базис модуля $\mathcal{O}^1(\mathbf{R}^m)$.

Состоящий из m полей базис $X_1, \dots, X_m$ модуля $\mathcal{O}^1(U)$ мы будем называть голономным, если в U существует такая система локальных координат $x^1, \dots, x^m$, что

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X_m = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

В противном случае базис $X_1, \dots, X_m$ мы будем называть неголономным.

В любом базисе $X_1, \dots, X_m$ модуля $\mathcal{O}^1(U)$, состоящем из m полей, каждое поле $X \in \mathcal{O}^1(U)$ имеет вид

$$X = X^i X_i,$$

где X^i — некоторые гладкие на U функции. Эти функции однозначно определены полем X и называются его *компонентами* в базисе $X_1, \dots, X_m$. Согласно формуле (4) для голономного базиса

$$X^i = Xx^i.$$

Линейные операции, определенные в модуле $\mathcal{O}^1(U)$, выражаются через компоненты согласно формулам

$$\begin{aligned} (fX)^i &= fX^i, & f \in \mathcal{O}(U), & X \in \mathcal{O}^1(U), \\ (X + Y)^i &= X^i + Y^i, & X, Y \in \mathcal{O}^1(U). \end{aligned}$$

Что же касается операции Ли $[X, Y]$, то для нее имеет место следующее утверждение:

если базис $X_1, \dots, X_m$ голономен, то

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}. \quad (5)$$

Действительно,

$$[X, Y]^i = [X, Y]x^i = X(Yx^i) - Y(Xx^i) = X(Y^i) - Y(X^i).$$

Из формулы (5), в частности, следует, что

для любого голономного базиса $X_1, \dots, X_m$ имеют место равенства

$$[X_i, X_j] = 0. \quad (6)$$

В общем же случае

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k,$$

где c_{ij}^k — некоторые гладкие на U функции, и формула (5) заменяется формулой

$$[X, Y]^i = X^j \cdot X_j(Y^i) - Y^j \cdot X_j(X^i) + 2c_{jk}^i X^j Y^k.$$

З а м е ч а н и е. Формула (6) означает, что результат применения двух операций $\frac{\partial}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial}{\partial x^j}$ и произвольной гладкой на U функции не зависит от того, какая из этих операций применяется первой. Другими словами, как и в элементарном анализе,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}.$$

6. Векторы

Введенное в предыдущем пункте линейное отображение

$$X_p: \mathcal{O}(p) \rightarrow R$$

мы будем называть *вектором поля X в точке p* . Линейное отображение $A: \mathcal{O}(p) \rightarrow R$ мы будем называть *вектором многообразия M в точке p* , если в некоторой окрестности точки p (или, что равносильно, на всем многообразии M) существует такое векторное поле X , что $X_p = A$. Легко видеть, что

линейное отображение $A: \mathcal{O}(p) \rightarrow R$ тогда и только тогда является вектором многообразия M в точке p , когда

$$A(fg) = Af \cdot g(p) + f(p) \cdot Ag$$

для любых функций $f, g \in \mathcal{O}(p)$.

Необходимость этого условия немедленно вытекает из соотношения (2) п. 5. С другой стороны, при доказательстве формулы (3) п. 5 мы использовали только соотношение (2), так что для любого линейного отображения $A: \mathcal{O}(p) \rightarrow R$, удовлетворяющего условиям теоремы, будет иметь место аналогичная формула

$$Af = a^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad \text{где } a^i = Ax^i, \quad (1)$$

и потому векторное поле X , определенное на координатной окрестности U формулой

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

будет обладать тем свойством, что $X_p = A$.

Совокупность всех векторов многообразия M в точке p является, очевидно, линейным пространством над полем R . Это пространство называется *касательным пространством* многообразия M в точке p и обозначается символом M_p или символом $\mathcal{O}^1(p)$. Оно содержит, в частности, векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p, \quad (2)$$

где $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат в точке p . Векторы (2) линейно независимы и любой вектор

$A \in M_p$ через них линейно выражается:

$$A = Ax^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

(см. формулу (1)). Тем самым доказано, что

для любой точки $p \in M$ размерность пространства M_p равна размерности m многообразия M .

Пусть, в частности, многообразие M представляет собой m -мерное линейное пространство L . Легко видеть, что для любого вектора $A \in L$ и любой гладкой на L функции f функция $\frac{\partial f}{\partial A}$, определенная формулой

$$\frac{\partial f}{\partial A}(B) = \frac{df(B + tA)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad B \in L,$$

является гладкой на L функцией и получающееся отображение $\frac{\partial}{\partial A} : \mathcal{O}(L) \rightarrow \mathcal{O}(L)$ представляет собой векторное поле на L .

Пусть $A_1, \dots, A_m$ — произвольный базис пространства L . Полагая $f(B) = f(b^1, \dots, b^m)$, где $b^1, \dots, b^m$ — координаты вектора B в базисе $A_1, \dots, A_m$, мы немедленно получим, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A_i} \right)_B = \frac{\partial f}{\partial b^i}.$$

Отсюда следует, что

для любого вектора $B \in L$ векторы $\left(\frac{\partial}{\partial A_i} \right)_B, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial A_m} \right)_B$ линейно независимы и составляют базис касательного пространства L_B .

Это означает, в частности, что

для любого вектора $B \in L$ отображение $A \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial A} \right)_B$ пространства L в пространство L_B является изоморфизмом.

В дальнейшем мы, как правило, будем векторы A и $\left(\frac{\partial}{\partial A} \right)_B$ отождествлять и, таким образом, будем считать, что $L = L_B$.

Возвращаясь к произвольному гладкому многообразию M , рассмотрим множество

$$M_* = \bigcup_{p \in M} M_p$$

всех его векторов во всех точках $p \in M$. Обозначая для каждого вектора $A \in M_*$ символом $\mu(A)$ точку p многообразия M , для которой $A \in M_p$, мы получим некоторое однозначное отображение

$$\mu: M_* \rightarrow M.$$

Пусть U — произвольная координатная окрестность в многообразии M и пусть

$$U_* = \mu^{-1}(U)$$

— ее полный прообраз при отображении μ . Выбрав в окрестности U локальные координаты $x^1, \dots, x^m$ и построив соответствующий координатный гомеоморфизм ξ окрестности U на открытое множество U^0 пространства R^m , мы определим отображение

$$\xi_*: U_* \rightarrow U^0 \times R^m$$

множества U_* в топологическое произведение $U^0 \times R^m \subset R^{2m}$, положив для любой точки $A \in U_*$

$$\xi_*(A) = (t, a),$$

где t — образ точки $p = \mu(A)$ при гомеоморфизме ξ , а $a = (a^1, \dots, a^m)$ — такая точка пространства R^m , что

$$A = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Легко видеть, что отображение ξ_* биективно.

Мы введем в множество U_* топологию, относительно которой отображение ξ_* является гомеоморфизмом. Ясно, что эта топология однозначно определена и не зависит от выбора системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$. В частности, для любых двух координатных окрестностей $U, V \subset M$ топологии, индуцированные топологиями множеств U_* и V_* на множестве $U_* \cap V_* = (U \cap V)_*$, друг с другом совпадают, т. е. пересечение $U_* \cap V_*$ является подпространством каждого из пространств U_* и V_* . Кроме того, ясно, что это подпространство открыто в обоих пространствах U_* и V_* . Поэтому (см. п. 1 гл. 1) на множестве M_* существует единственная топология, относительно которой это множество является свободным объединением всех подпространств вида U_* . Очевидно, что в этой топологии множество M_* представляет собой хаусдорфово пространство.

Вещественную функцию F , заданную на пространстве M_* , мы будем считать гладкой, если для любой координатной окрестности $U \subset M$ и любой определенной на окрестности U системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$ функция $F \circ \xi_*^{-1}$ на произведении $U^0 \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$, где ξ_* — построенное выше отображение $U_* \rightarrow U^0 \times \mathbb{R}^m$, является гладкой на $U^0 \times \mathbb{R}^m$ функцией. Без труда проверяется, что совокупность $\mathcal{O}(M_*)$ всех гладких на M_* функций является гладкостью на M_* и что снабженное этой гладкостью пространство M_* представляет собой гладкое многообразие. За координатные окрестности в M_* можно принять, например, подпространства U_* , а за координатные гомеоморфизмы — отображения

$$\xi_* : U_* \rightarrow \mathbb{R}^{2m}.$$

Построенное $2m$ -мерное гладкое многообразие M_* мы будем называть *многообразием касательных векторов* многообразия M .

Непрерывные отображения

$$X : M \rightarrow M_*$$

многообразия M в многообразие M_* , для которых

$$\mu \circ X = 1_M,$$

т. е. такие, что $X(p) \in M_p$ для любой точки $p \in M$, мы будем называть *непрерывными векторными полями на многообразии M* . Непрерывное поле X , являющееся гладким отображением многообразия M в многообразие M_* , мы будем называть *гладким векторным полем на многообразии M* .

Условие гладкости поля X означает, по определению, что для любой гладкой на M_* функции F функция $f(p) = F(X(p))$ точки $p \in M$ является гладкой на M функцией. Поскольку для каждого координатного гомеоморфизма $\xi_* : U_* \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ имеет место соотношение

$$f = (F \circ \xi_*^{-1}) \circ (\xi_* \circ X|_U),$$

это условие равносильно условию гладкости (для каждой координатной окрестности $U \subset M$) отображения

$$\xi_* \circ X|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^{2m}.$$

Пусть $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты в окрестности U , с помощью которых был построен гомеоморфизм ξ_* , и пусть

$$X^i(p) = X(p) x^i$$

— координаты вектора $X(p)$, $p \in U$, в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$. Тогда, согласно, определению гомеоморфизма ξ_* ,

$$(\xi_* \circ X)(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p), X^1(p), \dots, X^m(p))$$

для любой точки $p \in U$. Поскольку локальные координаты $x^1, \dots, x^m$ являются гладкими на U функциями, отсюда следует, что отображение $\xi_* \circ X|_U$ тогда и только тогда гладко, когда гладки все функции $X^i(p)$. Поскольку для любой гладкой на U функции f имеет место равенство

$$X(p)f = X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

мы тем самым окончательно получаем, что

непрерывное векторное поле

$$X: M \rightarrow M_*$$

тогда и только тогда гладко, когда для любой гладкой на M функции f функция

$$g(p) = X(p)f$$

точки $p \in M$ является гладкой на M функцией.

Рассмотрим теперь на многообразии M произвольное векторное поле $X: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(M)$ в смысле предыдущего пункта. Ясно, что, полагая

$$X(p) = X_p, \quad p \in M,$$

мы получим некоторое отображение

$$X: M \rightarrow M_*,$$

являющееся непрерывным векторным полем на многообразии M . При этом, поскольку для любой гладкой на M функции f имеет место равенство

$$X(p)f = X_p f = (Xf)(p),$$

построенное таким образом непрерывное векторное поле $X: M \rightarrow M_*$ гладко.

Обратно, пусть $X: M \rightarrow M_*$ — произвольное гладкое векторное поле на многообразии M . Определим отображение $X: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(M)$ алгебры $\mathcal{O}(M)$ в себя, полагая

$$(Xf)(p) = X(p)f$$

для любой гладкой на M функции f и любой точки $p \in M$. Ясно, что определенное таким образом отображение X алгебры $\mathcal{O}(M)$ в себя линейно. Кроме того, для любых функций $f, g \in \mathcal{O}(M)$ в каждой точке $p \in M$ имеет место равенство

$$X(fg)(p) = X(p)(fg) = X(p)f \cdot g(p) + f(p) \cdot X(p)g = \\ = (Xf \cdot g + f \cdot Xg)(p).$$

Следовательно, отображение X является дифференцированием алгебры $\mathcal{O}(M)$, т. е. векторным полем на многообразии M в смысле предыдущего пункта. Таким образом,

понятие гладкого векторного поля, по существу, совпадает с понятием векторного поля как дифференцирования алгебры $\mathcal{O}(M)$.

Понятие вектора в точке позволяет указать простое, но часто полезное, необходимое и достаточное условие того, что система m векторных полей $X_1, \dots, X_m$, определенных на координатной окрестности U , составляет базис (не обязательно голономный) модуля $\mathcal{O}^1(U)$. Именно, как легко видеть

векторные поля $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{O}^1(U)$ тогда и только тогда составляют базис $\mathcal{O}(U)$ -модуля $\mathcal{O}^1(U)$, когда для любой точки $p \in U$ векторы

$$(X_1)_p, \dots, (X_m)_p$$

составляют базис пространства M_p .

Действительно, пусть поля $X_1, \dots, X_m$ составляют базис $\mathcal{O}(U)$ -модуля $\mathcal{O}^1(U)$ и пусть A — произвольный вектор пространства M_p . По определению, на окрестности U существует такое векторное поле $X \in \mathcal{O}^1(U)$, что $X_p = A$. Пусть

$$X = X^i X_i$$

— разложение поля X по базису $X_1, \dots, X_m$. Тогда

$$A = X^i(p) \cdot (X_i)_p.$$

Следовательно, векторы $(X_1)_p, \dots, (X_m)_p$ порождают пространство M_p . Так как их m , то они линейно независимы, т. е. составляют базис.

Обратно, пусть поля $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{O}^1(U)$ обладают тем свойством, что для любой точки $p \in U$ векторы $(X_1)_p, \dots, (X_m)_p$ составляют базис пространства M_p , и пусть X — произвольное векторное поле на окрестности U . Тогда в любой точке $p \in U$ имеет место разложение

$$X = \hat{X}^i(p) \cdot (X_i)_p,$$

где $\hat{X}^i(p)$ — некоторые функции точки p . Пусть $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты, определенные в окрестности U . Тогда для любого $j = 1, \dots, m$ имеет место равенство

$$X_p x^j = \hat{X}^i(p) \cdot (X_i)_p x^j.$$

Но числа $X_p x^j$ являются, как мы знаем, значениями в точке p компонент $X^j = X x^j$ поля X в базисе $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$. Аналогично $(X_i)_p x^j = X_i^j(p)$, где X_i^j — компоненты поля X_i в базисе $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$. Таким образом,

$$X^j(p) = \hat{X}^i(p) \cdot X_i^j(p). \quad (3)$$

Ясно, что определитель $\det |X_i^j(p)|$ в любой точке $p \in U$ отличен от нуля. Поэтому мы можем по известным формулам Крамера выразить числа $\hat{X}^i(p)$ через числа $X^j(p)$ и $X_i^j(p)$. Поскольку компоненты X^j и X_i^j являются гладкими функциями точки p , отсюда следует, что функции $\hat{X}^i = \hat{X}^i(p)$ также гладко зависят от p . Таким образом,

$$X = \hat{X}^i X_i,$$

где $\hat{X}^i$ — гладкие на U функции. Следовательно, поля $X_1, \dots, X_m$ порождают $\mathcal{O}(U)$ -модуль $\mathcal{O}^1(U)$. Так как они, очевидно, линейно независимы, то они составляют базис этого модуля.

Из доказанного предложения немедленно вытекает, что для любой координатной окрестности U каждый базис $\mathcal{O}(U)$ -модуля $\mathcal{O}^1(U)$ состоит из m полей.

В связи с этим предложением стоит также отметить, что ввиду описанного в п. 3 произвола в выборе локальных координат имеет место следующее утверждение:

какова бы ни была точка p гладкого многообразия M , для любого базиса $A_1, \dots, A_m$ пространства M_p существует в точке p такая система локальных координат $x^1, \dots, x^m$, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p = A_1, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p = A_m.$$

Рассмотрим в заключение произвольное гладкое в точке $p \in M$ отображение Φ многообразия M в некоторое многообразие N . Любому вектору $A \in M_p$ мы можем отнести отображение

$$d\Phi_p(A): \mathcal{O}(\Phi(p)) \rightarrow \mathcal{O}(\Phi(p)),$$

положив

$$d\Phi_p(A)g = A(g \circ \Phi)$$

для любой гладкой в точке $\Phi(p) \in N$ функции g . Легко видеть, что построенное таким образом отображение $d\Phi_p(A)$ является вектором многообразия N в точке $\Phi(p)$. Тем самым мы получаем некоторое (очевидно, линейное) отображение

$$d\Phi_p: M_p \rightarrow N_{\Phi(p)}.$$

Это отображение мы будем называть *дифференциалом отображения Φ в точке p* .

Ясно, что

для любых гладких многообразий M, N и P и любых гладких отображений $\Phi: M \rightarrow N$ и $\Psi: N \rightarrow P$ в любой точке $p \in M$ имеет место соотношение

$$d(\Psi \circ \Phi)_p = d\Psi_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p. \quad (4)$$

Пусть $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты в точке p многообразия M , а $y^1, \dots, y^n$ — локальные координаты в точке $\Phi(p)$ многообразия N . Поскольку отображение Φ гладко, функции $y^1 \circ \Phi, \dots, y^n \circ \Phi$ (определенные в некоторой окрестности точки p) являются гладкими в p функциями и потому гладко зависят вблизи точки p от координат $x^1, \dots, x^m$, т. е. существуют такие гладкие функции $u^1(t^1, \dots, t^m), \dots, u^n(t^1, \dots, t^m)$ вещественных переменных $t^1, \dots, t^m$, что

$$y^i \circ \Phi = u^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

вблизи точки p . Эти равенства мы, следуя принятому обыкновению, будем записывать в виде

$$y^i = u^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5')$$

и будем говорить, что они представляют собой запись отображения Φ в локальных координатах $x^1, \dots, x^m$ и $y^1, \dots, y^n$.

Из соотношений (5) и определения отображения $d\Phi_p$ легко вытекает, что

$$d\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial (y^j \circ \Phi)}{\partial x^i} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\Phi(p)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Действительно, пусть

$$g = u(y^1, \dots, y^n)$$

— произвольная гладкая в точке $\Phi(p)$ функция на многообразии N . По определению,

$$\frac{\partial g}{\partial y^j} = \frac{\partial u}{\partial t^j}(y^1, \dots, y^n).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} g \circ \Phi &= u(y^1 \circ \Phi, \dots, y^n \circ \Phi) = \\ &= u(u^1(x^1, \dots, x^m), \dots, u^n(x^1, \dots, x^m)) \end{aligned}$$

и потому

$$\frac{\partial (g \circ \Phi)}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial t^j}(y^1 \circ \Phi, \dots, y^n \circ \Phi) \cdot \frac{\partial u^j}{\partial t^i}(x^1, \dots, x^m).$$

Следовательно,

$$d\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p g = \left(\frac{\partial (g \circ \Phi)}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial g}{\partial y^j} \right)_{\Phi(p)} \cdot \left(\frac{\partial (y^j \circ \Phi)}{\partial x^i} \right)_p,$$

ибо в силу соотношений (5)

$$\frac{\partial u^j}{\partial t^i}(x^1, \dots, x^m) = \frac{\partial (y^j \circ \Phi)}{\partial x^i}.$$

Тем самым соотношения (6) полностью доказаны.

В соответствии с сокращенной записью (5') мы формулу (6) будем, как правило, записывать в виде

$$d\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\Phi(p)}. \quad (6')$$

Матрицу порядка $n \times m$ с элементами

$$\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial (y^j \circ \Phi)}{\partial x^i}\right)_p, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{matrix}$$

т. е. матрицу линейных соотношений (6), мы будем называть *матрицей отображения Φ в точке p* (по отношению к локальным координатам $x^1, \dots, x^m$ и $y^1, \dots, y^n$). При $m = n$ определитель этой матрицы мы будем называть *якобианом* отображения Φ в точке p (по отношению к данным локальным координатам $x^1, \dots, x^m$ и $y^1, \dots, y^n$). Очевидно, что он совпадает с якобианом (в смысле п. 2) отображения $\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}$, где η и ξ — координатные диффеоморфизмы, определяющие локальные координаты $y^1, \dots, y^n$ и $x^1, \dots, x^m$ соответственно.

Гладкое отображение

$$\Phi: M \rightarrow N$$

m -мерного многообразия M в n -мерное многообразие N мы будем называть *регулярным в точке $p \in M$* , если отображение

$$d\Phi_p: M_p \rightarrow N_{\Phi(p)}$$

имеет максимальный возможный ранг, т. е. если оно мономорфно при $m \leq n$ и эпиморфно при $m \geq n$ (и, следовательно, изоморфно при $m = n$). Из элементарных свойств линейных отображений немедленно вытекает, что

отображение $\Phi: M \rightarrow N$ тогда и только тогда регулярно в точке $p \in M$, когда ранг его матрицы в этой точке (вычисленной в произвольных системах локальных координат $x^1, \dots, x^m$ и $y^1, \dots, y^n$ в точках p и $\Phi(p)$ многообразий M и N) равен m при $m \leq n$ и n при $m \geq n$.

В силу теоремы о замене локальных координат отсюда следует, что

при $m \leq n$ отображение $\Phi: M \rightarrow N$ тогда и только тогда регулярно в точке $p \in M$, когда для любой системы локальных координат $y^1, \dots, y^n$ в точке $\Phi(p)$ многообразия N из функций $y^1 \circ \Phi, \dots, y^n \circ \Phi$ можно выбрать m функций, составляющих систему локальных координат в точке p многообразия M .

Кроме того,

при $m = n$ отображение $\Phi: M \rightarrow N$ тогда и только тогда регулярно в точке $p \in M$, когда его якобиан в этой точке отличен от нуля.

Теорема об обратных функциях из п. 2 утверждает, что для отображений областей одного и того же евклидова пространства регулярность в точке равносильна диффеоморфности в этой точке. Ввиду локального характера этого утверждения оно, очевидно, справедливо и для отображений любых многообразий (одинаковой размерности). Таким образом, *гладкое отображение Φ многообразия M в многообразие N той же размерности тогда и только тогда диффеоморфно в точке $p \in M$, когда оно регулярно в этой точке.*

Точки p многообразия M , в которых отображение $\Phi: M \rightarrow N$ не регулярно, мы будем называть *критическими точками* этого отображения. Отображения, не имеющие критических точек, т. е. регулярные во всех точках $p \in M$, мы будем называть *регулярными (на M)*.

Согласно предыдущему предложению, *гладкое отображение Φ многообразия M в многообразие N той же размерности тогда и только тогда регулярно, когда оно локально диффеоморфно.*

Рассмотрим теперь произведение $M \times N$ гладких многообразий M и N (см. п. 3). Пусть

$$\pi: M \times N \rightarrow M, \quad \rho: M \times N \rightarrow N$$

— естественные проекции произведения $M \times N$ на многообразия M и N соответственно. Так как эти проекции являются гладкими отображениями, то для любой точки $(p, q) \in M \times N$ определены отображения

$$d\pi_{(p, q)}: (M \times N)_{(p, q)} \rightarrow M_p, \quad d\rho_{(p, q)}: (M \times N)_{(p, q)} \rightarrow N_q.$$

Пусть A — произвольный вектор многообразия $M \times N$ в точке (p, q) и пусть

$$B = d\pi_{(p, q)}(A), \quad C = d\rho_{(p, q)}(A).$$

Ясно, что для любой системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$

в точке p многообразия M имеют место равенства

$$A\hat{x}^i = Bx^i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Аналогично для любой системы локальных координат $y^1, \dots, y^n$ в точке q многообразия N имеют место равенства

$$A\hat{y}^j = Cy^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Это показывает, во-первых, что $A = 0$ тогда и только тогда, когда $B = 0$ и $C = 0$, и, во-вторых, что для любых векторов $B \in M_p$ и $C \in N_q$ существует такой вектор $A \in (M \times N)_{(p, q)}$, что $B = d\pi_{(p, q)}(A)$ и $C = d\rho_{(p, q)}(A)$. Другими словами,

отображения

$$M_p \xrightarrow{d\pi_{(p, q)}} (M \times N)_{(p, q)} \xrightarrow{d\rho_{(p, q)}} N_q$$

определяют разложение пространства $(M \times N)_{(p, q)}$ в прямую сумму пространств M_p и N_q .

Ясно, что это разложение согласовано с действиями векторов A на гладкие в точке (p, q) функции, т. е. для любой такой функции f имеет место равенство

$$Af = Bf + Cf,$$

где, скажем, под Bf подразумевается результат применения вектора $B = d\pi_{(p, q)}(A)$ к функции f , рассматриваемой как функция одной точки $p \in M$ (при фиксированной точке $q \in N$).

В дальнейшем, когда нам это будет удобно, мы вектор $A \in (M \times N)_{(p, q)}$, для которого $B = d\pi_{(p, q)}(A)$, $C = d\rho_{(p, q)}(A)$, будем обозначать символом (B, C) .

Ясно, что аналогичные разложения в прямую сумму имеют место и для произведений любого конечного числа гладких многообразий.

7. Линейные дифференциальные формы

Пусть, как и выше, M — произвольное гладкое многообразие размерности m . Линейной дифференциальной формой на многообразии M мы будем называть произвольное $\mathcal{O}(M)$ -линейное отображение $\mathcal{O}(M)$ -модуля $\mathcal{O}^1(M)$ в алгебру $\mathcal{O}(M)$ (рассматриваемую как $\mathcal{O}(M)$ -модуль). Таким образом, каждая форма ω сопоставляет любому векторному полю $X \in \mathcal{O}^1(M)$

некоторую гладкую на M функцию $\omega(X)$, причем для любой гладкой на M функции f и любых полей $X, X_1, X_2 \in \mathcal{O}^1(M)$ имеют место равенства

$$\omega(fX) = f\omega(X),$$

$$\omega(X_1 + X_2) = \omega(X_1) + \omega(X_2).$$

Очевидно, что совокупность $\mathcal{O}_1(M)$ всех линейных дифференциальных форм на многообразии M представляет собой $\mathcal{O}(M)$ -модуль относительно операций

$$(f\omega)(X) = f\omega(X), \quad f \in \mathcal{O}(M), \quad \omega \in \mathcal{O}_1(M), \quad X \in \mathcal{O}^1(M),$$

$$(\omega_1 + \omega_2)(X) = \omega_1(X) + \omega_2(X), \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{O}_1(M), \quad X \in \mathcal{O}^1(M).$$

Пусть W — произвольное открытое подмногообразие многообразия M и пусть ω — произвольная линейная дифференциальная форма на M . Пусть, далее, Y — произвольное векторное поле на подмногообразии W . Для любой точки $p \in W$ рассмотрим ее окрестность V , замыкание $\bar{V}$ которой компактно и содержится в W . Как мы знаем, на многообразии M существуют такие векторные поля X , что $X|_V = Y|_V$. Пусть X_1 и X_2 — два поля на M , обладающих этим свойством, и пусть h — гладкая на M функция, равная единице в точке p и нулю вне окрестности V . Тогда $h \cdot (X_1 - X_2) = 0$ на M и потому

$$h(\omega(X_1) - \omega(X_2)) = 0.$$

Отсюда следует, что в точке p функции $\omega(X_1)$ и $\omega(X_2)$ совпадают. Поскольку точка p была произвольной точкой подмногообразия W , тем самым доказано, что формула

$$\omega|_W(Y)(p) = \omega(X)(p),$$

где X — произвольное векторное поле на M , совпадающее на V с полем Y , однозначно определяет на подмногообразии W некоторую (как легко видеть, гладкую) функцию $\omega|_W(Y)$. Таким образом, мы получаем некоторое (очевидно, линейное) отображение

$$\omega|_W: \mathcal{O}^1(W) \rightarrow \mathcal{O}(W),$$

т. е. линейную дифференциальную форму на подмногообразии W . Эту форму мы будем называть *ограничением* формы ω

на открытом подмногообразии W и, когда невозможны недоразумения, будем обозначать ее прежним символом ω .

Так же как и для векторных полей, отображение ограничения $\omega \rightarrow \omega|_W$, вообще говоря, не эпиморфно, а лишь *локально эпиморфно* в том смысле, что,

каково бы ни было открытое множество $V \subset W$, замыкание $\bar{V}$ которого компактно и содержится в W , для любой линейной дифференциальной формы $\theta \in \mathcal{O}_1(W)$ существует такая линейная дифференциальная форма $\omega \in \mathcal{O}_1(M)$, что

$$\omega|_V = \theta|_V.$$

Эта форма ω определяется формулой

$$\omega(X) = \begin{cases} g \cdot \theta(X|_V) & \text{на } W, \\ 0 & \text{вне } W, \end{cases}$$

где g — гладкая на M функция, равная единице на $\bar{V}$ и нулю вне некоторого открытого множества, замыкание которого содержится в W .

В частном случае, когда W является координатной окрестностью U , можно легко описать все линейные дифференциальные формы на U .

Пусть $X_1, \dots, X_m$ — произвольный базис $\mathcal{O}(U)$ -модуля $\mathcal{O}^1(U)$. Ясно, что для любого $i = 1, \dots, m$ соотношения

$$\omega^i(X_j) = \delta_j^i, \quad j = 1, \dots, m$$

однозначно определяют на U некоторую линейную дифференциальную форму ω^i . Формы $\omega^1, \dots, \omega^m$ линейно независимы и обладают тем свойством, что для любого векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(U)$ имеет место равенство

$$X^i = \omega^i(X),$$

где X^i — компоненты поля X в базисе $X_1, \dots, X_m$. Отсюда непосредственно следует, что

формы $\omega_1, \dots, \omega_m$ образуют базис модуля $\mathcal{O}_1(U)$, причем

$$\omega = \omega(X_i) \omega^i$$

для любой формы $\omega \in \mathcal{O}_1(U)$.

Функции $\omega(X_i)$ мы будем называть *компонентами* формы ω в базисе $X_1, \dots, X_m$ (или в базисе $\omega_1, \dots, \omega_m$).

Если базис $X_1, \dots, X_m$ голономен, т. е. если

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X_m = \frac{\partial}{\partial x^m},$$

где $x^1, \dots, x^m$ — некоторая система локальных координат в окрестности U , то базис $\omega_1, \dots, \omega_m$ мы также будем называть *голономным* базисом. В этом случае формы $\omega^1, \dots, \omega^m$ мы будем, как правило, обозначать символами

$$dx^1, \dots, dx^m.$$

Компоненты $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ формы ω в базисе $dx^1, \dots, dx^m$ мы будем называть иногда ее *коэффициентами* (в системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$).

Важный пример линейной дифференциальной формы на многообразии M мы получим, положив для некоторой гладкой на M функции f и любого поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$

$$df(X) = X(f).$$

Ясно, что эта формула определяет на M некоторую линейную дифференциальную форму df . Мы будем называть форму df *дифференциалом* функции f .

По определению, для любой гладкой на многообразии M (или хотя бы на координатной окрестности U) функции f имеет место равенство

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

так что, как и в элементарном анализе,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

В частности, мы видим, что формы $dx^1, \dots, dx^m$ голономного базиса представляют собой не что иное, как дифференциалы локальных координат $x^1, \dots, x^m$.

Линейные функционалы, определенные на пространстве $M(p) = \mathcal{O}^1(p)$, т. е. линейные отображения этого пространства в поле R , мы будем называть *ковекторами* многообразия M в точке p . Они образуют m -мерное линейное пространство

M_p^* , сопряженное пространству M_p . Мы будем обозначать пространство M_p^* также символом $\mathcal{O}_1(p)$.

Легко видеть, что для любой формы $\omega \in \mathcal{O}_1(M)$ и любого поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$ из равенства $X_p = 0$ вытекает равенство $\omega(X)(p) = 0$. Действительно, в координатной окрестности U точки p имеет место соотношение

$$\omega(X) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \cdot Xx^i,$$

и потому

$$\omega(X)(p) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p) \cdot X_p x^i = 0.$$

Отсюда вытекает, что, положив для любого вектора $A \in M_p$

$$\omega_p(A) = \omega(X)(p),$$

где X — произвольное векторное поле на M , для которого $X_p = A$, мы однозначно определим на M_p некоторый ковектор ω_p .

В частности, дифференциалы $dx^1, \dots, dx^m$ локальных координат $x^1, \dots, x^m$ определяют ковекторы

$$(dx^1)_p, \dots, (dx^m)_p.$$

Эти ковекторы составляют базис пространства M_p^* (их m , и они линейно независимы). Любой ковектор $\alpha \in M_p^*$ разлагается по этому базису согласно формуле

$$\alpha = \alpha\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) \cdot (dx^i)_p.$$

Отсюда, в частности, непосредственно вытекает, что

для любого ковектора $\alpha \in \mathcal{O}_1(p)$ существует на многообразии M такая линейная дифференциальная форма ω , что $\omega_p = \alpha$.

Действительно, в силу свойства локальной эпиморфности отображения ограничения форму ω достаточно построить на некоторой координатной окрестности U точки p . С другой стороны, формула

$$\omega = a_i dx^i,$$

где $a_i = \alpha\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)$, определяет, очевидно, на окрестности U форму ω , для которой $\omega_p = \alpha$.

Аналогично множеству всех векторов, совокупность M_*^* всех ковекторов многообразия M во всевозможных его точках $p \in M$ может быть определена как $2m$ -мерное гладкое многообразие, после чего естественным образом определяется понятие *непрерывного* (или *гладкого*) *ковекторного поля* ω на многообразии M как такого непрерывного (соответственно гладкого) отображения $\omega: M \rightarrow M_*^*$, что $\omega(p) \in M_p^*$ для любой точки $p \in M$. При этом можно легко показать (см. соответствующие рассуждения для векторных полей), что ковекторное поле ω тогда и только тогда гладко, когда для любого векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$ числовая функция $\omega(p)(X_p)$ точки p многообразия M является гладкой на M функцией.

Однако для экономии места мы предпочтем не вводить здесь явно многообразия M_*^* , а вместо этого примем последнее свойство гладких ковекторных полей за их определение. Таким образом, *гладким ковекторным полем* на многообразии M мы будем называть произвольную функцию ω , сопоставляющую каждой точке $p \in M$ некоторый ковектор $\omega(p) \in M_p^*$ и обладающую тем свойством, что для любого векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$ числовая функция $\omega(p)(X_p)$ точки $p \in M$ является гладкой на M функцией.

Ясно, что для любой дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{O}_1(M)$ формула

$$\omega(p) = \omega_p, \quad p \in M,$$

определяет на многообразии M некоторое гладкое ковекторное поле. Обратно, каждое гладкое ковекторное поле $\omega: M \rightarrow M_*^*$ однозначно определяет, согласно формуле

$$\omega(X)(p) = \omega(p)(X_p), \quad X \in \mathcal{O}^1(M), \quad p \in M,$$

некоторую линейную дифференциальную форму $\omega \in \mathcal{O}_1(M)$. Таким образом,

понятие линейной дифференциальной формы, по существу, совпадает с понятием гладкого ковекторного поля.

З а м е ч а н и е. Любая гладкая на M функция f определяет в каждой точке $p \in M$ ковектор $(df)_p$. С другой стороны, рассматривая функцию f как гладкое отображение $M \rightarrow \mathbf{R}$, мы можем говорить об ее дифференциале $df_p: M_p \rightarrow \mathbf{R}_{f(p)}$, где $\mathbf{R}_{f(p)}$ — касательное пространство пространства $\mathbf{R}$ в точке $f(p)$. Пространство $\mathbf{R}_{f(p)}$ одномерно и порождается вектором

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{f(p)}$. Ясно, что если мы каждый вектор $a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{f(p)} \in R_{f(p)}$ отождествим с числом a , то дифференциал df_p совпадет с ковектором $(df)_p$. В этом смысле определение дифференциала функции согласовано с определением дифференциала гладкого отображения.

Рассмотрим в заключение произвольное гладкое отображение Φ некоторого многообразия N в многообразие M . Пусть ω — произвольная линейная дифференциальная форма на многообразии M . В каждой точке $p \in N$ мы можем определить некоторый ковектор $(\Phi^*\omega)_p$, положив

$$(\Phi^*\omega)_p(A) = \omega_p(d\Phi_p(A))$$

для любого вектора $A \in N_p$. Тем самым мы на многообразии N получаем некоторое (очевидно, гладкое) ковекторное поле $\Phi^*(\omega)$, т. е. линейную дифференциальную форму. Легко проверяется, что определенное таким образом отображение

$$\Phi^* : \mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(N)$$

является гомоморфизмом $\mathcal{O}(M)$ -модулей (если $\mathcal{O}(N)$ -модуль $\mathcal{O}^1(N)$ рассматривать как $\mathcal{O}(M)$ -модуль в силу отображения $\Phi^* : \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(N)$, сопоставляющего каждой функции $f \in \mathcal{O}(M)$ функцию $\Phi^*f = f \circ \Phi$).

Если Φ представляет собой отображение вложения открытого подмногообразия W в многообразие M , то отображение Φ^* является не чем иным, как отображением ограничения $\mathcal{O}_1(M) \rightarrow \mathcal{O}_1(W)$.

8. Тензоры и тензорные поля

Пусть r и s — произвольные целые неотрицательные числа. *Тензорным полем типа (r, s)* на многообразии M мы будем называть произвольную, принимающую значения в алгебре $\mathcal{O}(M)$ и $\mathcal{O}(M)$ -линейную по каждому аргументу функцию

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)$$

от $r + s$ аргументов, первые r из которых представляют собой линейные дифференциальные формы $\omega^1, \dots, \omega^r \in$

$\in \mathcal{O}_1(M)$, а последние s — векторные поля $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{O}^1(M)$.

Множество всех тензорных полей типа (r, s) на многообразии M мы будем обозначать символом $\mathcal{O}_s^r(M)$. Ясно, что это множество естественным образом определяется как $\mathcal{O}(M)$ -модуль.

По определению, тензорные поля типа $(0, 0)$ представляют собой не что иное, как гладкие на M функции, так что

$$\mathcal{O}_0^0(M) = \mathcal{O}(M),$$

а тензорные поля типа $(0, 1)$ — не что иное, как линейные дифференциальные формы, так что

$$\mathcal{O}_1^0(M) = \mathcal{O}_1(M).$$

Кроме того, любое векторное поле $X \in \mathcal{O}^1(M)$ можно рассматривать как тензорное поле типа $(1, 0)$, т. е. как $\mathcal{O}(M)$ -линейное отображение $\mathcal{O}(M)$ -модуля $\mathcal{O}_1(M)$ в алгебру $\mathcal{O}(M)$, определив его значение $X(\omega)$ на произвольной форме $\omega \in \mathcal{O}_1(M)$ формулой

$$X(\omega) = \omega(X).$$

Так как $\omega(X) = 0$ для всех форм $\omega \in \mathcal{O}_1(M)$ только при $X = 0$, то тем самым модуль $\mathcal{O}^1(M)$ вкладывается в модуль $\mathcal{O}_0^1(M)$. Оказывается, что на самом деле эти модули совпадают:

$$\mathcal{O}_0^1(M) = \mathcal{O}^1(M), \quad (1)$$

т. е. что

векторными полями исчерпываются все тензорные поля типа $(0, 1)$.

Это важное утверждение мы докажем несколько позже, после того как подробнее изучим строение произвольных тензорных полей.

Пусть W — произвольное открытое подмногообразие многообразия M и пусть T — произвольное тензорное поле типа (r, s) на M . Легко видеть, что

если хотя бы один из аргументов $\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s$ поля T равен нулю на W (т. е. равно нулю его ограничение на W), то

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) = 0 \text{ на } W.$$

Действительно, пусть p — произвольная точка подмногообразия W и пусть V — некоторая ее окрестность, замыкание $\bar{V}$ которой компактно и содержится в W . Пусть, далее, f — гладкая на M функция, равная единице в p и нулю вне V . Считая, для определенности, что $\omega^1 = 0$ на W , мы получим, что $f\omega^1 = 0$ на M , и потому

$$T(f\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} T(f\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) &= \\ &= fT(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)(p) &= \\ &= f(p)T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)(p) = 0, \end{aligned}$$

ибо $f(p) = 1$. Таким образом,

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) = 0 \text{ на } W.$$

Пусть, теперь, $\theta^1, \dots, \theta^r$ — произвольные линейные дифференциальные формы, а $Y_1, \dots, Y_s$ — произвольные векторные поля на открытом подмногообразии W . Для любой точки $p \in W$ рассмотрим на M формы $\omega^1, \dots, \omega^r$ и поля $X_1, \dots, X_s$, совпадающие в некоторой окрестности точки p с формами $\theta^1, \dots, \theta^r$ и полями $Y_1, \dots, Y_s$ соответственно. Из только что доказанного утверждения непосредственно вытекает (см. выше аналогичные рассуждения для векторных полей и дифференциальных форм), что формула

$$T|_W(\theta^1, \dots, \theta^r; Y_1, \dots, Y_s)(p) = T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)(p)$$

однозначно определяет на W некоторую гладкую функцию

$$T|_W(\theta^1, \dots, \theta^r; Y_1, \dots, Y_s).$$

При этом ясно, что эта функция линейно зависит от форм $\theta^1, \dots, \theta^r$ и полей $Y_1, \dots, Y_s$, т. е. представляет собой тензорное поле типа (r, s) на многообразии W . Мы будем называть поле $T|_W$ *ограничением* поля T на открытом подмногообразии W и, когда невозможны недоразумения, будем обозначать его прежним символом T .

Очевидно, что отображение ограничения $\mathcal{O}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{O}_s^r(W)$, сопоставляющее каждому полю $T \in \mathcal{O}_s^r(M)$ поле

$T|_W \in \mathcal{O}_s^r(W)$, представляет собой $\mathcal{O}(M)$ -гомоморфизм $\mathcal{O}(M)$ -модуля $\mathcal{O}_s^r(M)$ в $\mathcal{O}(W)$ -модуль $\mathcal{O}_s^r(W)$ (рассматриваемый в силу отображения ограничения $\mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(W)$ как $\mathcal{O}(M)$ -модуль). При этом, аналогично случаю векторных полей и линейных дифференциальных форм, этот гомоморфизм обладает, очевидно, свойством локальной эпиморфности, т. е.,

каково бы ни было открытое множество $V \subset W$, замыкание $\bar{V}$ которого компактно и содержится в W , для любого поля $S \in \mathcal{O}_s^r(W)$ существует такое поле $T \in \mathcal{O}_s^r(M)$, что

$$S|_V = T|_V.$$

Рассмотрим, в частности, ограничение $T|_U$ поля $T \in \mathcal{O}_s^r(M)$ на некоторой координатной окрестности $U \subset M$. Пусть $Y_1, \dots, Y_m$ — произвольный базис модуля $\mathcal{O}^1(U)$, а $\theta^1, \dots, \theta^m$ — базис модуля $\mathcal{O}_1(U)$, определенный условиями $\theta^i(Y_j) = \delta_j^i$; $i, j = 1, \dots, m$. Тогда для любых форм $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathcal{O}_1(U)$ и любых полей $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{O}^1(U)$ будет иметь место соотношение

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) = T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} \omega_{k_1}^1 \dots \omega_{k_r}^r X_1^{l_1} \dots X_s^{l_s} \quad \text{на } U, \quad (2)$$

где

$$T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} = T(\theta^{k_1}, \dots, \theta^{k_r}; Y_{l_1}, \dots, Y_{l_s}), \quad (3)$$

а $\omega_k^i = \omega^i(Y_k)$, и $X_j^l = \theta^l(X_j)$ — компоненты форм ω^i и полей X_j в базисе $Y_1, \dots, Y_m$. Функции (3) мы будем называть *компонентами* тензорного поля T на окрестности U в базисе $Y_1, \dots, Y_m$. Они полностью определяют поле T на U .

В частности, если поле T имеет тип $(1, 0)$, его компонентами являются функции $T^k = T(\theta^k)$. Определим на окрестности U векторное поле X_U , положив

$$X_U = T^k Y_k,$$

где, как и выше, $Y_1, \dots, Y_k$ — произвольный базис $\mathcal{O}(U)$ -модуля $\mathcal{O}^1(U)$ (относительно которого вычислены компоненты T^k). Так как для любой формы $\omega \in \mathcal{O}_1(U)$ имеет место равенство

$$T(\omega) = \omega(Y_k) T(\theta^k) = \omega(T^k Y_k) = \omega(X_U) \quad \text{на } U,$$

то на окрестности U тензорное поле T совпадает с векторным полем X_U . В частности, отсюда следует, что поле X_U однозначно определено (не зависит от выбора базиса $Y_1, \dots, Y_k$). Поэтому, полагая для любой точки $p \in M$

$$X_p = (X_U)_p,$$

где U — произвольная координатная окрестность точки p , мы получим на многообразии M однозначно определенное (очевидно, гладкое) векторное поле X . Так как $T(\omega) = \omega(X_U)$ на U для любой формы $\omega \in \mathcal{O}_1(M)$, то $T(\omega)(p) = \omega(X_U)(p) = \omega_p((X_U)_p) = \omega_p(X_p) = \omega(X)(p)$, т. е.

$$T(\omega) = \omega(X) \text{ на } M.$$

Другими словами, $T = X$. Тем самым соотношение (1) полностью доказано.

Пусть p — произвольная точка гладкого многообразия M . Тензором типа (r, s) в точке p мы будем называть произвольный линейный по каждому аргументу функционал

$$L(\alpha^1, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, A_s),$$

первые r аргументов которого представляют собой ковекторы $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in M_p^*$, а последние s — векторы $A_1, \dots, A_s \in M_p$. Все тензоры типа (r, s) в точке p образуют, очевидно, линейное пространство $\mathcal{O}_s^r(p)$. Ясно, что

$$\mathcal{O}_0^1(p) = \mathcal{O}^1(p), \quad \mathcal{O}_1^0(p) = \mathcal{O}_1(p).$$

С другой стороны, $\mathcal{O}_0^0(p) = R$ (а не $\mathcal{O}(p)$).

Пусть $B_1, \dots, B_m$ — произвольный базис пространства M_p и пусть $\beta^1, \dots, \beta^m$ — базис пространства M_p^* , определенный условиями $\beta^i(B_j) = \delta_j^i$, $i, j = 1, \dots, m$. Тогда для любого тензора L типа (r, s) в точке p имеет место равенство

$$L(\alpha^1, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, A_s) = L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} \alpha_{k_1}^1 \dots \alpha_{k_r}^r A_1^{l_1} \dots A_s^{l_s}, \quad (4)$$

где $\alpha_k^i = \alpha^i(B_k)$ и $A_j^l = \beta^l(A_j)$ — компоненты ковекторов α^i и векторов A_j в базисе $B_1, \dots, B_m$, а

$$L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} = L(\beta^{k_1}, \dots, \beta^{k_r}; B_{l_1}, \dots, B_{l_s}). \quad (5)$$

Числа (5) мы будем называть *компонентами* тензора L в базисе $B_1, \dots, B_m$. Эти числа не удовлетворяют, вообще говоря, никаким соотношениям, т. е. для любого набора m^{r+s} чисел $L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$ формула (4) определяет некоторый тензор $L \in \mathcal{O}_s^r(p)$ с компонентами $L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$.

Так же как и для векторов, множество всех тензоров данного типа (r, s) во всевозможных точках многообразия M может быть естественным образом определено как гладкое многообразие, после чего можно определить понятие непрерывного (или гладкого) тензорного поля (r, s) на многообразии M как такого непрерывного (соответственно гладкого) отображения T многообразия M в многообразие всех тензоров, что $T(p) \in \mathcal{O}_s^r(p)$ для любой точки $p \in M$. Не останавливаясь на этом, мы, как и в случае форм, предпочтем независимо определить *гладкие тензорные поля T типа (r, s)* на многообразии M как такие функции T , сопоставляющие каждой точке $p \in M$ некоторый тензор $T(p)$ типа (r, s) в этой точке, что для любых форм $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathcal{O}_1(M)$ и любых векторных полей $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{O}_1(M)$ числовая функция

$$f(p) = T(p)((\omega^1)_p, \dots, (\omega^r)_p; (X_1)_p, \dots, (X_s)_p)$$

точки $p \in M$ является гладкой на M функцией.

Для любого тензорного поля $T \in \mathcal{O}_s^r(M)$ из формулы (2) немедленно следует, что если хотя бы один из его аргументов $\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s$ равен нулю в точке p , то

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)(p) = 0.$$

Поэтому формула

$$T_p(\alpha^1, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, A_s) = T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)(p),$$

где формы $\omega^1, \dots, \omega^r$ и поля $X_1, \dots, X_s$ выбраны так, чтобы $\omega_p^i = \alpha^i$, $i = 1, \dots, r$, и $(X_j)_p = A_j$, $j = 1, \dots, s$, однозначно определяет некоторый тензор T_p типа (r, s) в точке p . Ясно, что получающаяся таким образом функция $T(p) = T_p$ представляет собой гладкое тензорное поле в смысле предыдущего определения. Обратно, любое гладкое тензорное поле

$T(p) \in \mathcal{O}_s^r(p)$ определяет по формуле

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) = T(p)((\omega^1)_p, \dots, (\omega^r)_p; (X_1)_p, \dots, (X_s)_p),$$

где $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathcal{O}_1(M)$, $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{O}^1(M)$, некоторое поле $T \in \mathcal{O}_s^r(M)$. Таким образом,

понятие тензорного поля, как оно было определено в начале этого пункта, по существу, совпадает с определенным выше понятием гладкого тензорного поля.

Это утверждение имеет много важных следствий. Например, из него немедленно вытекает уже доказанное выше равенство (1). Действительно, любой тензор типа $(1, 0)$ в точке p , по определению, представляет собой линейный функционал на пространстве M_p^* , и потому, в силу известного свойства рефлексивности конечномерных линейных пространств, каждый такой тензор может рассматриваться как вектор в точке p .

Далее, любой тензор $L = L(\alpha; A)$ типа $(1, 1)$ при фиксированном аргументе A представляет собой тензор типа $(1, 0)$, т. е. вектор. Поэтому каждый такой тензор можно рассматривать как линейное преобразование пространства M_p . Имея это в виду, мы будем называть *полем линейных преобразований* на многообразии M произвольную функцию T , сопоставляющую каждой точке $p \in M$ некоторое линейное преобразование $T_p: M_p \rightarrow M_p$. Такое поле мы будем называть *гладким*, если для любого векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$ поле

$$T(X)_p = T_p(X_p), \quad p \in M,$$

является гладким векторным полем на M . Из сказанного выше непосредственно вытекает, что понятия тензорного поля типа $(1, 1)$ и гладкого поля линейных преобразований, по существу, совпадают. С другой стороны, каждое гладкое поле T линейных преобразований определяет по формуле

$$T(X)_p = T_p(X_p), \quad p \in M, X \in \mathcal{O}^1(M),$$

некоторое $\mathcal{O}(M)$ -линейное отображение $\mathcal{O}(M)$ -модуля $\mathcal{O}^1(M)$ в себя. Обратно, любое такое отображение $T: \mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(M)$ определяет по формуле

$$T_p(A) = T(X)_p, \quad A \in M_p,$$

где X — произвольное поле на M , для которого $X_p = A$, некоторое гладкое поле T линейных преобразований.

Таким образом,

следующие понятия, по существу, совпадают:

- 1) тензорного поля типа $(1, 1)$ на многообразии M ;
- 2) гладкого поля линейных преобразований на M ;
- 3) $\mathcal{O}(M)$ -линейного отображения $\mathcal{O}(M)$ -модуля $\mathcal{O}^1(M)$ в себя.

При этом тензорное поле $T \in \mathcal{O}_1^1(M)$ по линейному отображению $T: \mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(M)$ определяется формулой

$$T(\omega; X) = \omega(T(X)), \quad \omega \in \mathcal{O}_1(M), \quad X \in \mathcal{O}^1(M),$$

а поле линейных преобразований $T_p: M_p \rightarrow M_p$ — формулой

$$T_p(A) = T(X)_p, \quad A \in M_p,$$

где X — произвольное векторное поле на многообразии M , для которого $X_p = A$.

Замечание. Фиксируя в тензоре $L(\alpha; A)$ типа $(1, 1)$ в точке p аргумент α , мы можем рассматривать его как линейное преобразование пространства M_p^* . Это линейное преобразование сопряжено в смысле теории линейных пространств с рассмотренным выше линейным преобразованием пространства M_p .

После тензоров типа $(1, 1)$ следующими по сложности являются тензоры типа $(1, 2)$. Рассуждая как и выше, мы легко получим, что

следующие понятия, по существу, совпадают:

- 1) тензорного поля $T(\omega; X; Y)$ типа $(1, 2)$ на многообразии M ;
- 2) гладкого поля билинейных функций $T_p(A, B)$, $A, B \in M_p$, принимающих значения в пространстве M_p ;
- 3) $\mathcal{O}(M)$ -линейной по обоим аргументам функции $T(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$, принимающей значения в $\mathcal{O}(M)$ -модуле $\mathcal{O}^1(M)$.

При этом имеют место соотношения

$$T(\omega; X, Y) = \omega(T(X, Y)), \quad \omega \in \mathcal{O}_1(M), \quad X, Y \in \mathcal{O}^1(M),$$

$$T_p(X_p, Y_p) = T(X, Y)_p, \quad p \in M, \quad X, Y \in \mathcal{O}^1(M).$$

Аналогично,

следующие понятия, по существу, совпадают:

- 1) тензорного поля $T(\omega; X, Y, Z)$ типа $(1, 3)$ на многообразии M ;

2) гладкого поля билинейных функций $T_p(A, B)$, $A, B \in M_p$, значениями которых являются линейные преобразования пространства M_p ;

3) $\mathcal{O}(M)$ -линейной по обоим аргументам функции $T(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$, значениями которой являются $\mathcal{O}(M)$ -линейные отображения $\mathcal{O}(M)$ -модуля $\mathcal{O}^1(M)$ в себя.

При этом

$$T(\omega; X, Y, Z) = \omega(T(X, Y)Z), \quad \omega \in \mathcal{O}_1(M), \quad X, Y, Z \in \mathcal{O}^1(M),$$

$$T_p(X_p, Y_p)Z_p = (T(X, Y)Z)_p, \quad p \in M, \quad X, Y, Z \in \mathcal{O}^1(M).$$

9. Операции над тензорами и тензорными полями

Пусть L и K — произвольные тензоры в точке p гладкого многообразия M , имеющие соответственно типы (r, s) и (u, v) . Ясно, что формула

$$(L \otimes K)(\alpha^1, \dots, \alpha^{r+u}; A_1, \dots, A_{s+v}) =$$

$$= L(\alpha^1, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, A_s) \cdot K(\alpha^{r+1}, \dots, \alpha^{r+u}; A_{s+1}, \dots, A_{s+v}),$$

где $\alpha^1, \dots, \alpha^{r+u} \in \mathcal{O}_1(p)$ и $A_1, \dots, A_{s+v} \in \mathcal{O}^1(p)$, определяет некоторый тензор $L \otimes K$ типа $(r+u, s+v)$. Мы будем называть его *произведением* тензоров L и K . На тензорах типа $(0, 0)$, т. е. постоянных числах, оно совпадает с обычным произведением. В произвольном базисе $B_1, \dots, B_m$ пространства M_p его компоненты выражаются, как легко видеть, формулой

$$(L \otimes K)_{l_1', \dots, l_{s+v}'}^{k_1', \dots, k_{r+u}'} = L_{l_1', \dots, l_s'}^{k_1', \dots, k_r'} K_{l_{s+1}', \dots, l_{s+v}'}^{k_{r+1}', \dots, k_{r+u}'}.$$

Кроме того, без труда проверяется, что

относительно умножения $\otimes$ прямая сумма

$$\mathcal{O}^*(p) = \sum_{r, s=0}^{\infty} \mathcal{O}_s^r(p)$$

линейных пространств $\mathcal{O}_s^r(p)$ представляет ассоциативную алгебру с единицей над полем R .

Пусть $B_1, \dots, B_m$ — произвольный базис пространства M_p и пусть $\beta^1, \dots, \beta^m$ — такой базис пространства M_p^* , что $\beta^i(B_j) = \delta_j^i$. Пусть, далее, L — произвольный тензор типа (r, s)

в точке p и пусть $L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$ — его компоненты в базисе $B_1, \dots, B_m$. Рассмотрим тензор

$$L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} \beta^{l_1} \otimes \dots \otimes \beta^{l_s} \otimes B_{k_1} \otimes \dots \otimes B_{k_r}.$$

Легко видеть, что компонентами этого тензора являются как раз числа $L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$. Следовательно,

$$L = L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} \beta^{l_1} \otimes \dots \otimes \beta^{l_s} \otimes B_{k_1} \otimes \dots \otimes B_{k_r}.$$

Тем самым доказано, что

алгебра $\mathcal{O}^*(p)$ порождается над полем R векторами $B_1, \dots, B_m$ и ковекторами $\beta^1, \dots, \beta^m$.

Пусть i и j — произвольные целые числа, подчиненные неравенствам $1 \leq i \leq s$ и $1 \leq j \leq r$ соответственно (мы здесь предполагаем, что $s > 0$ и $r > 0$). Зафиксировав в некотором тензоре $L(\alpha^1, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, A_s)$ типа (r, s) все аргументы $\alpha^1, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, A_s$, кроме i -го векторного аргумента A_i и j -го ковекторного аргумента α^j , мы получим из тензора L некоторый тензор типа $(1, 1)$, т. е. линейное преобразование пространства M_p . Это преобразование зависит, конечно, от ковекторов $\alpha^1, \dots, \hat{\alpha}^j, \dots, \alpha^r$ и векторов $A_1, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_s$ (знак $\hat{}$ показывает, что соответствующий ковектор — или вектор — должен быть опущен). Пусть

$$(C_j^i L)(\alpha^1, \dots, \hat{\alpha}^j, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_s)$$

— след этого линейного преобразования. Он является линейной функцией $r - 1$ ковекторов $\alpha^1, \dots, \hat{\alpha}^j, \dots, \alpha^r$ и $s - 1$ векторов $A_1, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_s$, т. е. представляет собой некоторый тензор типа $(r - 1, s - 1)$. Мы будем говорить, что этот тензор получен из тензора L *свертыванием по i -му верхнему и j -му нижнему индексам*. В каждом базисе пространства M_p его компоненты $(C_j^i L)_{l_1, \dots, l_{s-1}}^{k_1, \dots, k_{r-1}}$ выражаются через компоненты $L_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$ тензора L согласно формуле

$$(C_j^i L)_{l_1, \dots, l_{s-1}}^{k_1, \dots, k_{r-1}} = L_{l_1, \dots, l_{j-1} h l_j, \dots, l_{s-1}}^{k_1, \dots, k_{i-1} h k_i, \dots, k_{r-1}}.$$

Построенное отображение

$$C_j^i: \mathcal{O}_s^r(p) \rightarrow \mathcal{O}_{s-1}^{r-1}(p),$$

очевидно, линейно. Мы будем называть его *отображением свертывания*.

Все изложенные конструкции немедленно переносятся с тензоров на произвольные тензорные поля. Например, произведение $T \otimes S$ тензорных полей $T \in \mathcal{O}_s^r(M)$ и $S \in \mathcal{O}_v^u(M)$ можно определить либо формулой

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(\omega^1, \dots, \omega^{r+u}; X_1, \dots, X_{s+v}) = \\ = T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s) S(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+u}; X_{s+1}, \dots, X_{s+v}), \\ \omega^1, \dots, \omega^{r+u} \in \mathcal{O}_1(M); X_1, \dots, X_{s+v} \in \mathcal{O}^1(M), \end{aligned}$$

либо формулой

$$(T \otimes S)_p = T_p \otimes S_p,$$

где p — произвольная точка многообразия M . Из соответствующего утверждения для тензоров непосредственно вытекает, что

относительно умножения $\otimes$ прямая сумма

$$\mathcal{O}^*(M) = \sum_{r, s=0}^{\infty} \mathcal{O}_s^r(M)$$

$\mathcal{O}(M)$ -модулей $\mathcal{O}_s^r(M)$ является ассоциативной алгеброй с единицей над кольцом $\mathcal{O}(M)$.

Рассмотрим, в частности, алгебру $\mathcal{O}^*(U)$, где U — произвольная координатная окрестность в многообразии M . Пусть $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат на окрестности U . Сравнивая компоненты, мы без труда получим (см. выше аналогичные рассуждения для алгебры $\mathcal{O}^*(p)$), что для любого тензорного поля $T \in \mathcal{O}_s^r(U)$ имеет место формула

$$T = T_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} dx^{l_1} \otimes \dots \otimes dx^{l_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_r}},$$

где $T_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$ — компоненты поля T в базисе $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$.

Следовательно,

алгебра $\mathcal{O}^*(U)$ порождается над кольцом $\mathcal{O}(U)$ формами $dx^1, \dots, dx^m$ и полями $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$.

Операцию свертывания C_j^i для тензорных полей проще всего определить формулой

$$(C_j^i T)_p = C_j^i T_p,$$

где p — произвольная точка многообразия M . Ясно, что получающееся таким образом отображение свертывания

$$C_j^i: \mathcal{O}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{O}_{s-1}^r(M), \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq j \leq r,$$

является гомоморфизмом $\mathcal{O}(M)$ -модулей.

Особый интерес представляет собой случай $r = s$. В этом случае, r раз применяя к полю T отображения свертывания, мы получим поле типа $(0, 0)$, т. е. гладкую на M функцию. Мы будем говорить, что эта функция получена из поля T в результате *полного свертывания*. Ясно, что, вообще говоря, результат полного свертывания зависит от того, по каким парам индексов производились r частичных свертываний.

Рассмотрим, в частности, для произвольного тензорного поля T типа (r, s) поле

$$S = T \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s$$

типа $(r + s, r + s)$, где $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathcal{O}_1(M)$ и $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{O}^1(M)$.

Пусть $p \in M$. Обозначая через ω_j^i и X_l^k компоненты ко-векторов $(\omega^i)_p$ и векторов $(X_l)_p$ в некотором базисе пространства M_p , мы получим, что компоненты тензора S_p в этом базисе выражаются формулой

$$(S_p)_{l_1, \dots, l_{r+s}}^{k_1, \dots, k_{r+s}} = (T_p)_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} \omega_{l_{s+1}}^1, \dots, \omega_{l_{r+s}}^r X_1^{k_{r+1}}, \dots, X_s^{k_{r+s}},$$

где $(T_p)_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}$ — компоненты тензора T_p . Следовательно, свертывая тензор S_p по индексам $(1, s + 1), (2, s + 2), \dots, (r, s + r), (r + 1, 1), (r + 2, 2), \dots, (r + s, s)$, мы получим число

$$\begin{aligned} (T_p)_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r} \omega_{k_1}^1, \dots, \omega_{k_r}^r X_1^{l_1}, \dots, X_s^{l_s} &= \\ &= T_p((\omega^1)_p, \dots, (\omega^r)_p; (X_1)_p, \dots, (X_s)_p) = \\ &= T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)(p). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что

в результате полного свертывания тензорного поля

$$T \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s$$

по индексам $(1, s+1), \dots, (r, s+r), (r+1, 1), \dots, (r+s, s)$ получается значение

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r; X_1, \dots, X_s)$$

поля T на формах $\omega^1, \dots, \omega^r$ и полях $X_1, \dots, X_s$.

Рассмотрим в заключение произвольное гладкое отображение Φ некоторого многообразия N в многообразие M . Пусть T — тензорное поле типа $(0, s)$ на многообразии M . Мы определим в каждой точке $p \in N$ тензор $(\Phi^*T)_p$ типа $(0, s)$, положив

$$(\Phi^*T)_p(A_1, \dots, A_s) = T_p(d\Phi_p(A_1), \dots, d\Phi_p(A_s))$$

для любых векторов $A_1, \dots, A_s \in N_p$. Легко проверяется, что тем самым мы получим на многообразии N гладкое тензорное поле Φ^*T и что отображение

$$\Phi^*: \mathcal{O}_s^0(M) \rightarrow \mathcal{O}_s^0(N)$$

представляет собой гомоморфизм $\mathcal{O}(M)$ -модулей (если $\mathcal{O}(N)$ -модуль $\mathcal{O}_s^0(N)$ рассматривать как $\mathcal{O}(M)$ -модуль в силу отображения $\Phi^*: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(N)$).

Очевидно, что в случае, когда многообразие N является открытым подмногообразием W многообразия M , а отображение Φ является отображением вложения, отображение Φ^* совпадает с отображением ограничения $\mathcal{O}_s^0(M) \rightarrow \mathcal{O}_s^0(W)$. С другой стороны, для тензорных полей типа $(0, 1)$, т. е. для линейных дифференциальных форм, отображение Φ^* совпадает с отображением Φ^* , построенным в п. 7. Для полей типа (r, s) с $r \neq 0$ отображение Φ^* не определяется.

10. Римановы пространства

Гладкое m -мерное многообразие M называется *римановым пространством*, если на нем задано гладкое поле симметричных билинейных положительно определенных форм, т. е. такое тензорное поле g типа $(0, 2)$, что

1) для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$ имеет место равенство

$$g(X, Y) = g(Y, X);$$

2) для любой точки $p \in M$ билинейная форма g_p на пространстве M_p положительно определена.

Тензорное поле $g(X, Y)$ мы будем называть *полем метрического тензора* риманова пространства M . Для упрощения формул мы функцию $g(X, Y)$ будем, как правило, обозначать символом (X, Y) . Она симметрично зависит от X и Y и при $X = Y$ неотрицательна (и равна нулю только в тех точках $p \in M$, для которых $X_p = 0$).

Для любой точки p риманова пространства M билинейная форма g_p определяет в касательном пространстве M_p скалярное умножение

$$(A, B) = g_p(A, B), \quad A, B \in M_p,$$

превращающее это пространство в евклидово. Это позволяет нам, в частности, говорить о *длине* векторов из M_p и об *угле* между ними. Длину $\sqrt{(A, A)}$ вектора $A \in M_p$ мы будем обозначать символом $|A|$.

Каждое векторное поле X на римановом пространстве M определяет по формуле

$$\omega_X(Y) = (X, Y), \quad Y \in \mathcal{O}^1(M),$$

некоторую линейную дифференциальную форму ω_X . Обратно, в силу известных свойств евклидовых пространств, каждому ковектору $\omega_p \in M_p^*$ однозначно соответствует такой вектор $X_p \in M_p$, что

$$\omega_p(B) = (X_p, B)$$

для любого вектора $B \in M_p$. При этом без труда проверяется, что если ковекторы ω_p составляют гладкое на M поле ω , т. е. линейную дифференциальную форму, то соответствующие векторы X_p составляют гладкое векторное поле X , для которого $\omega_X = \omega$. Таким образом,

для римановых пространств понятия линейной дифференциальной формы и векторного поля, по существу, совпадают.

В частности, для любой гладкой на M функции f определено векторное поле $\text{grad } f$, связанное с дифференциалом df этой функции формулой

$$df(X) = (\text{grad } f, X), \quad X \in \mathcal{O}^1(M).$$

Мы будем называть это поле *полем градиента* функции f .

З а м е ч а н и е. Аналогичные рассуждения показывают, что на римановом пространстве M мы можем тензорные поля любого типа (r, s) отождествлять с полями каждого типа (r', s') , для которого $r' + s' = r + s$. Это отождествление известно как операция «подъема и опускания индексов». Нам она понадобится только в рассмотренном выше случае $r + s = 1$.

Откладывая более или менее углубленное изучение римановых пространств до гл. 7, мы ограничимся здесь лишь доказательством того, что

любое гладкое сепарабельное многообразие M можно определить как риманово пространство, т. е. на нем существует хотя бы одно поле g , обладающее указанными выше свойствами 1) и 2).

С этой целью мы в первую очередь заметим, что, поскольку любое сепарабельное многообразие M обладает счетной базой, его можно покрыть счетной системой координатных окрестностей U_n , $n \geq 1$, причем эти окрестности можно выбрать так, чтобы замыкание $\bar{U}_n$ каждой из них было компактно и чтобы локальные координаты $x_n^1, \dots, x_n^m$, определенные в окрестности U_n , были бы локальными координатами также и в некоторой большей окрестности, содержащей замыкание $\bar{U}_n$ окрестности U_n .

Выбрав такую систему координатных окрестностей U_n , мы рассмотрим множества

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n \bar{U}_k.$$

Каждое из этих множеств компактно, и их объединением служит все многообразие M .

Пусть сначала $n = 1$. Мы построим на множестве $A_1 = \bar{U}_1$ тензорное поле g , считая, что его компонентами

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_1^i}, \frac{\partial}{\partial x_1^j}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

в базисе $\frac{\partial}{\partial x_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1^m}$ являются числа δ_{ij} . Ясно, что поле g тем самым полностью определено на A_1 и удовлетворяет всем нужным условиям (симметрично и положительно определено).

Пусть теперь поле g уже построено на множестве A_{n-1} , где $n > 1$. Тогда, в частности, оно построено и на множестве $A_{n-1} \cap \bar{U}_n$ и потому для любой точки $p \in A_{n-1} \cap \bar{U}_n$ определены числа

$$g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_n^i}, \frac{\partial}{\partial x_n^j}\right), \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Совокупность $\frac{m(m+1)}{2}$ гладких функций $g_{ij}(p) = g_{ji}(p)$ можно рассматривать как гладкое отображение компактного множества $A_{n-1} \cap \bar{U}_n$ в множество D всех симметрических положительно определенных матриц порядка m . Пространство всех симметрических матриц изоморфно $\frac{m(m+1)}{2}$ -мерному ариф-

метическому пространству $\mathbf{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$ и, как легко видеть, множество D является выпуклым открытым подмножеством этого пространства. Поэтому (см. п. 4) множество D представляет собой E -многообразие. Следовательно, построенное выше гладкое отображение $A_{n-1} \cap \bar{U}_n \rightarrow D$ является ограничением некоторого гладкого отображения $M \rightarrow D$, т. е. на многообразии M существует $\frac{m(m+1)}{2}$ гладких функций $g_{ij}(p) = g_{ji}(p)$,

совпадающих на $A_{n-1} \cap \bar{U}_n$ с построенными выше функциями $g_{ij}(p)$, $p \in A_{n-1} \cap \bar{U}_n$, и обладающих тем свойством, что для любой точки $p \in M$ матрица $g_{ij}(p)$ симметрична и положительно определена. Принимая для любой точки $p \in \bar{U}_n$ числа $g_{ij}(p)$ за компоненты в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x_n^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n^m}\right)_p$ некоторого тензора,

мы получим на $\bar{U}_n$ тензорное поле g , совпадающее на

$A_{n-1} \cap \bar{U}_n$ с ранее построенным на A_{n-1} полем g . Тем самым мы поле g продолжили с A_{n-1} на $A_n = A_{n-1} \cup \bar{U}_n$. (В этом рассуждении мы неявно предполагали, что $A_{n-1} \cap \bar{U}_n \neq \emptyset$. В случае, когда $A_{n-1} \cap \bar{U}_n = \emptyset$, поле g на A_n строится очевидным образом.)

Таким образом, поле g по индукции построено на всех множествах A_n , а потому и на всем многообразии M .

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, сепарабельность (или, что равносильно, существование счетной базы) не является необходимым условием возможности построения на многообразии M поля метрического тензора. Действительно, например, ясно, что топологическая сумма любого числа римановых пространств автоматически определяется как риманово пространство. Однако, как мы покажем в гл. 7, если многообразие M связно, то это условие необходимо, т. е. любое связное риманово пространство обязательно является пространством со счетной базой.

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ. II

В этой главе изложение концентрируется в основном вокруг понятия подмногообразия.

В п. 1 излагаются основные определения, связанные с понятиями кривой и поверхности (любого числа измерений) в произвольном гладком многообразии.

В п. 2 доказывается теорема о возможности продолжения на все многообразие произвольного тензорного поля, заданного на достаточно «малой» кривой.

В п. 3 рассматривается интерпретация векторных полей на гладком многообразии как «полей инфинитезимальных преобразований» однопараметрических групп диффеоморфизмов. В этой связи, в частности, доказывается существование интегральных кривых для произвольного векторного поля.

В п. 4 излагаются простейшие свойства подмногообразий. В частности, здесь доказывается, что любое подмногообразие можно локально задать системой независимых уравнений.

В п. 5 для замкнутых подмногообразий евклидовых пространств доказывается существование трубчатых окрестностей.

В п. 6 доказывается теорема Уитни о вложении любого компактного многообразия в евклидово пространство. В этом же пункте доказывается известная теорема Сарда о критических точках гладких отображений многообразий.

В п. 7 доказывается теорема вложения Уитни для любого сепарабельного многообразия M . С этой целью многообразие M вкладывается сначала в счетномерное евклидово пространство R^∞ . Окончательный переход от пространства R^∞ к пространству R^n производится посредством ряда нужным образом подобранных проектирований.

1. Кривые и поверхности

Непрерывной кривой на гладком многообразии M мы будем называть произвольное непрерывное отображение $\gamma: J \rightarrow M$ некоторого открытого интервала J числовой оси R в многообразие M . Точки $p \in M$, для которых существует такое число $t \in J$, что $p = \gamma(t)$, мы будем называть *точками*

кривой γ и будем также говорить, что кривая γ *проходит* через эти точки.

Ограничение $\gamma|_C$ кривой $\gamma: J \rightarrow M$ на некотором замкнутом интервале $C \subset J$ мы будем называть *отрезком* кривой γ (при этом, как правило, мы будем предполагать, что интервал C к одной точке не сводится). Отрезок $\gamma|_C$ мы будем называть *конечным*, если интервал C конечен.

Допуская определенную вольность речи, мы в дальнейшем непрерывные отображения в многообразии M замкнутых интервалов $C \subset \mathbb{R}$ также будем называть *кривыми*. В силу этого соглашения введенные в п. 5 гл. 1 пути являются частным случаем кривых (получающимся при $C = [0, 1]$). Для каждой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ мы будем называть точки $p = \gamma(a)$ и $q = \gamma(b)$ ее соответственно *начальной* и *конечной* точками. Мы будем также говорить, что кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ *соединяет* точку $p = \gamma(a)$ с точкой $q = \gamma(b)$.

Поскольку кривые $\gamma: J \rightarrow M$, по определению, представляют собой отображения гладких многообразий, имеет смысл говорить о *гладких* (в данной точке $t \in J$ или на всем интервале J) кривых. Кривую, гладкую во всех точках интервала J , за исключением конечного числа их, мы будем называть *кусочно гладкой* кривой. Кусочно гладкую кривую можно представлять себе как конечную последовательность гладких кривых, обладающих тем свойством, что начальная точка каждой следующей кривой этой последовательности совпадает с конечной точкой предыдущей кривой.

Примером гладкой кривой может служить кривая $\delta_p: J \rightarrow M$, являющаяся постоянным отображением интервала J в некоторую точку $p \in M$. Кривые такого рода мы будем называть *вырожденными*.

Гладкое многообразие M называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно гладкой кривой. Каждое такое многообразие автоматически связно как топологическое пространство, т. е. оно не имеет непустых собственных одновременно замкнутых и открытых подмножеств (см. п. 2 гл. 1). Легко видеть, что обратное утверждение также верно, т. е.

любое гладкое многообразие M , связное как топологическое пространство, является связным многообразием.

Действительно, пусть N — подмножество многообразия M , состоящее из всех точек $p \in M$, которые можно соединить кусочно гладкой кривой с некоторой фиксированной точкой $p_0 \in M$. Ясно, что $N \neq \emptyset$ (ибо $p_0 \in N$). Кроме того, легко видеть, что подмножество N открыто в многообразии M . (Действительно, каждая точка $p \in N$ обладает в M окрестностью U , диффеоморфной открытому шару евклидова пространства и потому состоящей из точек q , которые можно соединить с точкой p гладкой кривой; комбинируя эту кривую с кусочно гладкой кривой, соединяющей точку p_0 с точкой p , мы получим кусочно гладкую кривую, соединяющую точку p_0 с точкой q .) По аналогичным соображениям дополнение $M \setminus N$ множества N также открыто, т. е. множество N замкнуто. Являясь непустым одновременно замкнутым и открытым подмножеством связного топологического пространства, множество N должно совпадать со всем пространством. Таким образом, любую точку многообразия M можно соединить кусочно гладкой кривой с некоторой фиксированной точкой p_0 . Но ясно, что это возможно только тогда, когда многообразие M связно.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что гладкое многообразие тогда и только тогда связно, когда любые две его точки можно соединить гладкой (и даже регулярной, см. ниже) кривой. Нам этот факт не понадобится и потому мы оставим его без доказательства.

Для любой гладкой на M функции f каждая кривая $\gamma: J \rightarrow M$ определяет на интервале J числовую функцию

$$f(t) = f(\gamma(t)), \quad t \in J.$$

Эта функция гладка (бесконечно дифференцируема), если кривая γ гладка.

В частности, если кривая γ содержится в координатной окрестности U , т. е. если $\gamma(J) \subset U$, то на интервале J определены функции

$$x^1(t) = x^1(\gamma(t)), \dots, x^m(t) = x^m(\gamma(t)),$$

где $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты в окрестности U . Эти функции однозначно определяют кривую γ . Мы будем говорить, что они осуществляют *параметрическое задание* этой кривой в окрестности U . Ясно, что

кривая γ тогда и только тогда гладка, когда функции $x^1(t), \dots, x^m(t)$ являются гладкими функциями параметра t .

Произвольную кривую на многообразии γ мы можем параметрически задавать на каждой координатной окрестности, через которую эта кривая проходит.

Пусть M_* — многообразие касательных векторов многообразия M (см. п. 6 гл. 4) и пусть

$$\mu: M_* \rightarrow M$$

— естественная проекция ($\mu(A) = p$, если $A \in M_p$). Векторным полем на кривой $\gamma: J \rightarrow M$ мы будем называть произвольную кривую

$$X: J \rightarrow M_*$$

многообразия M_* , проектирующуюся в кривую γ , т. е. обладающую тем свойством, что

$$\mu \circ X = \gamma.$$

Другими словами, векторное поле $X(t)$ на кривой $\gamma(t)$ представляет собой функцию, сопоставляющую каждой точке $t \in J$ некоторый вектор $X(t) \in M_{\gamma(t)}$. На каждой координатной окрестности U произвольное векторное поле $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = X^i(t) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)},$$

где $X^i(t) = X(t) x^i$ — некоторые гладкие числовые функции (компоненты поля $X(t)$ в рассматриваемой системе локальных координат). Легко видеть, что векторное поле $X(t)$ на гладкой кривой $\gamma(t)$ тогда и только тогда гладко (т. е. является гладкой кривой многообразия M_*), когда все его компоненты $X^1(t), \dots, X^m(t)$ являются гладкими функциями параметра t .

Примером гладкого векторного поля на гладкой кривой $\gamma: J \rightarrow M$ служит поле

$$\dot{\gamma}(t) = d\gamma_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Это поле мы будем называть *полем векторов касательных к кривой γ* . Оно тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда кривая γ вырождена. Кривую $\gamma: J \rightarrow M$ мы будем

называть *регулярной в точке* $t \in J$, если $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ (это определение согласуется с общим определением регулярного отображения; см. п. 6 гл. 3). Кривую $\gamma: J \rightarrow M$, регулярную во всех точках интервала J , мы будем называть *регулярной кривой*, а кривую $\gamma: J \rightarrow M$, регулярную во всех точках интервала J , за исключением конечного числа их, — *кусочно регулярной кривой*.

Так как для числовых функций параметра t операция $\frac{\partial}{\partial t}$ совпадает с обычным дифференцированием по t и так как для любой функции f , гладкой в точке $\gamma(t)$ кривой $\gamma: J \rightarrow M$, имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(\gamma(t))) = d\gamma_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f = \dot{\gamma}(t) f,$$

то

$$\dot{\gamma}(t) f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t))}{h}. \quad (1)$$

В частности, производные $\dot{x}^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}$ функций $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$, осуществляющих параметрическое задание кривой $\gamma(t)$ в некоторой системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$, выражаются формулами

$$\dot{x}^i(t) = \dot{\gamma}(t) x^i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Это означает, что

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{x}^i(t) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)},$$

т. е. что

функции $\dot{x}^i(t)$ являются компонентами поля $\dot{\gamma}(t)$ в системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$.

Поэтому для любой гладкой на M функции f производная $\dot{f}(t) = \dot{\gamma}(t) f$ функции $f(t) = f(\gamma(t))$ может быть вычислена по обычному «правилу дифференцирования сложной функции»:

$$\dot{f}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)} \cdot \frac{dx^i(t)}{dt}. \quad (2)$$

Для любой гладкой кривой $\gamma: J \rightarrow M$ и любого гладкого отображения $\Phi: M \rightarrow N$ на многообразии N определена кривая

$$\gamma_\Phi = \Phi \circ \gamma.$$

Из формулы (6) п. 6 гл. 4 непосредственно вытекает, что для любого $t \in J$ имеет место равенство

$$\dot{\gamma}_\Phi(t) = d\Phi_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)). \quad (3)$$

Наряду с векторными полями мы будем на (гладкой) кривой $\gamma: J \rightarrow M$ рассматривать также (гладкие) тензорные поля любого данного типа (r, s) . Так как для произвольных тензоров мы аналога многообразия M_* не вводили, то мы принуждены здесь дать этому понятию независимое определение. Именно, *тензорным полем $T(t)$ типа (r, s) на кривой $\gamma(t)$* мы будем называть произвольную функцию, сопоставляющую каждой точке $t \in J$ некоторый тензор $T(t) \in \mathcal{O}_s^r(\gamma(t))$. Тензорное поле $T(t)$ типа (r, s) на гладкой кривой $\gamma(t)$ мы будем называть *гладким*, если для любых линейных дифференциальных форм $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathcal{O}_1(M)$ и любых векторных полей $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{O}^1(M)$ числовая функция

$$T(t)((\omega^1)_{\gamma(t)}, \dots, (\omega^r)_{\gamma(t)}; (X_1)_{\gamma(t)}, \dots, (X_s)_{\gamma(t)})$$

точки $t \in J$ является гладкой на J функцией. Если кривая $\gamma(t)$ содержится в координатной окрестности U , то для любого $t \in J$ имеет место разложение

$$T(t) = T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(t) (dx^{l_1})_{\gamma(t)} \otimes \dots \otimes (dx^{l_s})_{\gamma(t)} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \right)_{\gamma(t)} \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{k_r}} \right)_{\gamma(t)},$$

где $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты в окрестности U , а $T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(t) =$

$$= T(t) \left((dx^{k_1})_{\gamma(t)}, \dots, (dx^{k_r})_{\gamma(t)}; \left(\frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \right)_{\gamma(t)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{l_s}} \right)_{\gamma(t)} \right).$$

Функции $T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(t)$ мы будем называть *компонентами* поля $T(t)$ в системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$. Легко видеть, что поле $T(t)$ тогда и только тогда гладко, когда все его компоненты $T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(t)$ являются гладкими на J функциями.

При рассмотрении тензорных полей на кривой $\gamma: J \rightarrow M$ мы, как правило, будем предполагать, что $(r, s) \neq (0, 0)$, ибо тензорные поля типа $(0, 0)$ представляют собой не что иное,

как числовые функции, определенные на интервале J и потому с многообразием M и кривой γ , по существу, никак не связанные.

Обобщением понятия гладкой кривой является понятие *n -мерной (гладкой) поверхности*, т. е. гладкого отображения в многообразие M некоторого связного открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$. Как правило, мы будем считать, множество G прямоугольником $J_1 \times \dots \times J_n$, т. е. произведением n открытых интервалов $J_1, \dots, J_n \subset \mathbb{R}$. Кроме того, для упрощения обозначений мы будем предполагать, что $n = 2$, хотя все сказанное ниже будет справедливо (с соответствующими очевидными изменениями) и для любого большего n .

Пусть

$$\varphi: J_1 \times J_2 \rightarrow M$$

— произвольная поверхность. Векторным полем на поверхности φ мы будем называть произвольную (гладкую) поверхность

$$X: J_1 \times J_2 \rightarrow M_*$$

многообразия M_* , обладающую тем свойством, что

$$\mu \circ X = \varphi,$$

где $\mu: M_* \rightarrow M$ — естественная проекция. Другими словами, векторное поле $X(t^1, t^2)$ на поверхности $\varphi(t^1, t^2)$ представляет собой функцию, сопоставляющую каждой точке $(t^1, t^2) \in J_1 \times J_2$ некоторый вектор $X(t^1, t^2) \in M_{\varphi(t^1, t^2)}$ и обладающую тем свойством, что для любой гладкой в точке $p = \varphi(t^1, t^2)$ функции f числовая функция $g(t^1, t^2) = X(t^1, t^2)f$ гладка в точке (t^1, t^2) .

Аналогичным образом можно определить понятие *тензорного поля* на поверхности φ любого данного типа (r, s) . Мы на этом останавливаться не будем, поскольку это понятие нам в дальнейшем не понадобится.

В каждой точке (t^1, t^2) прямоугольника $J_1 \times J_2$ определены два вектора $\frac{\partial}{\partial t^1}$ и $\frac{\partial}{\partial t^2}$, составляющие базис пространства $(J_1 \times J_2)_{(t^1, t^2)}$. Образы этих векторов при отображении

$$d\varphi_{(t^1, t^2)}: (J_1 \times J_2)_{(t^1, t^2)} \rightarrow M_{\varphi(t^1, t^2)}$$

мы будем обозначать символами $\frac{\partial \varphi}{\partial t^1}(t^1, t^2)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t^2}(t^1, t^2)$ соответственно и будем называть их *базисными касательными векторами* поверхности φ в точке (t^1, t^2) . Ясно, что тем самым мы получим на поверхности φ два векторных поля $\frac{\partial \varphi}{\partial t^1}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t^2}$.

Мы будем говорить, что кривая $\gamma: J \rightarrow M$ принадлежит поверхности $\varphi: J_1 \times J_2 \rightarrow M$, если существуют такие гладкие функции $t^1(t) \in J_1$, $t \in J$, и $t^2(t) \in J_2$, $t \in J$, что

$$\gamma(t) = \varphi(t^1(t), t^2(t))$$

для любого $t \in J$. Без труда проверяется, что, как и в элементарном анализе, касательные векторы такой кривой определяются формулой

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t^1}(t^1(t), t^2(t)) \cdot \dot{t}^1(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}(t^1(t), t^2(t)) \cdot \dot{t}^2(t).$$

Для любого n соответствующая формула имеет вид:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t^i}(t^1(t), \dots, t^n(t)) \cdot \dot{t}^i(t),$$

где

$$\gamma(t) = \varphi(t^1(t), \dots, t^n(t)).$$

Среди кривых, принадлежащих поверхности $\varphi: J^1 \times J^2 \rightarrow M$, особое значение имеют так называемые «координатные кривые»

$$\varphi_{t^1}: J_2 \rightarrow M, \quad \varphi_{t^2}: J_1 \rightarrow M.$$

Первая из этих кривых определяется для каждого фиксированного $t^1 \in J_1$ формулой

$$\varphi_{t^1}(t^2) = \varphi(t^1, t^2), \quad t^2 \in J_2,$$

а вторая определяется для каждого фиксированного $t^2 \in J_2$ формулой

$$\varphi_{t^2}(t^1) = \varphi(t^1, t^2), \quad t^1 \in J_1.$$

Касательными векторами этих кривых являются базисные касательные векторы поверхности φ :

$$\dot{\varphi}_{t^1}(t^2) = \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}(t^1, t^2), \quad \dot{\varphi}_{t^2}(t^1) = \frac{\partial \varphi}{\partial t^1}(t^1, t^2).$$

Если поверхность $\varphi: J_1 \times J_2 \rightarrow M$ содержится в координатной окрестности U (т. е. если $\varphi(J_1 \times J_2) \subset U$), то на прямоугольнике $J_1 \times J_2$ определены функции

$$x^1(t^1, t^2) = x^1(\varphi(t^1, t^2)), \dots, x^m(t^1, t^2) = x^m(\varphi(t^1, t^2)),$$

осуществляющие *параметрическое задание* поверхности φ в окрестности U . Кроме того, в этом случае любое векторное поле $X(t^1, t^2)$ на поверхности φ имеет вид

$$X(t^1, t^2) = X^i(t^1, t^2) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(t^1, t^2)},$$

где $X^i(t^1, t^2) = X(t^1, t^2) x^i$ — некоторые гладкие на $J_1 \times J_2$ функции (*компоненты* поля $X(t^1, t^2)$ в рассматриваемой системе локальных координат). В частности,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t^1}(t^1, t^2) &= \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(t^1, t^2)}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}(t^1, t^2) &= \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(t^1, t^2)}. \end{aligned}$$

2. Продолжение тензорных полей

Мы будем говорить, что тензорное поле $T(t)$, заданное на кривой $\gamma(t)$ многообразия M , *продолжаемо* на отрезке $\gamma|_C$ этой кривой, если на M существует такое (гладкое) тензорное поле T — *продолжение* поля $T(t)$, что

$$T(t) = T_{\gamma(t)}$$

для любого $t \in C$.

Кроме того, мы будем говорить, что кривая $\gamma: J \rightarrow M$ (или ее отрезок $\gamma|_C$) *не имеет самопересечений*, если $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ (где соответственно $t_1, t_2 \in J$ или $t_1, t_2 \in C$). Конечный отрезок $\gamma|_C$ кривой γ мы будем называть *элементарным*, если он не имеет самопересечений и содержится в некоторой координатной окрестности U многообразия M .

В этом пункте мы покажем, что
любое тензорное поле $T(t)$ на регулярной кривой $\gamma(t)$ *продолжаемо на каждом ее элементарном отрезке* $\gamma|_C$.

Ясно, что для доказательства этого утверждения достаточно построить продолжение T поля $T(t)$ лишь на координатной окрестности $U \supset \gamma(C)$. Действительно, поскольку от-

резок C конечен, а кривая γ непрерывна, множество $\gamma(C)$ компактно и потому обладает окрестностью $V \subset U$ с компактным замыканием $\bar{V} \subset U$. Следовательно, согласно свойству локальной эпиморфности отображения ограничения (см. п. 8 гл. 4), поле T , определенное на U , совпадает на V с некоторым полем, определенным на всем многообразии M . Это последнее поле и будет искомым продолжением поля $T(t)$ на отрезке $\gamma|_C$.

С другой стороны, для того чтобы построить продолжение поля $T(t)$ на окрестность U , достаточно для каждой из его компонент $T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(t)$ (в некоторой определенной в U системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$) найти на M (или хотя бы на U) такую гладкую функцию $T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}$, что

$$T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(t) = T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(\gamma(t))$$

для любого $t \in C$. Действительно, тогда формула

$$T = T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} dx^{l_1} \otimes \dots \otimes dx^{l_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}$$

будет определять продолжение T поля $T(t)$ на окрестность U .

Таким образом, для доказательства рассматриваемого утверждения достаточно доказать, что

для любой гладкой на C функции $g(t)$ существует на многообразии M такая гладкая функция f , что

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

для любого $t \in C$.

Рассмотрим функции

$$x^1(t) = x^1(\gamma(t)), \dots, x^m(t) = x^m(\gamma(t)),$$

осуществляющие параметрическое задание кривой $\gamma(t)$ в окрестности U . Так как кривая $\gamma(t)$, по условию, регулярна, то для любой точки $t_0 \in C$ существует такой индекс i_0 , что $\dot{x}^{i_0}(t_0) \neq 0$. Следовательно, согласно теореме об обратной функции, функция $x^{i_0}(t)$ осуществляет диффеоморфизм некоторой окрестности $|t - t_0| < \delta$ точки t_0 на некоторую окрестность точки $x^{i_0}(t_0)$. Другими словами, в окрестности точки $x^{i_0}(t_0) \in R$ существует такая гладкая функция u , что

$y(x^{i_0}(t)) = t$ при $|t - t_0| < \delta$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}_{t_0}(p) = g(y(x^{i_0}(p))).$$

Эта функция определена в некоторой окрестности точки $p_0 = \gamma(t_0)$ и является гладкой в p_0 функцией. Поэтому точка p_0 обладает окрестностью $\tilde{U}_{t_0}$, в которой функция $\tilde{f}_{t_0}$ совпадает с некоторой гладкой на M функцией f_{t_0} .

Мы можем считать, что при $|t - t_0| < \delta$ имеет место включение $\gamma(t) \in \tilde{U}_{t_0}$ и потому

$$f_{t_0}(\gamma(t)) = \tilde{f}_{t_0}(\gamma(t)) = g(y(x^{i_0}(\gamma(t)))) = g(y(x^{i_0}(t))) = g(t).$$

Поскольку отрезок C конечен, множество C' , получающееся удалением из отрезка C точек t , для которых $|t - t_0| < \delta$ компактно, и потому его образ $\gamma(C')$ при отображении γ замкнут. Кроме того, он не содержит точки p_0 , ибо отрезок $\gamma|_C$ не имеет, по условию, самопересечений. Поэтому точка p_0 обладает такой окрестностью U_{t_0} , что

$$U_{t_0} \cap \gamma(C') = \emptyset.$$

Следовательно, если число $t \in C$ обладает тем свойством, что $\gamma(t) \in U_{t_0}$, то $|t - t_0| < \delta$ и потому, согласно сказанному выше,

$$f_{t_0}(\gamma(t)) = g(t).$$

Пусть теперь W_{t_0} — произвольная окрестность точки $p_0 = \gamma(t_0)$, замыкание $\overline{W}_{t_0}$ которой компактно и содержится в окрестности U_{t_0} . Поскольку множество $\gamma(C)$ компактно, на отрезке C существует такая конечная система точек $t_1, \dots, t_r$, что соответствующие окрестности

$$W_1 = W_{t_1}, \dots, W_r = W_{t_r}$$

покрывают множество $\gamma(C)$. Тогда окрестности

$$U_1 = U_{t_1}, \dots, U_r = U_{t_r}$$

составляют покрытие множества $\gamma(C)$, удовлетворяющее всем условиям предложения, доказанного в п. 4 гл. 4 на стр. 206—207. Поэтому существует подчиненное этому покрытию разложение единицы $\{h_1, \dots, h_r\}$ на множестве $\gamma(C)$. Рассмотрим функцию

$$f = f_1 h_1 + \dots + f_r h_r.$$

Эта функция является гладкой на M функцией. Кроме того, так как, по построению, $f_i(\gamma(t)) = g(t)$, если $\gamma(t) \in U_i$, и $h_i(\gamma(t)) = 0$ в противном случае, то

$$f(\gamma(t)) = g(t)$$

для любого $t \in C$.

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение имеет место для любого отрезка $\gamma|_C$ кривой γ , не имеющего самопересечений. Этот факт нам не понадобится и потому мы оставим его без доказательства.

Для уяснения общности доказанного утверждения полезно заметить, что

любая точка $p_0 = \gamma(t_0)$ регулярной кривой $\gamma: J \rightarrow M$ принадлежит некоторому элементарному отрезку $\gamma|_C$.

Действительно, пусть $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат в точке p_0 . Как мы уже видели, из условия регулярности кривой γ следует, что среди осуществляющих параметрическое задание этой кривой функций $x^i(t)$ существует функция $x^{i_0}(t)$, производная $\dot{x}^{i_0}(t)$ которой отлична от нуля в точке t_0 , а потому и на некотором замкнутом отрезке $C \ni t_0$. Так как $\dot{x}^{i_0}(t) \neq 0$ на C , то $\dot{x}^{i_0}(t_1) \neq \dot{x}^{i_0}(t_2)$, а потому и $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для любых различных точек $t_1, t_2 \in C$. Следовательно, отрезок $\gamma|_C$ кривой γ элементарен.

3. Однопараметрические группы диффеоморфизмов и интегральные кривые

Гладкое отображение

$$\varphi: R \times M \rightarrow M$$

произведения $R \times M$ в многообразие M мы будем называть *однопараметрической группой диффеоморфизмов* многообразия M , если

- 1) $\varphi(0, p) = p$ для любой точки $p \in M$;
- 2) $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p)$ для любой точки $p \in M$ и любых чисел $t, s \in R$.

Для каждого фиксированного числа $t \in R$ группа φ определяет по формуле

$$\varphi_t(p) = \varphi(t, p), \quad p \in M$$

некоторое (очевидно, гладкое) отображение

$$\varphi_t: M \rightarrow M.$$

Условия 1) и 2) соответственно означают при этом, что

1) отображение φ_0 является тождественным отображением многообразия M ;

2) для любых чисел $t, s \in \mathbf{R}$ имеет место равенство

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}.$$

Из этих условий немедленно следует, что для любого числа $t \in \mathbf{R}$ отображение φ_t обладает обратным отображением φ_{-t} и потому является диффеоморфизмом.

Для каждой фиксированной точки $p \in M$ группа φ определяет по формуле

$$\varphi_p(t) = \varphi(t, p), \quad t \in \mathbf{R},$$

некоторую гладкую кривую

$$\varphi_p: \mathbf{R} \rightarrow M$$

на многообразии M . Мы будем называть эту кривую *траекторией* группы φ , определяемой точкой p . При $t=0$ она проходит через точку p . Мы определим на многообразии M векторное поле X , полагая для любой точки $p \in M$

$$X_p = \dot{\varphi}_p(0).$$

Согласно формуле (1) п. 1 для любой гладкой в точке p функции f имеет место равенство

$$X_p f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t}. \quad (1)$$

В частности, отсюда непосредственно следует, что для каждой гладкой на M функции f функция $g(p) = X_p f$ также гладка на M , т. е. что поле X является гладким векторным полем на многообразии M . Мы будем говорить, что это поле *порождено* данной однопараметрической группой φ диффеоморфизмов многообразия M .

Вообще говоря, не каждое векторное поле $X \in \mathcal{O}^1(M)$ порождается некоторой однопараметрической группой диффеоморфизмов многообразия M . Однако можно показать, что

локально это верно. Чтобы придать этому утверждению точный смысл, мы рассмотрим произвольную точку p_0 многообразия M , некоторую ее окрестность U и некоторый интервал J оси $\mathbf{R}$, содержащий точку 0. Гладкое отображение

$$\varphi: J \times \mathbf{R} \rightarrow M$$

произведения $J \times \mathbf{R}$ в многообразии M мы будем называть *локальной однопараметрической группой локальных диффеоморфизмов*, если

- 1) $\varphi(0, p) = p$ для любой точки $p \in U$;
- 2) $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p)$ для любой точки $p \in U$ и любых чисел $t, s \in J$, обладающих тем свойством, что $t + s \in J$ и $\varphi(s, p) \in U$.

Для каждого фиксированного числа $t \in J$ локальная группа φ определяет по формуле

$$\varphi_t(p) = \varphi(t, p), \quad p \in U,$$

некоторое гладкое отображение

$$\varphi_t: U \rightarrow M$$

окрестности U в многообразии M . Условия 1) и 2) соответственно означают при этом, что

- 1) отображение φ_0 является тождественным отображением окрестности U ;
- 2) для любых чисел $t, s \in J$ и любой точки $p \in U$, обладающих тем свойством, что $t + s \in J$ и $\varphi_s(p) \in U$, имеет место равенство

$$\varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_{t+s}(p).$$

Элементарные соображения, использующие непрерывность отображения φ и локальную компактность числовой оси $\mathbf{R}$, показывают, что существуют такая окрестность $U_0 \subset U$ точки p_0 и такой интервал $J_0 \subset J$ оси $\mathbf{R}$ с центром в точке 0, что $\varphi_t(U_0) \subset U$ для любого $t \in J_0$. Отсюда следует, что при $t \in J_0$ для любой точки $p \in U_0$ имеет место равенство

$$\varphi_{-t}(\varphi_t(p)) = \varphi_t(\varphi_{-t}(p)) = p.$$

Другими словами, ограничение $\varphi_t|_{U_0}$ отображения φ_t , $t \in J_0$, на окрестности U_0 обладает обратным отображением φ_{-t} и потому является диффеоморфизмом этой окрестности на окрестность $\varphi_t(U_0)$ точки $\varphi_t(p_0)$.

Для каждой фиксированной точки $p \in U$ локальная группа φ определяет по формуле

$$\varphi_p(t) = \varphi(t, p), \quad t \in J,$$

некоторую гладкую кривую

$$\varphi_p: J \rightarrow M.$$

Как и для нелокального случая, мы будем называть эту кривую *траекторией* группы φ , определяемой точкой p . При $t=0$ она проходит через точку p . Мы определим на окрестности U векторное поле X , полагая для любой точки $p \in U$

$$X_p = \dot{\varphi}_p(0).$$

Как и выше, немедленно проверяется, что так построенное векторное поле X гладко. Мы будем говорить, что оно *порождено* локальной группой φ локальных диффеоморфизмов окрестности U .

Гладкую кривую $\gamma: J \rightarrow M$ мы будем называть *интегральной кривой* векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$, если

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$$

для любого $t \in J$. Легко видеть, что

каждая траектория φ_p локальной группы φ локальных диффеоморфизмов окрестности U является интегральной кривой векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(U)$, порожденного этой группой.

Действительно, ввиду условия 2) для любого числа $t \in J$ и любого достаточно малого (по абсолютной величине) числа $s \in \mathbf{R}$ имеет место равенство

$$\varphi_{\varphi_p(t)}(s) = \varphi_p(t + s).$$

Считая здесь число t постоянным, а число s параметром на кривой и переходя к касательным векторам в точке $s=0$, мы немедленно получим, что

$$X_{\varphi_p(t)} = \dot{\varphi}_{\varphi_p(t)}(0) = \dot{\varphi}_p(t).$$

Предположим теперь, что предусмотренная определением локальной однопараметрической группы

$$\varphi: J \times U \rightarrow M$$

окрестность U является координатной окрестностью точки p_0 . Не теряя общности, мы можем при этом считать, что определенные в окрестности U локальные координаты $x^1, \dots, x^m$ равны нулю в точке p_0 , т. е. что соответствующий им координатный гомеоморфизм $\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ переводит точку p_0 в точку $0 \in \mathbb{R}^m$. Фиксировав такую систему локальных координат и положив

$$\varphi^1(t, t) = x^1(\varphi(t, \xi^{-1}(t))), \dots, \varphi^m(t, t) = x^m(\varphi(t, \xi^{-1}(t))),$$

мы немедленно получим, что задание локальной однопараметрической группы $\varphi: J \times U \rightarrow M$ равносильно заданию в окрестности $U^0 = \xi(U)$ точки 0 системы m гладких функций

$$\varphi^1(t, t), \dots, \varphi^m(t, t), \quad t \in J, t \in U^0,$$

обладающих следующими свойствами:

1) для любой точки $t = (t^1, \dots, t^m) \in U^0$ имеют место равенства

$$\varphi^1(0, t) = t^1, \dots, \varphi^m(0, t) = t^m;$$

2) если числа $t, s \in J$ и точка $t \in U^0$ обладают тем свойством, что $t + s \in J$ и точка $\varphi(s, t) = (\varphi^1(s, t), \dots, \varphi^m(s, t)) \in \mathbb{R}^m$ принадлежит окрестности U^0 , то

$$\varphi^i(t, \varphi(s, t)) = \varphi^i(t + s, t)$$

для любого $i = 1, \dots, m$.

С другой стороны, задание в окрестности U векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(U)$ равносильно заданию в окрестности U^0 системы m гладких функций

$$X^1(t) = X^1(t^1, \dots, t^m), \dots, X^m(t) = X^m(t^1, \dots, t^m),$$

связанных с компонентами $X^1 = Xx^1, \dots, X^m = Xx^m$ поля X соотношениями

$$X^1 = X^1(x^1, \dots, x^m), \dots, X^m = X^m(x^1, \dots, x^m).$$

При этом поле X тогда и только тогда порождено локальной однопараметрической группой φ , когда для каждой точки $t \in U^0$ функции

$$\varphi^1(t) = \varphi^1(t, t), \dots, \varphi^m(t) = \varphi^m(t, t)$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{\varphi}^i(t) = X^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)), \quad t \in J$$

выражающим то обстоятельство, что траектории $\varphi_p(t)$ группы φ являются интегральными кривыми поля X .

Из этих соображений легко вытекает, что

любое векторное поле $X \in \mathcal{O}^1(M)$ в некоторой окрестности U каждой точки $p_0 \in M$ порождается одной и только одной локальной однопараметрической группой $\varphi: J \times U \rightarrow M$.

Действительно, выберем окрестность U_1 точки p_0 и систему локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в этой окрестности так, чтобы соответствующая окрестность $U_1^0 = \xi(U_1)$ точки $\xi(p_0) = 0$ являлась кубом $|t^i| < 1$, $i = 1, \dots, m$, пространства R^m . В этом кубе мы рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}^i(t) = X^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

относительно неизвестных функций $\varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)$, где $X^i(t^1, \dots, t^m)$, $i = 1, \dots, m$, — функции на U_1^0 , соответствующие, как описано выше, данному векторному полю X . Согласно основной теореме существования и единственности решений систем дифференциальных уравнений, существуют такие положительные числа ε и $\delta < 1$, что для любой точки $t = (t^1, \dots, t^m)$ куба $U^0 \subset U_1^0$, определяемого неравенствами $|t^i| < \delta$, $i = 1, \dots, m$, на интервале $J = (-\varepsilon, \varepsilon)$ оси R существует одно и только одно решение $\varphi^1(t) = \varphi^1(t, t), \dots, \varphi^m(t) = \varphi^m(t, t)$ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi^1(0, t) = t^1, \dots, \varphi^m(0, t) = t^m.$$

При этом, согласно теореме о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, функции $\varphi^1(t, t), \dots, \varphi^m(t, t)$ гладко зависят от $t, t^1, \dots, t^m$.

Таким образом, мы на интервале J нашли m гладких функций

$$\varphi^1(t, t), \dots, \varphi^m(t, t), \quad (3)$$

гладко зависящих от точки $t \in U^0$ и удовлетворяющих системе (2) и указанному выше условию 1). Поэтому, в соответствии со сказанным выше, для доказательства существования локальной однопараметрической группы φ , порождающей на окрестности $U = \xi^{-1}(U^0)$ поле X , нам достаточно показать, что функции (3) удовлетворяют также и условию 2).

Пусть t и s — такие числа интервала J , что $t + s \in J$, и пусть t — такая точка куба U^0 , что

$$\Phi(s, t) = (\varphi^1(s, t), \dots, \varphi^m(s, t)) \in U^0.$$

Рассмотрим функции

$$\psi^1(t) = \varphi^1(t + s, t), \dots, \psi^m(t) = \varphi^m(t + s, t).$$

Ясно, что эти функции удовлетворяют системе (2) с начальными условиями

$$\psi^1(0) = \varphi^1(s, t), \dots, \psi^m(0) = \varphi^m(s, t).$$

Поэтому, в силу теоремы единственности решений системы (2),

$$\psi^i(t) = \varphi^i(t, \Phi(s, t)), \quad i = 1, \dots, m.$$

Но это и означает, что функции (3) удовлетворяют условию 2).

Единственность построенной локальной однопараметрической группы немедленно вытекает из единственности решений системы (2).

Из доказанного утверждения, в частности, непосредственно следует, что

для любого векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$ и любой точки $p \in M$ существует одна и только одна интегральная кривая $\gamma: J \rightarrow M$ поля X , определенная на некотором интервале J оси $\mathbf{R}$, содержащем точку 0, и обладающая тем свойством, что $\gamma(0) = p$.

При этом согласно формуле (1),

для любой функции $f \in \mathcal{O}(p)$ имеет место равенство

$$X_p f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t}. \quad (4)$$

В дальнейшем нам понадобится также следующее несколько более общее предложение, непосредственно вытекающее из формулы (1) п. 1:

для любого вектора $C \in M_p$, любой функции $f \in \mathcal{O}(p)$ и любой кривой $\gamma: J \rightarrow M$, определенной на интервале $J \subset \mathbf{R}$, содержащем точку 0, и обладающей тем свойством, что $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = C$, имеет место равенство

$$Cf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t}.$$

Рассмотрим теперь две точки p'_0 и p''_0 многообразия M и их окрестности U' и U'' , в которых векторное поле X порождается локальными однопараметрическими группами $\varphi': J' \times U' \rightarrow M$ и $\varphi'': J'' \times U'' \rightarrow M$ соответственно. Из единственности этих групп немедленно вытекает, что на пересечении $U' \cap U''$ группы φ' и φ'' совпадают, т. е. что либо это пересечение пусто, либо $\varphi'_t|_{U' \cap U''} = \varphi''_t|_{U' \cap U''}$ для любого числа $t \in J = J' \cap J''$. Поэтому, полагая

$$\varphi_t(p) = \begin{cases} \varphi'_t(p), & \text{если } p \in U', \\ \varphi''_t(p), & \text{если } p \in U'', \end{cases} \quad t \in J,$$

мы определим на $U = U' \cup U''$ локальную однопараметрическую группу $\varphi: J \times U \rightarrow M$, порождающую на U поле X .

Из этого замечания немедленно следует, что для любого открытого множества $U \subset M$, замыкание $\bar{U}$ которого компактно (и потому покрывается конечным числом окрестностей, в которых поле X порождается некоторой группой), существует одна и только одна локальная однопараметрическая группа

$$\varphi: J \times U \rightarrow M,$$

где J — некоторый интервал оси $\mathbf{R}$, содержащий точку 0, порождающая на U данное векторное поле $X \in \mathcal{O}^1(M)$.

Для каждого векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$ замыкание множества всех точек $p \in M$, для которых $X_p \neq 0$, мы будем называть *носителем* этого поля. Из сказанного выше легко следует, что

любое векторное поле $X \in \mathcal{O}^1(M)$, носитель которого компактен, порождается некоторой однопараметрической группой

$$\varphi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$$

диффеоморфизмов многообразия M .

Действительно, в силу компактности носитель поля X обладает окрестностью U с компактным замыканием. С другой стороны, согласно сказанному выше, поле X на окрестности U порождается некоторой локальной однопараметрической группой

$$\varphi: J \times U \rightarrow M.$$

Мы распространим эту группу на все многообразие M , полагая

$$\varphi_t(p) = p$$

для всех чисел $t \in J$ и всех точек $p \in M \setminus V$. Ясно, что в результате мы получим локальную однопараметрическую группу

$$\varphi: J \times M \rightarrow M,$$

порождающую поле X на всем многообразии M .

Пусть t_0 — такое отличное от нуля число интервала J , что $-t_0 \in J$. Любое число $t \in \mathbf{R}$ мы можем записать в виде суммы некоторого целочисленного кратного kt_0 числа t_0 и остатка r , удовлетворяющего неравенству $|r| < t_0$ и потому принадлежащего интервалу J . Мы определим отображение $\varphi_t: M \rightarrow M$, полагая

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_{t_0} \circ \varphi_{t_0} \circ \dots \circ \varphi_{t_0} \circ \varphi_r, & \text{если } k \geq 0, \\ \varphi_{-t_0} \circ \varphi_{-t_0} \circ \dots \circ \varphi_{-t_0} \circ \varphi_r, & \text{если } k < 0, \end{cases}$$

где отображение φ_{t_0} (или соответственно отображение φ_{-t_0}) повторено k раз (соответственно $-k$ раз). Простая проверка показывает, что тем самым мы получим некоторую однопараметрическую группу

$$\varphi_t: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$$

диффеоморфизмов многообразия M . Очевидно, что эта группа является распространением (с J на $\mathbf{R}$) построенной выше локальной группы $\varphi: J \times M \rightarrow M$ и потому также порождает векторное поле X .

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

В частности, мы видим, что

на компактном многообразии M любое векторное поле $X \in \mathcal{O}^1(M)$ порождается некоторой однопараметрической группой

$$\varphi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$$

диффеоморфизмов многообразия M .

4. Подмногообразие

Гладкое многообразие N мы будем называть *подмногообразием* (гладким) гладкого многообразия M , если оно как топологическое пространство содержится в многообразии M , его размерность n не превосходит размерности m многообразия M и отображение вложения $\iota: N \subset M$ гладко и регулярно.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что условие $n \leq m$ вытекает из условия $N \subset M$.

Для каждой точки p подмногообразия N в пространстве M_p определено подпространство $d\iota_p(N_p)$, изоморфное пространству N_p . О векторах этого подпространства мы будем говорить, что они *касаются* подмногообразия N в точке p . Кроме того, как правило, мы будем это подпространство отождествлять с пространством N_p , т. е. мономорфное отображение $d\iota_p$ мы будем рассматривать как вложение.

В частном случае, когда $N = M$, мы получаем, согласно этому определению, что любой вектор пространства M_p касается многообразия M в точке p . Этим и объясняется название «касательное пространство» для пространства M_p .

З а м е ч а н и е. Принятое нами здесь определение подмногообразия по форме отличается от определения, принятого в п. 3 гл. 4. Однако оказывается, что оба эти определения на самом деле равносильны, т. е., во-первых,

для любого являющегося многообразием подпредмногообразия N многообразия M отображение вложения $\iota: N \subset M$ регулярно

и, во-вторых,

любое подмногообразие M многообразия N является его подпредмногообразием.

Для доказательства первого утверждения мы заметим, что, согласно определению гладкости на подпредмногообразии, для любой точки $p \in N$ каждая гладкая в p функция g на N является вблизи точки p ограничением некоторой гладкой в p функции f на M , т. е. вблизи этой точки имеет вид $f \circ \iota$. С другой стороны, по определению отображения $d\iota_p$,

для любого вектора $A \in N_p$ имеет место равенство

$$d\iota_p(A)(f) = A(f \circ \iota).$$

Поэтому если $d\iota_p(A) = 0$, то $A = 0$.

Для доказательства второго утверждения мы заметим, что, в силу регулярности отображения вложения $\iota: N \subset M$, для любой системы $x^1, \dots, x^m$ локальных координат на многообразии M в произвольной точке $p \in N$ из функций $x^1 \circ \iota, \dots, x^m \circ \iota$ можно выбрать n функций, составляющих систему локальных координат в точке p на подмногообразии N . Пусть это будут функции $x^1 \circ \iota, \dots, x^n \circ \iota$. Тогда для любой гладкой в точке p функции g на подмногообразии N вблизи этой точки будет иметь место равенство

$$g = v(x^1 \circ \iota, \dots, x^n \circ \iota),$$

где v — некоторая гладкая функция n вещественных переменных. Но тогда ясно, что функция

$$f = v(x^1, \dots, x^n)$$

на многообразии M гладка в точке p и обладает тем свойством, что $f|_N = g$. Тем самым мы доказали, что любая гладкая в некоторой точке подмногообразия N функция на N является ограничением некоторой гладкой в этой точке функции на всем многообразии M . Поскольку отображение вложения $\iota: M \subset M$ гладко, обратное утверждение также справедливо, т. е. функция g на N тогда и только тогда гладка в точке $p \in N$, когда она является вблизи этой точки ограничением некоторой гладкой на M функции f . Но это и означает, что подмногообразие N представляет собой подпредмногообразие многообразия M .

Заметим, что по ходу дела мы доказали также, что

для любой системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$ на многообразии M в точке $p \in N$ из функций

$$x^1 \circ \iota, \dots, x^m \circ \iota$$

можно выбрать n функций, составляющих систему локальных координат в точке p на подмногообразии N .

В частности,

для любой точки $p \in N$ на многообразии M существует такая система локальных координат $x^1, \dots, x^m$

в точке p , что функции

$$x^1|_{N_1}, \dots, x^n|_N$$

составляют систему локальных координат в точке p на подмногообразии N .

Этим свойством обладает, например, каждая система локальных координат $x^1, \dots, x^m$, для которой векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ принадлежат подпространству N_p (и потому составляют его базис).

Из доказанного выше предложения легко вытекает также, что

гладкое отображение

$$\Phi: N \rightarrow M$$

многообразия N в многообразии M тогда и только тогда является диффеоморфизмом многообразия N на подпредмногообразии $\Phi(N)$, когда это отображение регулярно и представляет собой гомеоморфизм многообразия N на подпространство $\Phi(N)$ многообразия M .

Действительно, пусть отображение Φ является диффеоморфизмом многообразия N на подпредмногообразии $\Phi(N)$, т. е. пусть

$$\Phi = \iota \circ \Psi,$$

где $\Psi: N \rightarrow \Phi(N)$ — некоторый диффеоморфизм, а ι — отображение вложения $\Phi(N) \subset M$. Так как подпредмногообразии $\Phi(N)$ диффеоморфно многообразию M , то оно является многообразием и потому представляет собой подмногообразие многообразия M . Следовательно, отображение ι регулярно. Отображение Ψ , будучи диффеоморфизмом, также регулярно. Поэтому регулярно и отображение Φ .

Обратно, пусть отображение Φ регулярно и пусть оно является гомеоморфизмом многообразия N на подпространство $\Phi(N)$ многообразия M . Введем на пространстве $\Phi(N)$ гладкость, считая функцию f на $\Phi(N)$ тогда и только тогда гладкой, когда гладка функция $f \circ \Phi$ на N . Ясно, что тем самым мы определим подпространство $\Phi(N)$ как гладкое многообразие, причем отображение

$$\Psi: N \rightarrow \Phi(N),$$

индуцированное отображением Φ , будет диффеоморфизмом и потому регулярным отображением. Пусть $\iota: \Phi(N) \subset M$ — отображение вложения. Так как $\iota = \Phi \circ \Psi^{-1}$, а отображение Φ , по условию, регулярно, то отображение ι также регулярно. Следовательно, многообразие $\Phi(N)$ является подмногообразием, а потому и подпредмногообразием многообразия M . Тем самым наше предложение полностью доказано.

Из этого предложения, в частности, следует, что для любой координатной окрестности U на подмногообразии N многообразия M отображение

$$\xi^{-1}: U^0 \rightarrow M,$$

обратное к координатному диффеоморфизму

$$\xi: U \rightarrow R^n,$$

представляет собой диффеоморфизм открытого множества $U^0 = \xi(U) \subset R^n$ в многообразие M и потому является n -мерной поверхностью этого многообразия. Обратно, для любой n -мерной поверхности

$$\varphi: G \rightarrow M, \quad G \subset R^n,$$

являющейся диффеоморфизмом множества G на множество $\varphi(G) \subset M$, множество $\varphi(G)$ является n -мерным подмногообразием многообразия M . Это подмногообразие является координатной окрестностью каждой своей точки, причем соответствующим координатным диффеоморфизмом служит диффеоморфизм φ^{-1} .

В частности, для каждой кривой

$$\gamma: J \rightarrow M,$$

являющейся диффеоморфизмом интервала J на множество $\gamma(J)$, это последнее множество является одномерным подмногообразием многообразия M . С другой стороны, каждая регулярная кривая $\gamma: J \rightarrow M$, не имеющая самопересечений, на любом замкнутом отрезке $C \subset J$ является гомеоморфизмом этого отрезка в многообразие M (ибо отрезок C компактен, а многообразие M хаусдорфово) и потому на каждом интервале $J_0 \subset C$ является диффеоморфизмом этого интервала в многообразие M . В силу результатов п. 2 отсюда следует, что

для каждой точки $p_0 = \gamma(t_0)$ произвольной регулярной кривой $\gamma: J \rightarrow M$ существует такой интервал J_0 , содержащий точку t_0 , что множество $\gamma(J_0)$ представляет собой одномерное подмногообразие многообразия M .

При этом ясно, что

для каждой точки $p = \gamma(t)$, $t \in J_0$, касательное пространство $\gamma(J_0)_p$ подмногообразия $\gamma(J_0)$ в точке p порождено касательным вектором $\dot{\gamma}(t)$.

В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, мы будем каждую кривую $\gamma: J \rightarrow M$, являющуюся диффеоморфизмом, отождествлять с подмногообразием $\gamma(J)$.

Ясно, что любое открытое подмногообразие многообразия M имеет ту же размерность m , что и само многообразие M . Обратно,

каждое подмногообразие N многообразия M , размерность n которого равна размерности m многообразия M , является его открытым подмногообразием.

Действительно, так как $m = n$ и отображение вложения $\iota: N \subset M$ регулярно, то в каждой точке $p \in N$ это отображение является локальным диффеоморфизмом (см. п. 6 гл. 3). Поэтому, в частности, каждая точка $p \in N$ обладает в N окрестностью, которая является ее окрестностью и в M . Но это и означает, что N открыто в M .

Важный пример m — 1-мерного подмногообразия мы получим, рассмотрев на многообразии M произвольную гладкую функцию f . Для каждого вещественного числа a подпредмногообразие $[f = a]$ многообразия M , состоящее из всех точек $p \in M$, для которых $f(p) = a$, мы, следуя принятому обыкновению (и допуская тем самым некоторую нечеткость терминологии), будем называть *поверхностью уровня* функции f , соответствующей данному числу a . Поверхность уровня $[f = a]$ мы будем называть *регулярной*, если функция f , рассматриваемая как гладкое отображение $M \rightarrow \mathbf{R}$, регулярна на $[f = a]$, т. е. если $df_p \neq 0$ для каждой точки $p \in [f = a]$. Мы покажем, что

любая регулярная поверхность уровня $[f = a]$ является m — 1-мерным подмногообразием многообразия M .

Действительно, пусть p — произвольная точка поверхности уровня $[f=a]$ и пусть $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат на многообразии M в точке p . Поскольку поверхность уровня $[f=a]$, по условию, регулярна, по крайней мере одна частная производная $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ функции f отлична от нуля в точке p . Пусть, для определенности,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p \neq 0.$$

Тогда, в силу теоремы о замене локальных координат, функции $f, x^2, \dots, x^m$ также составляют систему локальных координат в точке p . Пусть U — соответствующая координатная окрестность и $\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — соответствующий координатный диффеоморфизм. Пусть, далее,

$$y^1 = x^2|_{[f=a]}, \dots, y^{m-1} = x^m|_{[f=a]}$$

и

$$V = U \cap [f=a].$$

По определению, функции $y^1, \dots, y^{m-1}$ гладки в любой точке $q \in V$. Кроме того, каждая гладкая в точке $q \in V$ функция φ на $[f=a]$, являясь ограничением некоторой гладкой в q функции $\psi = u(x^1, \dots, x^m)$ на U , удовлетворяет в некоторой окрестности точки q соотношению

$$\varphi = u(a, y^1, \dots, y^{m-1}),$$

т. е. гладко зависит вблизи точки q от функций $y^1, \dots, y^{m-1}$. Наконец, отображение

$$\eta: V \rightarrow \mathbb{R}^{m-1},$$

определенное формулой

$$\eta(q) = (y^1(q), \dots, y^{m-1}(q)), \quad q \in V,$$

связано с координатным диффеоморфизмом $\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ соотношением

$$\xi(q) = (a, \eta(q)), \quad q \in V.$$

Следовательно, это отображение представляет собой диффеоморфизм окрестности V на сечение множества $\xi(U)$ гиперплоскостью $t^1 = a$. Тем самым доказано, что функции $y^1, \dots, y^{m-1}$ являются в окрестности V точки p на поверх-

ности $[f=a]$ локальными координатами. Поскольку точка p произвольна, это доказывает, что подпредмногообразие $[f=a]$ является гладким многообразием и потому, в силу доказанного выше утверждения, подмногообразием многообразия M .

В каждой точке $p \in [f=a]$ пространство $[f=a]_p$, касательное к подмногообразию $[f=a]$, является $m-1$ -мерным подпространством пространства M_p . Пусть $\iota: [f=a] \rightarrow M$ — отображение вложения. Так как $f \circ \iota = a$, то $d(f \circ \iota)_p = df_p \circ d\iota_p = 0$, т. е. $df_p(A) = 0$ для любого вектора $A \in [f=a]_p$. Так как ковектор df_p , по условию, отличен от нуля, то векторы $A \in M_p$, для которых $df_p(A) = 0$, образуют $m-1$ -мерное подпространство пространства M_p . Поскольку пространство $[f=a]_p$ также $m-1$ -мерно, отсюда непосредственно следует, что

вектор $A \in M_p$ тогда и только тогда принадлежит подпространству $[f=a]_p$, т. е. касается подмногообразия $[f=a]$, когда

$$df_p(A) = 0.$$

Пример регулярной поверхности уровня мы получим, рассмотрев на пространстве R^m функцию

$$f = (t^1)^2 + \dots + (t^m)^2.$$

Для любого $a > 0$ соответствующей поверхностью уровня $[f=a]$ является сфера радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке 0. Поскольку

$$df = 2t^1 dt^1 + \dots + 2t^m dt^m,$$

эта поверхность уровня регулярна для всех $a > 0$. Таким образом,

сферы пространства R^m являются его подмногообразиями.

Пусть теперь $f^1, \dots, f^r$ — произвольная конечная система гладких функций на многообразии M и пусть $a^1, \dots, a^r$ — произвольные вещественные числа. Рассмотрим подпредмногообразие N многообразия M , состоящее из всех точек $p \in M$, для которых

$$f^1(p) = a^1, \dots, f^r(p) = a^r,$$

т. е. являющееся пересечением

$$[f^1 = a^1] \cap \dots \cap [f^r = a^r]$$

поверхностей уровня $[f^1 = a^1], \dots, [f^r = a^r]$.

Функции $f^1, \dots, f^r$ мы будем называть *независимыми* в точке $p \in M$, если ковекторы $df_p^1, \dots, df_p^r$ являются линейно независимыми элементами пространства $\mathcal{O}_1(p)$. Оказывается, что

если функции $f^1, \dots, f^r$ независимы в каждой точке p подпредмногообразия

$$N = [f^1 = a^1] \cap \dots \cap [f^r = a^r],$$

то это подпредмногообразие представляет собой $m - r$ -мерное подмногообразие многообразия M и в любой точке $p \in N$ подпространство N_p пространства M_p определяется уравнениями

$$df_p^1(A) = 0, \dots, df_p^r(A) = 0, \quad A \in M_p. \quad (1)$$

При $r = 1$ это утверждение переходит в уже доказанное выше предложение о регулярных поверхностях уровня. Рассуждая по индукции, предположим, что при $r - 1$ рассматриваемое утверждение уже доказано и что, следовательно, подпредмногообразие

$$N' = [f^1 = a^1] \cap \dots \cap [f^{r-1} = a^{r-1}]$$

является $m - r + 1$ -мерным подмногообразием многообразия M . Рассмотрим ограничение f функции f^r на подмногообразии N' . Так как в каждой точке $p \in N$ подпространство N'_p пространства M_p определяется, согласно предположению индукции, уравнениями

$$df_p^1(A) = 0, \dots, df_p^{r-1}(A) = 0, \quad A \in M_p, \quad (2)$$

то (в силу условия независимости) ковектор

$$df_p = d(f^r \circ \iota)_p = df^r|_{N'_p}$$

не равен тождественно нулю и потому поверхность уровня $[f = a^r]$ функции f на многообразии N' регулярна. Следовательно, эта поверхность уровня (совпадающая, очевидно, с множеством N) является $m - r$ -мерным подмногообразием подмногообразия N , а потому и многообразия M . Для

завершения доказательства остается заметить, что вектор $A \in M_p$ тогда и только тогда удовлетворяет уравнениям (1), когда он удовлетворяет уравнениям (2) и уравнению $df_p(A) = 0$.

Ясно, что если функции $f^1, \dots, f^r$ независимы в точке $p \in M$, то они независимы и в любой точке некоторой окрестности U точки p . Применяя только что доказанное утверждение к многообразию $M = U$, мы немедленно получим отсюда, что

для любых гладких и независимых в точке $p \in M$ функций $f^1, \dots, f^r$ существует такая окрестность U этой точки, что множество N всех точек $q \in U$, для которых

$$f^1(q) = a^1, \dots, f^r(q) = a^r,$$

где $a^1 = f^1(p), \dots, a^r = f^r(p)$, представляет собой $m - r$ -мерное подмногообразие (окрестности U , а потому и многообразия M), содержащее точку p .

Вообще говоря, не любое n -мерное подмногообразие N многообразия M можно представить в виде пересечения $[f^1 = a^1] \cap \dots \cap [f^r = a^r]$ поверхностей уровня $r = m - n$ независимых на N функций. Это можно сделать лишь локально, т. е.

для любой точки $p \in N$ существуют на многообразии M такая система $r = m - n$ независимых в точке p функций $f^1, \dots, f^r$ и такая окрестность U точки p , что точка $q \in U$ тогда и только тогда принадлежит подмногообразию N , когда

$$f^1(q) = a^1, \dots, f^r(q) = a^r,$$

где $a^1 = f^1(p), \dots, a^r = f^r(p)$.

В этом случае мы будем говорить, что подмногообразие N в окрестности U определяется уравнениями

$$f^1 = a^1, \dots, f^r = a^r.$$

Мы докажем даже большее, а именно, что

в любой точке $p \in N$ существует на многообразии M такая система

$$x^1, \dots, x^m \tag{3}$$

локальных координат, что в соответствующей координатной окрестности U подмногообразие N определяется уравнениями

$$x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0.$$

С этой целью мы на многообразии M в точке p рассмотрим произвольную систему локальных координат $x^1, \dots, x^m$, обладающую тем свойством, что функции

$$y^1 = x^1|_N, \dots, y^n = x^n|_N$$

являются локальными координатами в точке p на подмногообразии N . Пусть

$$y^{n+1} = x^{n+1}|_N, \dots, y^m = x^m|_N.$$

Так как функции $y^{n+1}, \dots, y^m$ гладки в точке $p \in N$, то они гладко зависят вблизи этой точки от функций $y^1, \dots, y^n$, т. е. существуют такие гладкие функции $u^{n+1}, \dots, u^m$ вещественных переменных $t^1, \dots, t^n$, что вблизи точки p на подмногообразии N имеют место равенства

$$y^{n+1} = u^{n+1}(y^1, \dots, y^n), \dots, y^m = u^m(y^1, \dots, y^n).$$

Пусть

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1, \\ &\dots \dots \dots \\ x'^n &= x^n, \\ x'^{n+1} &= x^{n+1} - u^{n+1}(x^1, \dots, x^n), \\ &\dots \dots \dots \\ x'^m &= x^m - u^m(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Из теоремы о замене локальных координат непосредственно вытекает, что в некоторой окрестности U' точки p функции $x'^1, \dots, x'^m$ являются локальными координатами на многообразии M . Рассмотрим функции $x'^{n+1}, \dots, x'^m$. Так как эти функции, очевидно, независимы в точке p , то уравнения

$$x'^{n+1} = 0, \dots, x'^m = 0 \tag{4}$$

определяют в окрестности U' некоторое n -мерное подмногообразие N' многообразия M . Из сказанного выше непосредственно следует, что $N \subset N'$. Поскольку $\dim N = \dim N'$, это возможно только тогда, когда подмногообразие N открыто

в подмногообразии N' , т. е., другими словами, когда подмногообразия N и N' совпадают в некоторой окрестности U точки p . Таким образом, в окрестности U подмногообразие N определяется уравнениями (4). Для завершения доказательства ссгается обозначить координаты $x'^1, \dots, x'^m$ прежними символами $x^1, \dots, x^m$.

В построении локальных координат (3) содержится значительный произвол и потому в тех или иных конкретных ситуациях их можно дополнительно специализировать.

Пусть, например, наряду с подмногообразием N нам задано другое подмногообразие N' (размерности n'), также содержащее точку p и обладающее, кроме того, тем свойством, что его касательное пространство N'_p в этой точке лишь по нулю пересекается с пространством N_p . Тогда, как мы сейчас покажем

локальные координаты (3) можно выбрать так, чтобы они дополнительно обладали тем свойством, что многообразие N' в окрестности U определяется уравнениями

$$x^1 = 0, \dots, x^n = 0, \quad x^{n+n'+1} = 0, \dots, x^m = 0.$$

Действительно, меняя в случае необходимости нумерацию координат $x^{n+1}, \dots, x^m$, мы, без ограничения общности, можем считать, что координаты (3) обладают тем свойством, что функции $x^{n+1}|_{N'}, \dots, x^{n+n'}|_{N'}$ являются локальными координатами на подмногообразии N' в точке p . Но тогда, повторяя рассуждения, уже использованные выше применительно к подмногообразию N , мы немедленно получим, что существуют такие гладкие функции $v^1, \dots, v^n, v^{n+n'+1}, \dots, v^m$ вещественных переменных $t^1, \dots, t^{n'}$, что, во-первых, функции определенные формулой

$$x'^i = \begin{cases} x^i, & \text{если } n+1 \leq i \leq n+n', \\ x^i - v^i(x^{n+1}, \dots, x^{n+n'}), & \text{если либо } 1 \leq i \leq n, \text{ либо } n+n'+1 \leq i \leq m, \end{cases}$$

являются локальными координатами на многообразии M в точке p и во-вторых, около этой точки подмногообразие N' определяется уравнениями

$$x'^1 = 0, \dots, x'^n = 0, \quad x'^{n+n'+1} = 0, \dots, x'^m = 0.$$

При этом ясно, что по отношению к подмногообразию N координаты $x'^1, \dots, x'^m$ по-прежнему обладают свойствами координат (3). Тем самым наше утверждение полностью доказано.

В частном случае, когда подмногообразие N' одномерно и имеет вид $\gamma(J)$, где $\gamma: J \rightarrow M$ — некоторая регулярная кривая на многообразии M , условие

$$N_p \cap N'_p = 0$$

означает, что в точке p кривая γ не касается подмногообразия N , т. е. что ее касательный вектор в этой точке не принадлежит подпространству N . Таким образом,

для любого подмногообразия N многообразия M , любой точки $p \in N$ и любой регулярной кривой $\gamma: J \rightarrow M$, проходящей через точку p и не касающейся в этой точке подмногообразия N , существует на многообразии M такая система локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в точке p , что в некоторой окрестности точки p подмногообразие N определяется уравнениями $x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0$, а кривая γ — уравнениями $x^1 = 0, \dots, x^n = 0, x^{n+2} = 0, \dots, x^m = 0$ (или, если угодно, уравнениями $x^1 = 0, \dots, x^n = 0, x^{n+1} = 0, \dots, x^{m-1} = 0$).

В заключение этого пункта мы, во избежание возможных недоразумений, заметим, что весьма часто в теории гладких многообразий термин «подмногообразие» понимается в смысле несколько более общем, чем принятый у нас. Именно, во многих вопросах оказывается удобным не предполагать, что подмногообразия являются подпространствами объемлющего многообразия M . Можно легко показать, что все основные свойства подмногообразий полностью сохраняются, если под подмногообразиями многообразия M понимать гладкие многообразия N , расположенные как множества в многообразии M и обладающие тем свойством, что соответствующие отображения вложения $i: N \subset M$ гладки (и, следовательно, непрерывны) и регулярны. Нам это общее понимание термина «подмногообразие» не понадобится (ибо, по существу, мы будем в дальнейшем иметь дело лишь с компактными подмногообразиями) и потому мы на нем останавливаться более не будем.

5. Подмногообразия евклидовых пространств

Изучение подмногообразий особенно просто в случае, когда объемлющим многообразием является евклидово пространство R^n . Для каждого подмногообразия M пространства R^n касательное пространство M_p в произвольной точке $p \in M$ является подпространством касательного пространства $(R^n)_p$. Но последнее пространство естественным образом отождествляется с самим пространством R^n (см. п. 6 гл. 4). Таким образом, для каждого многообразия $M \subset R^n$ все пространства M_p , соответствующие всевозможным точкам $p \in M$, можно рассматривать как подпространства одного и того же пространства R^n .

Этот факт, существенно упрощая исследование многообразий M , вложенных в пространство R^n , одновременно значительно обогащает их теорию.

Пусть p_0 — произвольная точка многообразия $M \subset R^n$ и пусть $e_1, \dots, e_n$ — такой базис пространства R^n , что первые m его векторов $e_1, \dots, e_m$ составляют базис подпространства $M_{p_0} \subset R^n$. Согласно результатам п. 4 координаты $t^1, \dots, t^n$ точек пространства R^n в базисе $e_1, \dots, e_n$ обладают тем свойством, что ограничения

$$x^1 = t^1|_M, \dots, x^m = t^m|_M \quad (1)$$

первых m этих координат составляют систему локальных координат в точке p_0 на многообразии M . Каждую окрестность U точки p_0 в многообразии M , на которой функции (1) составляют систему локальных координат, мы будем в этом пункте называть *нормальной* окрестностью точки p_0 (по отношению к данному базису $e_1, \dots, e_m$ пространства R^n).

Для каждой такой нормальной окрестности U мы рассмотрим множество U всех пар (p, u) , где p — произвольная точка окрестности U и u — произвольный вектор пространства R^n , ортогональный подпространству $M_p \subset R^n$ (такие векторы $u \in R^n$ мы будем называть векторами, *ортогональными* многообразию M в точке p). По определению, вектор u тогда и только тогда ортогонален многообразию M в точке

p , когда

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, u \right) = 0$$

для любого $i = 1, \dots, m$. Но, согласно формуле п. 6 гл. 3, векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$, $i = 1, \dots, m$ (рассматриваемые как векторы пространства R_n), связаны с векторами $e_j = \left(\frac{\partial}{\partial t^j} \right)_p$, $j = 1, \dots, n$, соотношениями

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial t^j}{\partial x^i} \right)_p \cdot e_j, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

С другой стороны, согласно соотношениям (1),

$$\left(\frac{\partial t^j}{\partial x^i} \right)_p = \delta_i^j$$

для любых $i, j = 1, \dots, m$, так что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = e_i + \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\partial t^j}{\partial x^i} \right)_p \cdot e_j.$$

Следовательно, вектор $u \in R^n$ тогда и только тогда ортогонален многообразию M в точке p , когда

$$(e_i, u) + \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\partial t^j}{\partial x^i} \right)_p \cdot (e_j, u) = 0$$

для любого $i = 1, \dots, m$.

Предположим для упрощения формул, что рассматриваемый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства R^n ортонормирован. Тогда числа $(e_1, u), \dots, (e_n, u)$ являются координатами $u^1, \dots, u^n$ вектора u в этом базисе и потому предыдущие соотношения перепишутся в следующем виде:

$$u^i + \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\partial t^j}{\partial x^i} \right)_p u^j = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Пусть теперь

$$\xi: U \rightarrow U^0$$

— координатный диффеоморфизм, соответствующий локальным

координатам (1), и пусть

$$\eta: R^n \rightarrow R^{n-m}$$

— естественная проекция пространства R^n на его подпространство R^{n-m} , натянутое на векторы $e_{m+1}, \dots, e_n$. Из соотношений (2) немедленно вытекает, что определенное формулой

$$\xi_*(p, u) = (\xi(p), \eta(u))$$

отображение

$$\xi_*: U_* \rightarrow R^n$$

является биективным отображением множества U_* на открытое подмножество $U^0 \times R^{n-m}$ пространства R^n . Мы введем в множество U_* топологию отождествления, определенную отображением ξ_* . По определению, эта топология зависит от выбора ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства R^n . Однако легко видеть, что при любом другом выборе этого базиса (подчиненном лишь тому условию, что по отношению к нему окрестность U нормальна) мы получим на множестве U_* ту же самую топологию. Другими словами, рассматриваемая топология множества U_* от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$ на самом деле не зависит. Заметим, что в этой топологии отображение ξ_* является гомеоморфизмом.

Пусть N_* — множество всех пар вида (p, u) , где p — произвольная точка многообразия M , а u — произвольный вектор пространства R^n , ортогональный многообразию M в точке p . Это множество является объединением подмножеств вида U_* , соответствующих всевозможным нормальным (по отношению к некоторому, зависящему от окрестности, базису пространства R^m) окрестностям U точек многообразия M . Из того, что построенные выше топологии множеств U_* не зависят от выбора базисов пространства R^m , непосредственно вытекает, что для любых двух нормальных окрестностей $U, V \subset M$ топологии, индуцированные топологиями множеств U_* и V_* на множестве $(U \cap V)_* = U_* \cap V_*$, друг с другом совпадают, т. е. что пересечение $U_* \cap V_*$ является подпространством каждого из пространств U_* и V_* . Кроме того, ясно, что это подпространство открыто в обоих пространствах U_* и V_* . Поэтому (см. п. 1 гл. 1) на множестве N_* существует единственная топология, относительно которой это множество является свободным объединением

всех подпространств вида U_* . Очевидно, что в этой топологии множество N_* представляет собой хаусдорфово сепарабельное пространство (поскольку многообразие M , будучи подпространством евклидова пространства, сепарабельно).

Вещественную функцию F , заданную на пространстве N_* , мы будем считать гладкой, если для любой нормальной окрестности $U \subset M$ функция $F \circ \xi_*^{-1}$ на произведении $U^0 \times \mathbb{R}^{n-m}$, где ξ_* — построенный выше гомеоморфизм $U_* \rightarrow U^0 \times \mathbb{R}^{n-m}$, является гладкой на $U^0 \times \mathbb{R}^{n-m}$ функцией. Без труда проверяется, что совокупность $\mathcal{O}(N_*)$ всех гладких на N_* функций является гладкостью на N_* и что снабженное этой гладкостью пространство N_* представляет собой гладкое многообразие. За координатные окрестности в N_* можно принять, например, подпространства U_* , а за координатные диффеоморфизмы — отображения

$$\xi_* : U_* \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Соответствующие этому диффеоморфизму локальные координаты

$$x_*^1, \dots, x_*^n \quad (3)$$

определяются формулами

$$\begin{aligned} x_*^1(p, u) &= x^1(p), \dots, x_*^m(p, u) = x^m(p), \\ x_*^{m+1}(p, u) &= u^{m+1}, \dots, x_*^n(p, u) = u^n, \end{aligned} \quad (p, u) \in U_*, \quad (4)$$

где $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты (1), т. е. первые m координат в базисе $e_1, \dots, e_n$ точки $p \in M$, рассматриваемой как вектор пространства $\mathbb{R}^n$, а $u^{m+1}, \dots, u^n$ — последние $n - m$ координат вектора u (в том же базисе $e_1, \dots, e_n$).

Построенное n -мерное гладкое многообразие N_* мы будем называть *многообразием векторов, ортогональных многообразию M* . Его точки вида $(p, 0)$, $p \in M$, составляют, очевидно, некоторое подмногообразие, естественно диффеоморфное многообразию M . Мы будем это подмногообразие отождествлять с многообразием M и, таким образом, будем считать, что $M \subset N_*$.

З а м е ч а н и е. Построение многообразия N_* весьма напоминает изложенное в п. 6 гл. 4 построение многообразия M_* .

Можно показать, что оба эти построения являются частными случаями некоторой общей конструкции, относящейся к произвольным векторным расслоениям. В полной общности эта конструкция нам не нужна и потому мы ее здесь излагать не будем.

Рассмотрим отображение

$$\rho: N_* \rightarrow R^n$$

многообразия N_* в пространство R^n , сопоставляющее каждой точке $(p, u) \in N_*$ вектор

$$\rho(p, u) = p + u,$$

т. е. вектор u , отложенный от точки p . Ясно, что отображение ρ гладко. На подмногообразии $M \subset N_*$ это отображение тождественно. Выразим отображение ρ в локальных координатах.

Пусть $x_*^1, \dots, x_*^n$ — координаты (3) точки (p, u) . Согласно сказанному выше, точка p , рассматриваемая как вектор пространства R^n , имеет (в базисе $e_1, \dots, e_n$) координаты

$$t^1 = x_*^1, \dots, t^m = x_*^m,$$

$$t^{m+1} = t^{m+1}(x_*^1, \dots, x_*^m), \dots, t^n = t^n(x_*^1, \dots, x_*^m),$$

где $t^{m+1}(x_*^1, \dots, x_*^m), \dots, t^n(x_*^1, \dots, x_*^m)$ — некоторые гладкие функции, а вектор u — координаты

$$u^1 = - \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{\partial t^k}{\partial x_*^1} \right)_p u^k, \dots, u^m = - \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{\partial t^k}{\partial x_*^m} \right)_p u^k,$$

$$u^{m+1} = x_*^{m+1}, \dots, u^n = x_*^n.$$

Следовательно, координаты $v^1, \dots, v^n$ точки $v = \rho(p, u)$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} v^1 &= x_*^1 - \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial t^k}{\partial x_*^1} (x_*^1, \dots, x_*^m) x_*^k, \\ &\dots \dots \dots \\ v^m &= x_*^m - \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial t^k}{\partial x_*^m} (x_*^1, \dots, x_*^m) x_*^k, \\ v^{m+1} &= t^{m+1}(x_*^1, \dots, x_*^m) + x_*^{m+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ v^n &= t^n(x_*^1, \dots, x_*^m) + x_*^n. \end{aligned}$$

Эти формулы и представляют собой запись отображения ρ в локальных координатах. Продифференцировав их, мы немедленно получим, что

$$\frac{\partial v^i}{\partial x_*^j} = \begin{cases} \delta_j^i - \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial^2 t^k}{\partial x_*^i \partial x_*^j} (x_*^1, \dots, x_*^m) x_*^k, & \text{если } 1 \leq i, j \leq m; \\ -\frac{\partial t^j}{\partial x_*^i} (x_*^1, \dots, x_*^m), & \text{если } 1 \leq i \leq m \text{ и } m+1 \leq j \leq n; \\ \frac{\partial t^i}{\partial x_*^j} (x_*^1, \dots, x_*^m), & \text{если } m+1 \leq i \leq n \text{ и } 1 \leq j \leq m; \\ \delta_j^i, & \text{если } m+1 \leq i, j \leq n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\det \left| \frac{\partial v^i}{\partial x_*^j} \right| = \begin{vmatrix} A & -T \\ T' & E_{n-m} \end{vmatrix},$$

где A — матрица порядка $m \times m$ с элементами

$$\delta_j^i - \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial^2 t^k}{\partial x_*^i \partial x_*^j} (x_*^1, \dots, x_*^m) x_*^k,$$

T — матрица порядка $m \times (n-m)$ с элементами

$$\frac{\partial t^j}{\partial x_*^i} (x_*^1, \dots, x_*^m),$$

T' — транспонированная матрица T и E_{n-m} — единичная матрица порядка $n-m$.

Умножив этот определитель справа на определитель

$$\begin{vmatrix} E_m & 0 \\ -T' & E_{n-m} \end{vmatrix} = 1,$$

мы получим, что

$$\det \left| \frac{\partial v^i}{\partial x_*^j} \right| = \begin{vmatrix} A + TT' & -T \\ 0 & E_{n-m} \end{vmatrix},$$

т. е. что

$$\det \left| \frac{\partial v^i}{\partial x_*^j} \right| = |A + TT'|. \quad (5)$$

В частности,

$$\det \left| \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_*^j} \right)_p \right| = |E + TT'|$$

в каждой точке $p = (p, 0) \in M$. Но легко видеть, что

$$|E + TT'| > 0$$

(ибо квадратичная форма с матрицей $E + TT'$, являясь суммой положительно определенной формы с матрицей E и неотрицательно определенной формы с матрицей TT' , представляет собой положительно определенную форму). Таким образом,

$$\det \left| \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_*^j} \right)_p \right| \neq 0.$$

Это означает, что в каждой точке $p \in M$ отображение ρ регулярно и потому является вблизи этой точки диффеоморфизмом. Тем самым мы доказали, что

отображение $\rho: N_* \rightarrow R^n$ представляет собой гладкое отображение, тождественное на подмногообразии $M \subset N_*$ и в каждой точке этого подмногообразия являющееся локальным диффеоморфизмом многообразия N_* в пространство R^n .

Открытое множество $V \subset R^n$ мы будем называть *трубчатым*, если в многообразии N_* существует такое открытое множество V^0 , что отображение ρ переводит множество V^0 в множество V и, рассматриваемое как отображение $V^0 \rightarrow V$, является диффеоморфизмом этого множества на множество V . Для каждого такого множества определен диффеоморфизм

$$\sigma: V \rightarrow V^0,$$

обратный к диффеоморфизму $\rho|_{V^0}$. Ясно, что любое открытое множество $V' \subset V$, содержащееся в некотором трубчатом множестве V , также является трубчатым множеством, причем соответствующий диффеоморфизм σ' является ограничением диффеоморфизма σ . Пересечение $V_1 \cap V_2$ двух трубчатых множеств V_1 и V_2 трубчатым множеством, вообще

говоря, не является. Однако, если пересечение $V_1^0 \cap V_2^0$ соответствующих подмножеств V_1^0 и V_2^0 многообразия N_* не пусто, то множество $V = \rho(V_1^0 \cap V_2^0)$ (содержащееся в пересечении $V_1 \cap V_2$) открыто в R^n и является трубчатым множеством. Соответствующий диффеоморфизм $\sigma: V \rightarrow V_1^0 \cap V_2^0$ является при этом ограничением каждого из диффеоморфизмов $\sigma_1: V_1 \rightarrow V_1^0$ и $\sigma_2: V_2 \rightarrow V_2^0$ (так что, в частности, диффеоморфизмы σ_1 и σ_2 на множестве V совпадают).

Ясно, что аналогичное утверждение имеет место и для любого конечного числа трубчатых множеств.

Согласно доказанному выше утверждению, каждая точка $p \in M$ обладает в R^n хотя бы одной трубчатой окрестностью. Если многообразие M замкнуто (т. е. представляет собой замкнутое подмножество пространства R^n), то трубчатые окрестности всевозможных его точек вместе с множеством $R^n \setminus M$ составляют открытое покрытие пространства R^n . Поскольку пространство R^n паракомпактно, в это покрытие можно вписать некоторое локально конечное покрытие Γ . Поскольку пространство R^n нормально, существует его открытое покрытие Δ , имеющее то же множество индексов, что и покрытие Γ , и такое, что замыкание каждого элемента покрытия Δ содержится в соответствующем элементе покрытия Γ (см. п. 3 гл. 1). Пусть $\{V_\alpha; \alpha \in A\}$ — подсемейство покрытия Δ , состоящее из всех его элементов, пересекающихся с многообразием M , и пусть $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ — семейство соответствующих элементов покрытия Γ . Ясно, что все множества U_α являются трубчатыми множествами. Отвечающий множеству U_α диффеоморфизм $U_\alpha \rightarrow U_\alpha^0 \subset N_*$ мы обозначим символом σ_α . Так как, по условию, $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, то множество V_α также является трубчатым множеством, причем соответствующий диффеоморфизм $V_\alpha \rightarrow V_\alpha^0$ представляет собой ограничение диффеоморфизма σ_α .

Рассмотрим совокупность W всех точек t пространства R^n , принадлежащих множеству

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

и обладающих тем свойством, что для любых индексов $\alpha', \alpha'' \in A$ имеет место равенство

$$\sigma_{\alpha'}(t) = \sigma_{\alpha''}(t)$$

каждый раз, когда $t \in \bar{V}_{\alpha'} \cap \bar{V}_{\alpha''}$. Ясно, что $M \subset W$. Покажем, что

множество W открыто в пространстве R^n .

Действительно, пусть t_0 — произвольная точка этого множества. Так как семейство $\{\bar{V}_\alpha\}$ локально конечно, точка t_0 обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов этого семейства. Поэтому, во-первых, существует лишь конечное число $\bar{V}_{\alpha_1}, \dots, \bar{V}_{\alpha_r}$ элементов семейства $\{\bar{V}_\alpha\}$, содержащих точку t_0 , и, во-вторых, точка t_0 обладает окрестностью $U(t_0)$, не пересекающейся ни с какими другими элементами этого семейства. При этом можно, очевидно, считать, что $U(t_0) \subset V$. Пусть

$$U_{\alpha_1}^0 = \sigma_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}), \dots, U_{\alpha_r}^0 = \sigma_{\alpha_r}(U_{\alpha_r}).$$

Так как $t_0 \in W$ и $t_0 \in \bar{V}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{\alpha_r}$, то $\sigma_{\alpha_1}(t_0) = \dots = \sigma_{\alpha_r}(t_0)$ и потому пересечение $U_{\alpha_1}^0 \cap \dots \cap U_{\alpha_r}^0$ не пусто. Пусть

$$V(t_0) = U(t_0) \cap \rho(U_{\alpha_1}^0 \cap \dots \cap U_{\alpha_r}^0).$$

Множество $V(t_0)$ открыто в R^n и содержит точку t_0 , т. е. является ее окрестностью. Кроме того, оно содержится в множестве V , пересекается лишь с элементами $\bar{V}_{\alpha_1}, \dots, \bar{V}_{\alpha_r}$ семейства $\{\bar{V}_\alpha\}$ и обладает тем свойством, что все отображения $\sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_r}$ на этом множестве совпадают (ибо $V(t_0) \subset \subset \rho(U_{\alpha_1}^0 \cap \dots \cap U_{\alpha_r}^0)$). Пусть t — произвольная точка окрестности $V(t_0)$ и пусть $\alpha', \alpha'' \in A$, — такие индексы, что $t \in \bar{V}_{\alpha'} \cap \bar{V}_{\alpha''}$. Поскольку окрестность $V(t_0)$ пересекается лишь с элементами $\bar{V}_{\alpha_1}, \dots, \bar{V}_{\alpha_r}$, индексы α' и α'' необходимо должны содержаться среди индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Поскольку все отображения $\sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_r}$ на окрестности $V(t_0)$ совпадают, отсюда вытекает, что $\sigma_{\alpha'}(t) = \sigma_{\alpha''}(t)$. Следовательно, $t \in W$. Тем самым мы доказали, что $V(t_0) \subset W$. Таким образом, каждая точка $t_0 \in W$ обладает окрестностью $V(t_0)$, содержащейся в множестве W . Следовательно, множество W открыто.

Ясно, что все отображения σ_α , $\alpha \in A$, на множестве W согласованы друг с другом, т. е. являются ограничениями некоторого единого отображения $\sigma: W \rightarrow N_\#$. Это отображение, очевидно, представляет собой диффеоморфизм множества W

на некоторое открытое подмножество W^0 многообразия N_* . При этом $\rho(W^0) = W$ и отображение $\rho|_{W^0}$, рассматриваемое, как отображение $W^0 \rightarrow W$, обратно к диффеоморфизму σ . Это означает, что множество W является трубчатым множеством.

Таким образом, мы доказали, что

каждое замкнутое подмногообразие M евклидова пространства R^n обладает трубчатой окрестностью.

Вместе с построенной окрестностью W трубчатой окрестностью многообразия M будет и любая его окрестность, содержащаяся в окрестности W . Следовательно,

трубчатые окрестности замкнутого подмногообразия $M \subset R^n$ составляют фундаментальную систему его окрестностей.

Пусть W — произвольная трубчатая окрестность многообразия M в пространстве R^n и пусть W^0 — окрестность многообразия M в многообразии N_* , образом которой является окрестность W . Для любой точки $p \in M$ мы рассмотрим совокупность ${}_pW$ всех точек пространства R^n , имеющих вид $\rho(p, u)$, где $(p, u) \in W^0$. Ясно, что

1) множество ${}_pW$ диффеоморфно некоторому (зависящему от p) открытому множеству пространства R^{n-m} (содержащему точку 0);

2) множества ${}_pW$, соответствующие различным точкам $p \in M$, попарно не пересекаются;

3) объединение множеств ${}_pW$, соответствующих всевозможным точкам $p \in M$, совпадает с окрестностью W .

Свойства 2) и 3) означают, что окрестность W в некотором смысле «расслаивается» на множества ${}_pW$. Ввиду этого мы для каждой точки $p \in M$ будем множество ${}_pW$ называть *слоем* трубчатой окрестности W над точкой p .

6. Вложение компактных многообразий в евклидово пространство. Теорема Сарда

Для того чтобы гладкое многообразие M было диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства R^n , необходимо, чтобы это многообразие было сепарабельно. Оказывается, что это необходимое условие также и достаточно, т. е.

любое сепарабельное гладкое многообразие M диффеоморфно подмногообразию пространства R^n , где n — некоторое достаточно большое целое число (зависящее от многообразия M).

Доказательство этой теоремы вложения мы в первую очередь проведем для простейшего, но вместе с тем и важнейшего случая, когда данное многообразие M компактно.

С этой целью мы заметим, что в силу компактности многообразия M его можно покрыть конечным числом координатных окрестностей $U_1, \dots, U_s$. Пусть $x_i^1, \dots, x_i^m$ — локальные координаты, определенные в окрестности U_i , $i = 1, \dots, s$, и пусть $\xi_i: U_i \rightarrow R^m$ — соответствующий координатный диффеоморфизм. Как легко видеть, мы без ограничения общности можем считать, что каждый диффеоморфизм ξ_i отображает окрестность U_i на единичный шар $|t| < 1$ пространства R^m и является ограничением некоторого координатного диффеоморфизма (который мы также будем обозначать символом ξ_i , а соответствующие ему локальные координаты — символами $x_i^1, \dots, x_i^m$), определенного в некоторой большей окрестности V_i и отображающего эту окрестность на шар $|t| < 3$ пространства R^m . (Обладающие этими свойствами координатные окрестности U_i мы будем в этом пункте называть *специальными*.)

Пусть $F(t)$ — гладкая неотрицательная функция на пространстве R^m , равная единице на шаре $|t| \leq 1$, меньшая единицы вне этого шара и равная нулю вне шара $|t| < 2$. Условно считая, что $x_i^0 = 1$ на U_i , мы для каждого $i = 1, \dots, s$ определим на многообразии M числовые функции $f_i^0, f_i^1, \dots, f_i^m$, полагая

$$f_i^k(p) = \begin{cases} x_i^k(p) F(\xi(p)), & \text{если } p \in V_i, \\ 0, & \text{если } p \notin V_i, \end{cases}$$

для любой точки $p \in M$ и любого числа $k = 0, 1, \dots, m$. Ясно, что эти функции гладки на M .

Взятые в произвольном (но фиксированном) порядке функции f_i^k , $i = 1, \dots, s$; $k = 0, 1, \dots, m$, определяют некоторое гладкое отображение Φ многообразия M в пространство R^n , где $n = s(m+1)$ — общее число всех функций f_i^k . Покажем, что это отображение представляет собой диффеоморфизм многообразия M на подмногообразие $\Phi(M)$ простран-

ства R^n . Как мы знаем (см. п. 4), для этого достаточно показать, что отображение Φ регулярно и представляет собой гомеоморфизм многообразия M на подпространство $\Phi(M)$ пространства R^n .

Пусть p — произвольная точка многообразия M и пусть i — такое число, что $p \in U_i$. Рассмотрим отображение Φ_i многообразия M в пространство R^m , определенное функциями $f_i^1, \dots, f_i^m$. Ясно, что отображение Φ регулярно в точке p , если в этой точке регулярно отображение Φ_i . Но на окрестности U_i отображение Φ_i совпадает, очевидно, с координатным диффеоморфизмом ξ_i и потому регулярно. Тем самым регулярность отображения Φ на многообразии M полностью доказана.

Поскольку многообразие M компактно, а пространство R^n хаусдорфово, для доказательства гомеоморфности отображения Φ достаточно доказать, что это отображение инъективно.

Пусть p и q — такие точки многообразия M , что $\Phi(p) = \Phi(q)$. Рассмотрим окрестность U_i , содержащую точку p . Так как $f_i^0 < 1$ вне U_i , а $f_i^0(q) = f_i^0(p) = 1$, то $q \in U_i$. Так как $\Phi(p) = \Phi(q)$, то, в частности, $\Phi_i(p) = \Phi_i(q)$. Но $\Phi_i|_{U_i} = \xi_i$. Следовательно, $\xi_i(p) = \xi_i(q)$ и потому $p = q$.

Тем самым теорема вложения для компактных многообразий полностью доказана.

При попытке перенести это доказательство на случай произвольного сепарабельного многообразия M мы немедленно столкнемся с невозможностью найти конечное покрытие $\{U_i\}$, обладающее нужными нам свойствами. Однако, поскольку любое сепарабельное многообразие паракомпактно и обладает счетной базой, для него, как легко видеть, существует счетное и локально конечное покрытие $\{U_i\}$, состоящее из специальных координатных окрестностей U_i , $i = 1, 2, \dots$. Построенные для этого покрытия функции f_i^k , $k = 0, 1, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots$, определяют (взятые в произвольном, но фиксированном порядке) некоторое отображение Φ многообразия M уже не в пространство R^n , а в пространство R^∞ , точками которого являются бесконечные последовательности $(t^1, t^2, \dots, t^n, \dots)$ вещественных чисел, лишь конечное число которых отлично от нуля. Ясно, что это отображение

гладко в том смысле, что для любого $i = 1, 2, \dots$ функция φ^i на многообразии M , принимающая в точке $p \in M$

значение, равное i -й координате t^i точки $\Phi(p) \in R^\infty$, является гладкой на M функцией (ибо эта функция есть не что иное, как одна из функций f_j^k);

регулярно в том смысле, что для любой точки $p \in M$ существуют такая ее окрестность U и такой набор $i_1, \dots, i_m$ индексов i , что функции $\varphi^{i_1}|_U, \dots, \varphi^{i_m}|_U$ составляют систему локальных координат на окрестности U ;

координатно ограничено в том смысле, что для любого $i = 1, 2, \dots$ функция φ^i ограничена;

локально конечномерно в том смысле, что для любой точки $p \in M$ существует ее окрестность U , на которой только конечное число функций φ^i отлично от нуля.

Кроме того, дословно так же, как и для компактных многообразий, доказывается, что отображение Φ инъективно. Таким образом, вместо теоремы вложения мы получаем пока лишь, что — для любого сепарабельного многообразия M существует его гладкое, регулярное, координатно ограниченное, локально конечномерное и инъективное отображение в пространство R^∞ .

Чтобы вывести из этого предложения теорему вложения, нам понадобится одно утверждение о гладких отображениях многообразий в многообразия большего числа измерений, имеющее и самостоятельный интерес. С другой стороны, в дальнейшем нам будет нужно аналогичное утверждение и об отображениях многообразий одного и того же числа измерений. Во избежание излишних повторений изложил здесь оба эти утверждения.

Пусть M и N — два гладких многообразия размерностей m и n соответственно и пусть

$$\Phi: M \rightarrow N$$

— произвольное гладкое отображение многообразия M в многообразие N . Мы покажем, что

если $m = n$ и если многообразие M сепарабельно, то образ при отображении Φ множества всех его критических точек (см. п. 6 гл. 4) является в многообразии N множеством первой категории.

Это утверждение (известное как теорема Сарда) мы сначала докажем для частного случая, когда многообразие M

и N являются евклидовым пространством R^m . Поскольку пространство R^m может быть представлено в виде объединения счетного числа кубов, для доказательства в этом частном случае теоремы Сарда достаточно доказать, что

для любого гладкого отображения $\varphi: R^m \rightarrow R^m$ образ $\varphi(K)$ множества K всех его критических точек, принадлежащих единичному кубу $I^m: 0 \leq t^i \leq 1, i = 1, \dots, m$, нигде не плотен в пространстве R^m .

Более того, поскольку множество K , очевидно, замкнуто и потому компактно, его образ $\varphi(K)$ замкнут в пространстве R^m . Поэтому нам достаточно доказать, что

подмножество $\varphi(K)$ пространства R^m не имеет ни одной внутренней точки.

С этой целью мы заметим, что ввиду гладкости отображения φ и компактности куба I^m отображение φ равномерно удовлетворяет на этом кубе условию Липшица, т. е. существует такое число $a > 0$, что

$$|\varphi(v) - \varphi(u)| \leq a |v - u| \quad (1)$$

для любых точек $u, v \in I^m$. Кроме того, из формулы Тейлора непосредственно следует, что для любой точки $u \in R^m$ дифференциал $d\varphi_u$ отображения φ в этой точке, рассматриваемый как линейное отображение $R^m \rightarrow R^m$, обладает тем свойством, что для каждой точки $v \in R^m$ имеет место оценка

$$|\varphi(v) - \varphi(u) - d\varphi_u(v)| \leq b(|v - u|), \quad (2)$$

где $b(\tau)$ — такая положительная монотонная функция переменной $\tau > 0$, что

$$\frac{b(\tau)}{\tau} \rightarrow 0$$

при $\tau \rightarrow 0$.

В случае, когда $u \in K$, все векторы $\varphi(u) + d\varphi_u(v)$, $v \in R^m$, принадлежат некоторой $m-1$ -мерной гиперплоскости L пространства R^m , проходящей через точку $\varphi(u)$, и для каждой точки $v \in R^m$ расстояние точки $\varphi(v)$ от этой гиперплоскости не превосходит числа $b(|v - u|)$. С другой стороны, расстояние точки $\varphi(v)$ от точки $\varphi(u)$ не превосходит числа $a|v - u|$. Следовательно, если $|v - u| < \varepsilon$, то точка $\varphi(v)$ принадлежит телу, вырезаемому из шара радиуса $a\varepsilon$ с центром в точке $\varphi(u)$ двумя гиперплоскостями, параллельными

гиперплоскости L и отстоящими от нее на расстоянии $b(\varepsilon)$. Очевидно, что объем этого тела не превосходит объема цилиндра высоты $2b(\varepsilon)$, основанием которого служит $n-1$ -мерный шар радиуса $a\varepsilon$, т. е. не превосходит числа $c \cdot b(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{m-1}$, где c — некоторая постоянная (зависящая от a и m).

Разобьем теперь куб I^m m системами параллельных гиперплоскостей на h^m кубов с ребром $1/h$ и диагональю $\varepsilon = \sqrt{m}/h$. Согласно только что доказанному, каждый куб этого разбиения, содержащий хотя бы одну точку множества K , отображается в некоторое тело, объем которого не превосходит числа $c \cdot b(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{m-1}$. Поэтому образ $\varphi(K)$ всего множества K заведомо содержится в теле, объем которого не превосходит числа

$$c \cdot b(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{m-1} \cdot h^m = c m^{m/2} \cdot \frac{b(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Поскольку это число при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю, отсюда следует, что множество $\varphi(K)$ не может содержать ни одного даже сколь угодно малого шара пространства R^m и потому ни одна его точка не может быть его внутренней точкой.

Тем самым в частном случае, когда $M = N = R^m$, теорема Сарда полностью доказана.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть p_0 — произвольная точка многообразия M и пусть V_{p_0} — произвольная координатная окрестность точки $\Phi(p_0)$ в многообразии N . Поскольку отображение Φ непрерывно, точка p_0 обладает такой координатной окрестностью U_{p_0} , что $\Phi(U_{p_0}) \subset V_{p_0}$. Пусть $\xi: U_{p_0} \rightarrow R^m$ и $\eta: V_{p_0} \rightarrow R^m$ — координатные диффеоморфизмы соответственно окрестностей U_{p_0} и V_{p_0} в пространство R^m . Без ограничения общности можно, очевидно, считать, что диффеоморфизм ξ отображает окрестность U_{p_0} на все пространство R^m . Рассмотрим отображение

$$\varphi = \eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}: R^m \rightarrow R^m.$$

Ясно, что точка $p \in U_{p_0}$ тогда и только тогда является критической точкой отображения Φ , когда точка $\xi(p) \in R^m$ является критической точкой отображения φ . Аналогично точка $q \in V_{p_0}$ тогда и только тогда является образом при отображении Φ некоторой принадлежащей окрестности U_{p_0} критической точки этого отображения, когда точка $\eta(q) \in R^m$

является образом при отображении φ некоторой критической точки последнего отображения. В силу уже доказанного частного случая теоремы Сарда, отсюда вытекает, что образ $\Phi(K_{p_0})$ множества K_{p_0} критических точек отображения Φ , принадлежащих окрестности U_{p_0} , является подмножеством первой категории (окрестности V_{p_0} , а потому и многообразия N). С другой стороны, поскольку многообразие, по условию, сепарабельно, оно обладает счетной базой и потому в нем можно найти такую счетную систему точек $p_i \in M$, что соответствующие окрестности U_{p_i} покрывают все многообразие M . Но тогда множество всех критических точек отображения Φ будет объединением всех множеств вида K_{p_i} и, следовательно, его образом при отображении Φ будет объединение всех множеств $\Phi(K_{p_i})$. Тем самым теорема Сарда полностью доказана, ибо объединение счетного числа подмножеств первой категории также является подмножеством первой категории.

Рассмотрим теперь случай $m < n$. Оказывается, что *если $m < n$ и если многообразие M сепарабельно, то образ $\Phi(M)$ многообразия M при отображении Φ является подмножеством первой категории многообразия N .*

Для доказательства этого утверждения следует, по существу, дословно повторить изложенное выше доказательство теоремы Сарда. Именно, редукция к частному случаю евклидовых пространств ($M = R^m$ и $N = R^n$) проходит совершенно без всяких изменений. Неравенства (1) и (2) остаются в силе и для отображений $\varphi: R^m \rightarrow R^n$ ($m \neq n$). Гиперплоскость L (уже, конечно, $n - 1$ -мерная) будет существовать теперь для любого вектора $u \in I^m$ и потому нигде не плотным в R^n будет не множество $\varphi(K)$, а все множество $\varphi(I^m)$ (для объема которого вместо оценки (3) будет иметь место оценка $c \cdot b(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot h^m = c m^{m/2} \cdot b(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{n-m-1}$).

З а м е ч а н и е. Доказанные в этом пункте утверждения являются частными случаями некоторой общей теоремы Сарда, относящейся к любым размерностям m и n . Нам эта общая теорема не понадобится и потому мы ее ни доказывать, ни формулировать здесь не будем.

7. Вложение сепарабельных многообразий в евклидово пространство

Для доказательства в общем случае сформулированной в предыдущем пункте теоремы вложения мы должны более внимательно изучить строение пространства R^∞ .

Это пространство естественным образом определяется как (бесконечномерное) линейное пространство (относительно «по-координатных» операций сложения и умножения на вещественное число). Его конечномерные подпространства мы будем считать снабженными евклидовыми топологией и гладкостью (заметим, что в само пространство R^∞ мы ни топологию, ни гладкость не вводим). Среди конечномерных подпространств пространства R^∞ особое значение для нас будут иметь подпространства R^h , $h \geq 1$, натянутые на первые h векторов естественного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$, и подпространства R_k^{h+1} , $k > h$, порожденные подпространством R^h и вектором e_k . (Таким образом, $R_{h+1}^{h+1} = R^{h+1}$ для любого $h \geq 1$.) Среди бесконечномерных подпространств пространства R^∞ мы особо отметим подпространства $R_{h,k}^\infty$, $k \geq h$, $h \geq 0$, натянутые на все векторы естественного базиса, за исключением векторов $e_{h+1}, \dots, e_k$. (Таким образом, в частности, $R_{h,h}^\infty = R^\infty$ и $R^\infty = R^h \times R_{0,h}^\infty$.) Ясно, что каждое из подпространств $R_{h,k}^\infty$ естественно изоморфно всему пространству R^∞ .

В дальнейшем мы будем считать фиксированным некоторое целое число n , не меньшее числа $2m + 1$, где m — размерность рассматриваемого многообразия M . Единичный вектор u пространства R_k^{n+1} , $k > n$, мы будем называть *проектором*, если его последняя координата u^k отлична от нуля. Каждый такой вектор определяет линейное отображение π_u пространства $R_{n,k-1}^\infty$ на пространство $R_{n,k}^\infty$ (*проектирование вдоль вектора u*), переводящее произвольный вектор $t \in R_{n,k-1}^\infty$ в вектор

$$\pi_u t = t - \frac{t^k}{u^k} u.$$

Пусть Φ — произвольное гладкое и локально конечномерное отображение многообразия M в пространство R^∞ и пусть p — произвольная точка многообразия M . Каждому

вектору $A \in M_p$ мы сопоставим вектор $d\Phi_p(A)$ пространства R^∞ , полагая

$$d\Phi_p(A) = (A\varphi^1, A\varphi^2, \dots, A\varphi^i, \dots),$$

где $\varphi^i, i = 1, 2, \dots$, — функции на многообразии M , задающие отображение Φ (в точке $q \in M$ функция $\varphi^i, i = 1, 2, \dots$, принимает значение, равное i -й координате точки $\Phi(q) \in R^m$). Ясно, что отображение $d\Phi_p$ линейно и потому его образ $d\Phi_p(M_p)$ представляет собой (не более чем m -мерное) линейное подпространство пространства R^∞ . О векторах этого подпространства мы будем говорить, что они *касаются* множества $\Phi(M)$ в точке $\Phi(p)$. Ясно, что если отображение Φ регулярно, то отображение $d\Phi_p$ инъективно. Легко видеть, что, и обратно,

если для любой точки $p \in M$ отображение $d\Phi_p: M_p \rightarrow R^\infty$ инъективно, то отображение Φ регулярно.

Действительно, по условию, точка p обладает окрестностью U , в которой лишь конечное число функций φ^i отлично от нуля. Пусть это будут функции $\varphi^{i_1}, \dots, \varphi^{i_s}$. Тогда на окрестности U отображение Φ можно рассматривать как отображение этой окрестности в конечномерное подпространство $\bar{R}^s$, натянутое на векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_s}$, и в соответствии с этим отображение $d\Phi_p$ — как отображение $M_p \rightarrow \bar{R}^s$. Так рассматриваемое отображение Φ будет гладким отображением гладкого многообразия U в гладкое многообразие $\bar{R}^s$, а отображение $d\Phi_p: M_p \rightarrow \bar{R}^s$ будет (в силу обычных отождествлений) его дифференциалом в смысле п. 6 гл. 4. Инъективность этого последнего отображения означает, что отображение $\Phi: U \rightarrow \bar{R}^s$ регулярно в точке p . Но тогда, как мы знаем, из функций $\varphi^{i_1}, \dots, \varphi^{i_s}$ можно выбрать m функций, составляющих систему локальных координат в этой точке. Для завершения доказательства остается заметить, что, по определению, это и означает, что отображение $\Phi: M \rightarrow R^\infty$ регулярно.

Предположим теперь, что образ $\Phi(M)$ отображения Φ принадлежит подпространству $R_{n,k-1}^\infty$. Тогда для любого проектора $u \in R_k^{n+1}$ определено отображение $\Psi = \pi_u \circ \Phi$ многообразия M в подпространство $R_{n,k}^\infty$. Это отображение задается

функциями

$$\psi^i = \varphi^i - \varphi^k \cdot \frac{u^i}{u^k}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

и потому также гладко и локально конечномерно. При этом, так как для любого вектора $A \in M_p$ имеют место равенства

$$A\psi^i = A\varphi^i - A\varphi^k \cdot \frac{u^i}{u^k}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

то

$$d\Psi_p = \pi_u \circ d\Phi_p.$$

В силу доказанного выше предложения отсюда немедленно вытекает, что

если отображение Φ регулярно, а проектор u не касается множества $\Phi(M)$ ни в одной его точке, то отображение $\Psi = \pi_u \circ \Phi$ также регулярно.

Отличный от нуля вектор $u \in R^\infty$ мы будем называть *секущим* для множества $\Phi(M)$, если существуют такие две различные точки p и q многообразия M , что вектор u пропорционален вектору $\Phi(q) - \Phi(p)$. Ясно, что

если отображение $\Phi: M \rightarrow R_{n,k-1}^\infty$ инъективно, то для любого проектора $u \in R_k^{n+1}$, не секущего для множества $\Phi(M)$, отображение $\psi = \pi_u \circ \Phi$ также инъективно.

Пусть Φ — произвольное гладкое, локально конечномерное, регулярное и инъективное отображение многообразия M в пространство R^∞ и пусть $\bar{R}^{n+1}$ — произвольное $n+1$ -мерное линейное подпространство пространства R^∞ . Пусть, кроме того, $\bar{S}^n$ — единичная сфера пространства $\bar{R}^{n+1}$. Легко видеть, что

множество D векторов $u \in \bar{S}^n$, либо касающихся множества $\Phi(M)$ в некоторой его точке, либо секущих для этого множества, имеет в сфере $\bar{S}^n$ первую категорию.

Действительно, пусть M_* — многообразие векторов, касающихся многообразия M . Определим отображение Φ_* этого многообразия в пространство R^∞ , полагая

$$\Phi_*(A) = d\Phi_p(A),$$

если $A \in M_p$. Ясно, что это отображение гладкое. Пусть π — произвольная проекция пространства R^∞ на подпространство $\bar{R}^{n+1}$. Рассмотрим отображение $\pi \circ \Phi_*: M_* \rightarrow \bar{R}^{n+1}$. Это отображение гладко и потому непрерывно. Следовательно, множество W всех векторов $A \in M_*$, для которых $(\pi \circ \Phi_*)(A) \neq 0$, открыто в M_* и потому либо пусто, либо является $2m$ -мерным многообразием. Определим отображение

$$\Psi: W \rightarrow \bar{S}^n,$$

полагая

$$\Psi(A) = \frac{(\pi \circ \Phi_*)(A)}{|(\pi \circ \Phi_*)(A)|}$$

для любого вектора $A \in W$. Ясно, что это отображение гладко и его образ $\Psi(W)$ содержит все единичные векторы пространства $\bar{R}^{n+1}$, касающиеся множества $\Phi(M)$ хотя бы в одной его точке. С другой стороны, так как, по условию, $n \geq 2m + 1 > \dim W$, то, в силу результатов предыдущего пункта, множество $\Psi(W)$, а потому и множество D_1 всех единичных векторов пространства $\bar{R}^{n+1}$, касающихся множества $\Phi(M)$ хотя бы в одной его точке, имеет в сфере $\bar{S}^n$ первую категорию.

Рассмотрим теперь произведение $M \times M$ многообразия M на себя и его отображение Φ' в пространство $\bar{R}^{n+1}$, определенное формулой

$$\Phi'(p, q) = \pi(\Phi(q) - \Phi(p)), \quad (p, q) \in M \times M,$$

где, как и выше, π — некоторая проекция пространства R^∞ на пространство $\bar{R}^{n+1}$. Это отображение гладко и потому непрерывно. Следовательно, множество W' всех точек $(p, q) \in M \times M$, для которых $\Phi'(p, q) \neq 0$, открыто в $M \times M$ и потому либо пусто, либо является $2m$ -мерным гладким многообразием. Определим отображение

$$\Psi': W' \rightarrow \bar{S}^n,$$

полагая

$$\Psi'(p, q) = \frac{\Phi'(p, q)}{|\Phi'(p, q)|}$$

для любой точки $(p, q) \in W'$. Ясно, что это отображение гладко и его образ $\Psi'(W')$ содержит множество D_2 всех

векторов $u \in \bar{S}^n$ секущих для множества $\Phi(M)$. Так как $n \geq 2m + 1 > \dim W'$, то этот образ, а потому и множество D_2 , имеет в сфере $\bar{S}^n$ первую категорию.

Для завершения доказательства остается заметить, что множество D является объединением множеств D_1 и D_2 и, следовательно, также является множеством первой категории.

Поскольку сфера S^n является хаусдорфовым локально компактным пространством, мы, сопоставив доказанные предложения, немедленно получим, что

для любого гладкого, локально конечномерного, регулярного и инъективного отображения Φ многообразия M в пространство $R_{n,k-1}^\infty$ множество всех проекторов пространства R_k^{n+1} , для которых отображение $\pi_u \circ \Phi$ регулярно и инъективно, всюду плотно в единичной сфере пространства R_k^{n+1} .

Отображение Φ многообразия M в пространство R^∞ , заданное функциями $\varphi^1, \varphi^2, \dots$, мы будем называть *ограниченным по k -й координате*, если функция φ^k ограничена (по абсолютной величине).

Пусть Φ — произвольное отображение многообразия M в пространство $R_{n,k-1}^\infty$, ограниченное по k -й координате, $u \in R_k^{n+1}$ — некоторый проектор и

$$\Psi = \pi_u \circ \Phi : M \rightarrow R_{n,k}^\infty$$

— композиция отображения Φ и проекции π_u . Пусть, далее, $\varphi^1, \dots, \varphi^n, 0, \dots, 0, \varphi^k, \dots$ — функции, задающие отображение Φ . Рассмотрим отображения

$$\pi \circ \Phi, \pi \circ \Psi : M \rightarrow R^n,$$

где π — естественная проекция пространства R^∞ на пространство R^n . Эти отображения задаются соответственно функциями $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ и $\varphi^1 - \varphi^k \frac{u^1}{u^k}, \dots, \varphi^n - \varphi^k \frac{u^n}{u^k}$. Поэтому для любой точки $p \in M$ имеет место соотношение

$$(\pi \circ \Psi)(p) - (\pi \circ \Phi)(p) = -\varphi^k(p) \cdot \frac{u'}{u^k},$$

где $u' = \pi(u)$ — вектор пространства R^n с координатами $(u^1, \dots, u^n)$. Обозначая символом K максимум модуля функции φ^k на многообразии M и полагая $|u^k| = \cos \alpha$, мы немедленно получим отсюда, что

$$|(\pi \circ \Psi)(p) - (\pi \circ \Phi)(p)| \leq K \operatorname{tg} \alpha$$

для любой точки $p \in M$.

Отображения Φ_1 и Ψ_1 — многообразия M в пространство R^n мы будем называть ε -близкими, где ε — некоторое положительное число, если $|\Psi_1(p) - \Phi_1(p)| < \varepsilon$ для любой точки $p \in M$. Из только что доказанной оценки непосредственно вытекает, что

для любого ограниченного по k -й координате отображения Φ многообразия M в пространство $R_{n, k-1}^\infty$ и любого $\varepsilon > 0$ в каждом всюду плотном подмножестве единичной сферы пространства R_k^{n+1} существует такой проектор u , что отображения $\pi \circ \Phi$ и $\pi \circ \Psi$, где $\Psi = \pi_u \circ \Phi$, являются ε -близкими отображениями многообразия M в пространство R^n .

Сопоставляя это утверждение с предыдущим, мы, в частности, получаем, что

для любого гладкого, локально конечномерного, регулярного, инъективного и ограниченного по k -й координате отображения Φ многообразия M в пространство $R_{n, k-1}^\infty$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое гладкое, локально конечномерное, регулярное и инъективное отображение Ψ многообразия M в пространство $R_{n, k}^\infty$, имеющее вид $\pi_u \circ \Phi$, где $u \in R_k^{n+1}$ — некоторый проектор, что отображения $\pi \circ \Phi$ и $\pi \circ \Psi$ являются ε -близкими отображениями многообразия M в пространство R^n .

Докажем теперь, что

для любого гладкого, локально конечномерного, регулярного, инъективного и ограниченного по всем k -м ($k > n$) координатам отображения Φ многообразия M в пространство R^∞ , любого $\varepsilon > 0$ и любого целого $i \geq 0$ существует такое гладкое, локально конечномерное, регулярное,

инъективное и ограниченное по всем k -м ($k > n$) координатам отображение Φ_i многообразия M в подпространство $R_{n, n+i}^\infty$, что

1) если точка $p \in M$ обладает тем свойством, что $\Phi(p) \in R^{n+i}$, то $\Phi_j(p) \in R^n$ и $\Phi_j(p) = \Phi_i(p)$ для любого $j \geq i$;

2) композиция $\pi \circ \Phi_i$ отображения Φ_i и естественной проекции $\pi: R^\infty \rightarrow R^n$ является отображением $\left(1 - \frac{1}{2^i}\right)\varepsilon$ -близким к отображению $\pi \circ \Phi$.

Мы построим отображения Φ_i индукцией по числу i , считая, что $\Phi_0 = \Phi$. Пусть отображение Φ_i уже построено. Мы положим $\Phi_{i+1} = \pi_u \circ \Phi_i$, где $u \in R_{n+i+1}^{n+1}$ — некоторый проектор. Согласно только что доказанному предложению, проектор u можно подобрать так, чтобы отображение Φ_{i+1} было регулярным и инъективным и чтобы отображение $\pi \circ \Phi_{i+1}$ было $\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ -близко к отображению $\pi \circ \Phi_i$. Легко видеть, что построенное таким образом отображение Φ_{i+1} будет обладать всеми требуемыми свойствами. (Заметим, что $R^{n+i+1} \cap R_{n, n+i+1}^\infty = R^n$ и $\pi_u(t) = t$ для любого вектора $t \in R_{n, n+1+i}^\infty$.)

Из этого предложения без труда вытекает, что

для любого гладкого отображения $\varphi_0: M \rightarrow R^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует гладкое, регулярное, инъективное и ε -близкое к φ_0 отображение $\varphi: M \rightarrow R^n$.

Действительно, в предыдущем пункте мы доказали, что для многообразия M существует его гладкое, локально конечномерное, регулярное, инъективное и координатно ограниченное отображение в пространство R^∞ . Поскольку пространство R^∞ изоморфно пространству $R_{0, n}^\infty$, мы можем считать, что такого рода отображение существует не в пространство R^∞ , а в пространство $R_{0, n}^\infty$. Умножая это отображение на данное отображение φ_0 (и пользуясь тем, что $R^n \times R_{0, n}^\infty = R^\infty$), мы, очевидно, получим гладкое, локально конечномерное, регулярное, инъективное и ограниченное по всем k -м ($k > n$) координатам отображение Φ многообразия M в пространство R^∞ , обладающее тем свойством, что $\pi \circ \Phi = \varphi_0$. Построив для этого отображения предусмотренные предыдущим предложением отображения Φ_i , мы определим отображение φ

многообразия M в пространство R^n формулой

$$\varphi(p) = \Phi_i(p), \quad p \in M,$$

где i — такое число, что $\Phi_i(p) \in R^{n+i}$. Согласно свойству 1) отображений Φ_i это определение корректно, а согласно 2) построенное таким образом отображение φ ε -близко к отображению $\varphi_0 = \pi \circ \Phi$. Покажем, что оно гладко, регулярно и инъективно.

Поскольку отображение Φ локально конечномерно, для любой точки $p \in M$ существуют такая ее окрестность U и такое целое число $i \geq 0$, что $\Phi(U) \subset R^{n+i}$. Следовательно, на окрестности U отображение φ совпадает с отображением Φ_i и потому гладко и регулярно. Аналогично для любых двух точек $p, q \in M$ существует такое число $i \geq 0$, что $\Phi(p), \Phi(q) \in R^{n+i}$, и потому $\varphi(p) = \Phi_i(p)$, $\varphi(q) = \Phi_i(q)$. Следовательно, если $\varphi(p) = \varphi(q)$, то $\Phi_i(p) = \Phi_i(q)$ и потому $p = q$. Таким образом, отображение φ инъективно.

Тем самым сформулированное выше утверждение (известное как теорема аппроксимации) полностью доказано.

Теорема аппроксимации не покрывает теорему вложения, потому что предусмотренное ею отображение φ может и не быть гомеоморфизмом. Тем не менее получить из нее теорему вложения большого труда уже не составляет. Чтобы сделать это, мы в первую очередь докажем, что

для любого сепарабельного многообразия M существует его гладкое отображение компактного характера в числовую ось R , а потому и в пространство R^n .

С этой целью мы снова рассмотрим построенные в начале предыдущего пункта функции f_i^k , $k = 0, 1, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots$. Нам теперь понадобятся не все эти функции, а лишь функции

$$f_1^0, f_2^0, \dots, f_i^0, \dots$$

Эти функции гладки на M , имеют компактные носители, принимают значения из отрезка $[0, 1]$ и обладают тем свойством, что в окрестности каждой точки $p \in M$ лишь конечное число их отлично от нуля. Поэтому формула

$$f(p) = f_1^0(p) + 2f_2^0(p) + \dots + if_i^0(p) + \dots, \quad p \in M,$$

определяет на M гладкую неотрицательную функцию f , обладающую тем свойством, что для любого целого $i > 0$ множество $[f \leq i] = f^{-1}([0, i])$ компактно. Но ясно, что любая такая функция осуществляет гладкое отображение компактного характера многообразия M в числовую ось R .

Далее мы заметим, что

любое отображение $\varphi: M \rightarrow R^n$, ε -близкое при некотором $\varepsilon > 0$ к отображению $\varphi_0: M \rightarrow R^n$ компактного характера, также является отображением компактного характера.

Действительно, для любого множества $A \subset R^n$ множество $\varphi^{-1}(A)$ содержится, очевидно, в множестве $\varphi_0^{-1}(\bar{S}_\varepsilon(A))$, где $\bar{S}_\varepsilon(A)$ — замыкание ε -окрестности $S_\varepsilon(A)$ множества A . С другой стороны, если множество A компактно, то множество $S_\varepsilon(A)$, как легко видеть, также компактно.

Таким образом, применяя теорему аппроксимации к произвольному гладкому отображению $\varphi_0: M \rightarrow R^n$ компактного характера, мы получим гладкое, регулярное, инъективное и имеющее компактный характер отображение $\varphi: M \rightarrow R^n$. Но, поскольку пространство R^n представляет собой хаусдорфово пространство, каждое инъективное отображение компактного характера произвольного хаусдорфова пространства в пространство R^n является гомеоморфизмом на замкнутое подмножество. Следовательно, в частности, гомеоморфизмом является и отображение φ . Так как это отображение, кроме того, и регулярно, то оно представляет собой диффеоморфизм многообразия M на некоторое (замкнутое) подмногообразие пространства R^n .

Тем самым теорема вложения полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Мы доказали даже большее, чем утверждалось в теореме вложения. Именно, во-первых, мы доказали, что размерностью n евклидова пространства, в которое вкладывается данное m -мерное многообразие M , может служить любое целое число $n \geq 2m + 1$ и, в частности, число $2m + 1$. Во-вторых, мы доказали, что многообразие M можно реализовать в пространстве R^n (в частности, в пространстве R^{2m+1}) в виде замкнутого подмногообразия.

Стоит также заметить, что из теоремы вложения непосредственно вытекает теорема п. 10. гл. 4 о возможности определить любое сепарабельное многообразие как риманово пространство. Действительно, пространство R^n очевидным образом является римановым пространством, а, с другой стороны, каждое подмногообразие M риманова пространства N представляет собой, очевидно, риманово пространство с полем метрического тензора ι^*g , где $\iota: M \subset N$ — отображение вложения, а g — поле метрического тензора пространства N .

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Мы переходим, наконец, к изложению собственно результатов Морса о связи между топологическим строением гладкого многообразия M и критическими точками определенных на M гладких функций. Кроме того, мы излагаем здесь одно обобщение этих результатов (полученное Боттом), а также некоторые простейшие их применения.

В п. 1 вводятся основные понятия критической точки, гессиана, невырожденного критического многообразия и невырожденной критической точки. Здесь же доказывается фундаментальная лемма Морса о представлении гладкой функции в окрестности ее невырожденной критической точки.

В п. 2 двумя разными способами доказывается, что на любом сепарабельном гладком многообразии существует гладкая функция, все критические точки которой невырождены.

Основной теореме Морса посвящен п. 3.

В п. 4 на основе теоремы Морса доказывается, что любое сепарабельное гладкое многообразие гомотопически эквивалентно некоторому счетному клеточному разбиению. В качестве примера рассмотрено комплексное проективное пространство CP^n .

В последнем п. 5 теорема Морса обобщается на случай, когда критические точки данной функции лишь слабо невырождены.

В дополнении выводятся классические неравенства Морса для чисел Бетти рассматриваемого многообразия. Это дополнение является единственным местом книги, где от читателя требуется знакомство с теорией гомологий. Впрочем, все необходимые свойства чисел Бетти сформулированы в этом дополнении в явном виде.

1. Критические точки и невырожденные критические многообразия

В соответствии с общим определением (см. п. 6 гл. 4) точка p гладкого многообразия M называется *критической точкой* гладкой функции $f \in \mathcal{O}(M)$, если $df_p = 0$, т. е. если в некоторой (а потому и в любой) системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в точке p имеют место равенства

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p = 0, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial x^m}\right)_p = 0.$$

Число $a \in R$ называется *критическим значением* функции f , если существует такая критическая точка $p \in M$, что $a = f(p)$.

Так как для каждой гладкой на многообразии M функции f и любого векторного поля $X \in \mathcal{O}^1(M)$ выражение $df(X)$ представляет собой гладкую на M функцию, то мы можем говорить о ее дифференциале $d[df(X)]$. Для любых двух векторных полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$ мы положим

$$Hf(X, Y) = d[df(X)](Y) - \frac{1}{2} df([X, Y]).$$

Очевидно, что определенная таким образом функция Hf пары полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$ линейна по каждому аргументу, т. е. является билинейной формой на линейном пространстве $\mathcal{O}^1(M)$. (Однако эта функция не $\mathcal{O}(M)$ -линейна, т. е. тензорным полем она не является). В локальных координатах $x^1, \dots, x^m$ форма Hf задается, как легко видеть, равенством

$$Hf(X, Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} X^i Y^j + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x^j} \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial X^j}{\partial x^i} Y^i \right).$$

Отсюда, в частности, следует, что значение $Hf(X, Y)(p)$ функции $Hf(X, Y)$ в произвольной критической точке $p \in M$ функции f выражается формулой

$$Hf(X, Y)(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_p X_p^i Y_p^j$$

и потому зависит только от векторов X_p и Y_p .

Поэтому формула

$$H_p f(A, B) = Hf(X, Y)(p),$$

где $A, B \in M_p$, а X и Y — такие векторные поля на многообразии M , что $X_p = A$ и $Y_p = B$, однозначно определяет на пространстве M_p некоторую (очевидно, симметричную) билинейную форму $H_p f$. Соответствующую квадратичную форму

$$H_p f(A) = H_p f(A, A)$$

мы будем называть *гессианом* функции f в точке p . В произвольной системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$ на многообразии M в точке p гессиан $H_p f$ выражается формулой

$$H_p f(A) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_p A^i A^j,$$

где $A^1, \dots, A^m$ — компоненты вектора A в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, $i = 1, \dots, n$.

Подчеркнем, что гессиан $H_p f$ определен только для критических точек p функции f .

Ясно, что гессиан линейно зависит от функции f , т. е. для любых функций $f, g \in \mathcal{O}(M)$, имеющих точку $p \in M$ своей критической точкой, и любых вещественных чисел $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$H_p(af + bg) = aH_p f + bH_p g.$$

Пусть $\Phi: N \rightarrow M$ — произвольное гладкое отображение, а точка $p \in M$ — по-прежнему критическая точка некоторой функции $f \in \mathcal{O}(M)$. Ясно, что любая точка $q \in N$, для которой $\Phi(q) = p$, является критической точкой функции $f \circ \Phi \in \mathcal{O}(N)$ (ибо $d(f \circ \Phi) = \Phi^*(df)$). При этом, как легко видеть,

$$H_q(f \circ \Phi) = \Phi^* H_p f.$$

В частности, пусть N — произвольное подмногообразие многообразия M и пусть критическая точка p функции f принадлежит подмногообразию N . Тогда эта точка, рассматриваемая как точка многообразия N , будет критической точкой функции $f|_N$ — ограничения функции f на подмногообразии N , причем

гессиан $H_p(f|_N)$ ограничения $f|_N$ представляет собой ограничение $H_p f|_{N_p}$ гессиана $H_p f$ функции f на подпространстве N_p пространства M_p :

$$H_p(f|_N) = H_p f|_{N_p}.$$

Этими простыми, но важными свойствами гессиана мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Корангом квадратичной формы, заданной на конечномерном линейном пространстве, мы будем называть разность между размерностью этого пространства и *рангом* рассматриваемой формы, т. е. рангом ее матрицы в произвольном базисе. Из элементов линейной алгебры известно, что коранг квадратичной формы можно также определить как размерность нуль-пространства этой формы, т. е. максимального подпространства, на котором форма тождественно равна нулю.

Индексом квадратичной формы мы будем называть ее отрицательный индекс инерции, т. е. число отрицательных членов в ее представлении в виде алгебраической суммы квадратов. Это число можно охарактеризовать как размерность максимального подпространства, на котором данная форма отрицательно определена.

Коранг и индекс гессиана $H_p f$ функции f в критической точке p мы будем называть соответственно *корангом* и *индексом* точки p и будем обозначать их символами $s(p)$ (или $s_f(p)$) и $h(p)$ (или $h_f(p)$). Иногда мы будем пользоваться также и *рангом* $r(p) = r_f(p)$ критической точки p , т. е. рангом гессиана $H_p f$ в этой точке.

Систему локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в критической точке p функции f мы будем называть *ассоциированной с функцией f* , если

- 1) все координаты $x^1, \dots, x^m$ равны нулю в точке p ;
- 2) в окрестности точки p имеет место равенство

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^h)^2 + (x^{h+1})^2 + \dots + (x^r)^2 + \sum_{i, j=r+1}^m h_{ij} x^i x^j, \quad (1)$$

где $h_{ij} = h_{ji}$ — некоторые гладкие функции, равные нулю в этой точке:

$$h_{ij}(p) = 0, \quad i, j = r+1, \dots, m.$$

Дифференцируя равенство (1) и полагая $x^1 = 0, \dots, x^m = 0$, мы немедленно получим, что

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_p = \begin{cases} -2, & \text{если } 1 \leq i = j \leq h, \\ +2, & \text{если } h+1 \leq i = j \leq r, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно,

участвующие в формуле (1) числа h и r совпадают с индексом $h(p)$ и рангом $r(p)$ критической точки p .

Основой всей теории критических точек является тот замечательный факт, что

для любой гладкой на многообразии M функции f в каждой ее критической точке p существует ассоциированная с этой функцией система локальных координат.

Действительно, пусть $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат в точке p , равных нулю в этой точке. Согласно формуле (1) п. 5 гл. 4, в некоторой окрестности точки p имеет место равенство

$$f = f(p) + g_i x^i,$$

где $g_1, \dots, g_m$ — такие гладкие в точке p функции, что

$$g_i(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

По тем же соображениям существуют такие гладкие в точке p функции h_{ij}^0 , $i, j = 1, \dots, m$, что

$$g_i = h_{ij}^0 x^j$$

для любого $i = 1, \dots, m$, причем

$$h_{ij}^0(p) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} \right)_p$$

для всех $i, j = 1, \dots, m$. Симметризуем «коэффициенты» h_{ij}^0 , полагая

$$h_{ij} = \frac{1}{2} (h_{ij}^0 + h_{ji}^0).$$

Так как $h_{ij}^0 x^i x^j = h_{ij} x^i x^j$, то в достаточно малой окрестности точки p имеет место равенство

$$f = f(p) + h_{ij} x^i x^j. \quad (2)$$

Пусть не все функции h_{ij} равны нулю в точке p . Проведя линейное преобразование координат (известное из элементарной теории приведения квадратичных форм к сумме квадратов), мы можем считать, что

$$h_{11}(p) \neq 0.$$

Следовательно, функция

$$g = \sqrt{|h_{11}|}$$

будет гладкой в точке p . По образцу стандартного алгоритма приведения квадратичных форм к сумме квадратов мы

критического многообразия, обладающую этими двумя свойствами, мы будем называть *жестко ассоциированной с функцией f* . Таким образом, мы показали, что

в любой то же p произвольного невырожденного критического многообразия N существует жестко ассоциированная с данной функцией f система локальных координат.

В любой ассоциированной системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$ функция f в некоторой окрестности U рассматриваемой слабо невырожденной критической точки p^m задается формулой

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^r)^2 + (x^{r+1})^2 + \dots + (x^m)^2 + \\ + \sum_{i, j=r+1}^m h_{ij} x^i x^j,$$

где $h_{ij} = h_{ji}$, $i, j = r+1, \dots, m$, — некоторые гладкие в точке p функции, равные нулю в самой этой точке. Если координаты $x^1, \dots, x^r$ жестко ассоциированы с функцией f , то вид этих функций можно специализировать. Именно, оказывается, что

без ограничения общности можно считать, что функции h_{ij} имеют вид

$$h_{ij} = \sum_{k, l=1}^r h_{ijkl} x^k x^l, \quad i, j = r+1, \dots, m,$$

где h_{ijkl} — некоторые гладкие функции.

Действительно, дважды используя формулу (1) п. 5 гл. 4, мы можем каждую из функций h_{ij} записать в следующем виде:

$$h_{ij} = h_{ij}^0 + \sum_{k=1}^r h_{ijk}^0 x^k + \sum_{k, l=1}^r h_{ijkl} x^k x^l, \quad i, j = r+1, \dots, m,$$

где функции h_{ij}^0 и h_{ijk}^0 зависят только от координат $x^{r+1}, \dots, x^m$. При этом без потери общности можно считать, что функции h_{ij}^0 , h_{ijk}^0 и h_{ijkl} симметричны по индексам i и j , а функции h_{ijkl} симметричны и по индексам k и l .

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x^s} = \begin{cases} \pm 2x^s + \sum_{i,j=r+1}^m \left(h_{ijs}^0 + 2 \sum_{k=1}^r h_{ijk}s x^k + \right. \\ \left. + \sum_{k,l=1}^r \frac{\partial h_{ijkl}}{\partial x^s} x^k x^l \right) x^i x^j, & \text{если } 1 \leq s \leq r; \\ \sum_{i,j=r+1}^m \left(\frac{\partial h_{ij}^0}{\partial x^s} + \sum_{k=1}^r \frac{\partial h_{ijk}^0}{\partial x^s} x^k + \sum_{k,l=1}^r \frac{\partial h_{ijkl}}{\partial x^s} x^k x^l \right) x^i x^j + \\ + 2 \sum_{i=r+1}^m \left(h_{is}^0 + \sum_{k=1}^r h_{isk}^0 x^k + \sum_{k,l=1}^r h_{iskl} x^k x^l \right) x^i, & \text{если } r+1 \leq s \leq m. \end{cases}$$

Полагая здесь $x^1 = 0, \dots, x^r = 0$, мы немедленно получим, что на множестве $N \cap U$ имеют место равенства

$$\sum_{i,j=r+1}^m h_{ijs}^0 x^i x^j = 0, \quad s = 1, \dots, r, \quad (6)$$

$$\sum_{i,j=r+1}^m \frac{\partial h_{ij}^0}{\partial x^s} x^i x^j + 2 \sum_{i=r+1}^m h_{is}^0 x^i = 0, \quad s = r+1, \dots, m. \quad (7)$$

Но, по условию, функции h_{ij}^0 и h_{ijs}^0 зависят только от координат $x^{r+1}, \dots, x^m$. Поэтому левые части равенства (6) и (7) зависят лишь от этих координат и, значит, равны нулю тождественно, т. е. на всей окрестности U .

Поскольку

$$\sum_{i,j=r+1}^m \frac{\partial h_{ij}^0}{\partial x^s} x^i x^j + 2 \sum_{i=r+1}^m h_{is}^0 x^i = \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sum_{i,j=r+1}^m h_{ij}^0 x^i x^j \right)$$

и поскольку функции h_{ij}^0 не зависят от координат $x^1, \dots, x^r$ и равны нулю в точке p , из соотношений (7) вытекает, что на окрестности U имеют место равенства

$$\sum_{i,j=r+1}^m h_{ij}^0 x^i x^j = 0.$$

Ввиду соотношений (6) мы получаем отсюда, что

$$\sum_{i, j=r+1}^m h_{ij} x^i x^j = \sum_{k, l=1}^r \sum_{i, j=r+1}^m h_{ijkl} x^k x^l x^i x^j.$$

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Из этого предложения немедленно вытекает, в частности, что во всех точках многообразия N , принадлежащих окрестности U , функция f принимает одно и то же значение $f(p)$. Поскольку многообразие N связно, отсюда следует, что $f(p) = f(q)$ для любых точек $p, q \in N$. Другими словами, *на каждом невырожденном критическом многообразии N функция f постоянна.*

Критическая точка p функции f называется *невырожденной*, если ее коранг $c(p)$ равен нулю. В окрестности любой точки $p \in M$ можно задать гладкую функцию f , для которой точка p является невырожденной критической точкой любого наперед заданного индекса h . Такую функцию можно, например, определить формулой

$$f = -(x^1)^2 - \dots - (x^h)^2 + (x^{h+1})^2 + \dots + (x^m)^2, \quad (8)$$

где $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат в точке p , обращающихся в нуль в самой этой точке. С точностью до произвольной постоянной это — общий вид гладких функций, имеющих точку p своей невырожденной критической точкой. Действительно, любая такая функция f в нормальных (по отношению к этой функции) координатах $x^1, \dots, x^m$ имеет вид (8) (с точностью до постоянного слагаемого $f(p)$). Таким образом,

точка $p \in M$ тогда и только тогда является невырожденной критической точкой индекса h гладкой функции f , когда в точке p существует такая система локальных координат $x^1, \dots, x^m$ (равных нулю в этой точке), что в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^h)^2 + (x^{h+1})^2 + \dots + (x^m)^2.$$

Из этого утверждения (известного как лемма Морса) непосредственно вытекает, в частности, что

всякая невырожденная критическая точка функции f изолирована в множестве всех критических точек этой функции, т. е. обладает окрестностью, свободной от других критических точек.

Таким образом, каждая невырожденная критическая точка p , рассматриваемая как нульмерное подмногообразие многообразия M , удовлетворяет условию изолированности (условию 3)) определения невырожденного критического многообразия. Остальные условия этого определения выполнены очевидным образом. Таким образом,

любая невырожденная критическая точка является слабо невырожденной точкой.

Рассмотрим снова произвольное невырожденное критическое многообразие N функции f . Пусть p — его произвольная точка и пусть $N^\#$ — произвольное r -мерное ($r = m - n$) подмногообразие многообразия M , дополнительное к подмногообразию N в точке p (т. е. имеющее вблизи точки p с подмногообразием N только одну общую точку p и обладающее тем свойством, что его касательное пространство $N_p^\#$ лишь по нулю пересекается с пространством N_p).

По условию, подпространство N_p является нуль-пространством квадратичной формы $H_p f$. Поэтому на дополнительном пространстве $N_p^\#$ эта квадратичная форма невырождена. Но мы знаем, что ограничение $H_p f|_{N_p^\#}$ гессиана $H_p f$ на подпространстве $N_p^\#$ представляет собой не что иное, как гессиан ограничения $f|_{N^\#}$ функции f на подмногообразии $N^\#$. Таким образом,

функция $f|_{N^\#}$ на подмногообразии $N^\#$ имеет точку p своей невырожденной критической точкой.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что и, наоборот, любое связное подмногообразие N многообразия M , состоящее из критических точек функции f , является невырожденным критическим многообразием, если для любой его точки p и любого подмногообразия $N^\#$, дополнительного к подмногообразию N в точке p , последняя точка является невырожденной критической точкой функции $f|_{N^\#}$. Нам этот факт не понадобится и потому мы оставим его без доказательства.

2. Функции, все критические точки которых невырождены

В этом пункте мы докажем, что

на любом гладком сепарабельном многообразии M существует неотрицательная гладкая функция f компактного характера (т. е. представляющая собой отображение компактного характера многообразия M в числовую ось R), все критические точки которой невырождены.

При доказательстве этого утверждения мы, в силу доказанной в предыдущей главе теоремы вложения, можем без ограничения общности считать, что рассматриваемое многообразие M реализовано в виде замкнутого подмногообразия некоторого евклидова пространства R^n .

Пусть u — произвольный вектор R^n . Рассмотрим на многообразии M функцию f , определенную формулой

$$f(p) = \frac{1}{2} |u - p|^2, \quad p \in M. \quad (1)$$

Ясно, что эта функция гладка, неотрицательна и обладает тем свойством, что для любого $a \in R$ множество $[f \leq a]$ (будучи замкнутым и ограниченным подмножеством пространства R^n) компактно. С другой стороны, очевидно, что неотрицательная функция на многообразии M тогда и только тогда обладает последним свойством, когда она осуществляет отображение компактного характера многообразия M в числовую ось R . Таким образом, для доказательства сформулированного выше утверждения достаточно показать, что хотя бы для одного вектора $u \in R^n$ функция (1) обладает только невырожденными критическими точками.

Пусть p — произвольная точка многообразия M . Из формулы (1) немедленно вытекает, что для любой системы $x^1, \dots, x^m$ локальных координат на многообразии M в точке p имеют место равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = - \left(u - p, \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

где векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \in M_p$, $i = 1, \dots, m$, рассматриваются как векторы пространства R^n . Следовательно,

точка $p \in M$ тогда и только тогда является критической точкой функции (1), когда вектор $u - p$ ортогона-

лен многообразию M , т. е. когда пара $(p, u - p)$ принадлежит построенному в п. 5 гл. 5 многообразию N_* .

Далее, если локальные координаты $x^1, \dots, x^m$ определены формулами (1) п. 5 гл. 5, то

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i + \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial t^k}{\partial x^i} e_k$$

(для упрощения формул мы опускаем здесь указание на точку p) и потому

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = - \left[u^i - x^i + \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial t^k}{\partial x^i} \cdot (u^k - t^k) \right]$$

(мы используем введенные в п. 5 гл. 5 обозначения и соглашения; в частности, базис $e_1, \dots, e_n$ пространства R^n мы считаем ортонормированным). Следовательно,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \delta_j^i - \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial^2 t^k}{\partial x^i \partial x^j} \cdot (u^k - t^k) + \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial t^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial t^k}{\partial x^j}.$$

Используя введенные в п. 5 гл. 5 матрицы A и T , мы, как легко видеть, можем эти соотношения переписать в виде одного матричного равенства

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) = A + TT'$$

(имеется в виду, что матрицы A и T вычислены в точке $(p, u - p) \in N_*$). Сравнивая это равенство с формулой (5) п. 5 гл. 5, мы немедленно получаем отсюда, что

определитель

$$\det \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right|$$

гессиана функции (1) в критической точке $p \in M$ совпадает с якобианом

$$\det \left| \frac{\partial v^i}{\partial x_*^j} \right|$$

отображения $p: N_* \rightarrow R^n$ в точке $(p, u - p) \in N_*$.

Поэтому

критическая точка $p \in M$ функции (1) тогда и только тогда вырождена, когда точка $(p, u - p) \in N_*$ является критической точкой отображения p .

Поскольку $\rho(p, u - p) = u$, отсюда следует, что если вектор $u \in R^n$ не является образом при отображении ρ ни одной критической точки этого отображения, то все критические точки соответствующей вектору u функции (1) невырождены.

Поскольку множество векторов $u \in R^n$, обладающих последним свойством, являясь в силу теоремы Сарда дополнением некоторого множества первой категории, не пусто, существование функций (1), имеющих лишь критические точки, тем самым полностью доказано.

Хотя функции (1) аналитически устроены весьма просто, они не имеют простого наглядно геометрического истолкования. Мы изложим сейчас другой метод построения функций с лишь невырожденными критическими точками, не имеющих этого недостатка. Однако функции, получающиеся этим методом, вообще говоря, не ограничены снизу и не являются отображениями компактного характера в числовую ось. Впрочем, для наиболее интересного случая компактных многообразий это обстоятельство несущественно, ибо любая функция на компактном многообразии автоматически является отображением компактного характера и ограничена снизу (и потому может быть превращена в неотрицательную функцию прибавлением некоторой постоянной).

Пусть L^{n-1} — произвольное $n-1$ -мерное линейное подпространство (гиперплоскость) пространства R^n . (Мы по-прежнему считаем, что $M \subset R^n$). Рассмотрим на многообразии M числовую функцию f , значением $f(p)$ которой в произвольной точке $p \in M$ является (взятое с определенным знаком) расстояние точки p от гиперплоскости L^{n-1} . Считая гиперплоскость L^{n-1} расположенной горизонтально, мы можем наглядно представлять себе число $f(p)$ как «высоту» точки p над гиперплоскостью L^{n-1} .

Пусть L^1 — одномерное линейное пространство (прямая), ортогональное гиперплоскости L^{n-1} , и пусть π — проекция пространства R^n на прямую L^1 . Тогда функцию f мы можем определить формулой

$$\pi(p) = f(p) u, \quad p \in M,$$

где u — единичный вектор, расположенный на прямой L^1 , т. е. единичный вектор, ортогональный гиперплоскости L^{n-1} .

Ясно, что

$$f = \xi \circ \pi \circ \iota, \quad (2)$$

где ι — отображение вложения $M \subset \mathbb{R}^n$, а $\xi: L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ — координатный диффеоморфизм, соответствующий вектору u (являющемуся базисом пространства L^1). Поэтому

$$df_p = d\xi_{\pi(p)} \circ d\pi_p \circ d\iota_p$$

для любой точки $p \in M$. Поскольку отображение $d\xi_{\pi(p)}$ изоморфно, из этой формулы непосредственно вытекает, что $df_p = 0$ тогда и только тогда, когда $d\pi_p \circ d\iota_p = 0$, т. е. когда $d\pi_p(M_p) = 0$. С другой стороны, ясно, что в силу стандартных отождествлений линейное отображение $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L^1$ совпадает со своим дифференциалом $d\pi_p: (\mathbb{R}^n)_p \rightarrow (L^1)_{\pi(p)}$. Поэтому $d\pi_p(M_p) = 0$ тогда и только тогда, когда $\pi(M_p) = 0$, т. е. когда вектор u ортогонален подпространству $M_p \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть φ — гладкая функция на многообразии N_* , сопоставляющая каждой точке $(p, u) \in N_*$ длину $|u|$ вектора u . Рассмотрим поверхность уровня $N = [\varphi = 1]$ функции φ , т. е. множеств всех пар $(p, u) \in N_*$, для которых $|u| = 1$. Очевидно, что эта поверхность уровня регулярна и потому представляет собой $n-1$ -мерное подмногообразие многообразия N_* . Мы будем это подмногообразие называть *многообразием единичных векторов, ортогональных многообразию M* .

Согласно сказанному выше

точка $p \in M$ тогда и только тогда является критической точкой функции (2), когда вектор u ортогонален многообразию M в точке p , т. е. когда пара (p, u) является точкой многообразия N .

Пусть (p_0, u_0) — произвольная точка многообразия N . Согласно сказанному в п. 5 гл. 5, для того чтобы построить на многообразии N_* локальные координаты в точке (p_0, u_0) , следует выбрать в пространстве $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, обладающий тем свойством, что его первые m векторов $e_1, \dots, e_m$ составляют базис пространства M_{p_0} . При этом, поскольку вектор u_0 ортогонален, по условию, пространству M_{p_0} , мы, без ограничения общности, можем считать, что $e_n = u_0$.

как функции на многообразии N и в соответствии с этим считать их функциями локальных координат $y^1, \dots, y^{n-1}$ (на самом деле — лишь координат $y^1, \dots, y^m$).

Рассмотрим теперь отображение

$$\nu: N \rightarrow S^{n-1}$$

многообразия N в единичную сферу S^{n-1} пространства R^n , определенное формулой

$$\nu(p, u) = u.$$

Так как величины $\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^{n-1}$ можно, очевидно, принять за локальные координаты на сфере S^{n-1} в точке $u_0 = e_m$, то формулы (4) представляют собой не что иное, как запись отображения ν в локальных координатах $y^1, \dots, y^{n-1}$ и $\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^{n-1}$. Дифференцируя эти формулы и учитывая тождества $y^1(p, u) = x^1(p), \dots, y^m(p, u) = x^m(p)$ и тот факт, что функции $\frac{\partial t^j}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, m$; $j = m+1, \dots, n$, не зависят от координат $y^{m+1}, \dots, y^n$, мы немедленно получим, что

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial y^k} = \begin{cases} - \sum_{j=m+1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 t^j}{\partial x^i \partial x^k} \right)_p y^j - \left(\frac{\partial^2 t^n}{\partial x^i \partial x^k} \right)_p, & \text{если } 1 \leq i, k \leq m, \\ - \left(\frac{\partial t^k}{\partial x^i} \right)_p, & \text{если } 1 \leq i \leq m, \quad m+1 \leq k \leq n-1, \\ \delta_k^i & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как в точке (p_0, u_0) координаты $y^{m+1}, \dots, y^{n-1}$ равны нулю, то, в частности,

$$\left(\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial y^k} \right)_{(p_0, u_0)} = \begin{cases} - \left(\frac{\partial^2 t^n}{\partial x^i \partial x^k} \right)_p, & \text{если } 1 \leq i, k \leq m, \\ - \left(\frac{\partial t^k}{\partial x^i} \right)_p, & \text{если } 1 \leq i \leq m, \quad m+1 \leq k \leq n-1, \\ \delta_k^i & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что точка (p_0, u_0) тогда и только тогда является критической точкой отображения ν , когда

$$\det \left| \left(\frac{\partial^2 t^n}{\partial x^i \partial x^k} \right)_p \right| = 0. \quad (5)$$

С другой стороны, ясно, что функция t^n является не чем иным, как функцией (2), отвечающей гиперплоскости, ортогональной вектору u_0 , так что равенство (5) представляет собой условие вырожденности критической точки p_0 этой функции. Тем самым мы доказали (мы откидываем индекс 0 в обозначении точки p_0 и вектора u_0), что

критическая точка $p \in M$ функции (2) тогда и только тогда невырождена, когда пара (p, u) (являющаяся точкой многообразия N) не является критической точкой отображения $\gamma: N \rightarrow S^{n-1}$.

Следовательно,

если вектор $u \in S^{n-1}$ не является образом при отображении γ никакой критической точки этого отображения, то все критические точки функции (2) невырождены.

Таким образом, согласно теореме Сарда, гиперплоскость L^{n-1} (или, что равносильно, вектор $u \in S^{n-1}$) мы всегда можем выбрать так, чтобы функция (2) имела лишь невырожденные критические точки.

3. Теорема Морса

Пусть M — произвольное сепарабельное гладкое многообразие и f — произвольная гладкая функция на многообразии M . В этом пункте мы опишем изменение множеств $[f \leq a]$ при возрастании параметра a . Хотя это изменение можно, вообще говоря, проследить с точностью до диффеоморфизма, мы для простоты ограничимся более элементарной задачей изучения изменения множеств $[f \leq a]$ с точностью до гомотопической эквивалентности.

В первую очередь мы рассмотрим случай, когда параметр a не проходит ни через одно критическое значение функции f . Оказывается, что в этом случае множество $[f \leq a]$, по существу, не изменяется. Именно, как мы сейчас покажем,

если числа a и $b > a$ обладают тем свойством, что множество $[a \leq f \leq b]$ компактно и не содержит ни одной критической точки функции f , то существует диффеоморфизм Φ многообразия M на себя, отображающий множество $[f \leq a]$ на множество $[f \leq b]$.

Кроме того,

в этом случае множество $[f \leq a]$ является деформационным ретрактом множества $[f \leq b]$.

Поскольку многообразие M , по условию, сепарабельно, мы можем определить его как риманово пространство (см. п. 10 гл. 4) и потому ввести в рассмотрение поле $\text{grad } f$ градиента функции f . Это поле, а следовательно, и функция $(\text{grad } f, \text{grad } f)$, равно нулю в критических точках функции f и только в этих точках. В частности, на множестве $[a \leq f \leq b]$, не содержащем, по условию, критических точек функции f , функция $(\text{grad } f, \text{grad } f)$ положительна. Поэтому функция $1/(\text{grad } f, \text{grad } f)$ является гладкой на множестве $[a \leq f \leq b]$ функцией. Поскольку множество $[a \leq f \leq b]$, по условию, компактно, на многообразии M существует положительная гладкая функция h с компактным носителем, являющаяся распространением с множества $[a \leq f \leq b]$ функции $1/(\text{grad } f, \text{grad } f)$ (см. п. 4 гл. 4). Пусть

$$X = h \cdot \text{grad } f.$$

Ясно, что носитель этого векторного поля, будучи, очевидно, подмножеством носителя функции h , компактен. Поэтому на многообразии M существует однопараметрическая группа

$$\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

диффеоморфизмов, порождающая поле X (см. п. 3 гл. 5).

Пусть p — произвольная точка многообразия M и пусть

$$g(t) = f(\varphi_p(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где, как и в п. 3 гл. 5,

$$\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$$

— траектория группы φ , проходящая через точку p . Так как эта траектория является интегральной кривой поля X , то

$$\dot{g}(t) = X_{\varphi_p(t)} f = (X, \text{grad } f)(\varphi_p(t)) = (h \cdot (\text{grad } f, \text{grad } f))(\varphi_p(t)).$$

Поскольку $h = 1/(\text{grad } f, \text{grad } f)$ на $[a \leq f \leq b]$, отсюда вытекает, что $\dot{g}(t) = 1$, если $\varphi_p(t) \in [a \leq f \leq b]$, т. е. если $a \leq g(t) \leq b$. Кроме того, функция g , очевидно, монотонна. Поэтому, обозначив через t_0 значение параметра t , для которого $g(t_0) = a$ (если оно существует), и положив $d = b - a$, мы получим, что

$$\begin{aligned} g(t) &< a, & \text{если } t < t_0, \\ g(t) &= t - t_0 + a, & \text{если } t_0 \leq t \leq t_0 + d, \\ g(t) &> b, & \text{если } t_0 + d < t. \end{aligned}$$

Пусть теперь $p \in [f \leq a]$, т. е. пусть $g(0) \leq a$. Тогда либо $g(t) < a$ при любом $t \in R$ и, в частности, при $t = d$, либо существует такое $t \in R$, что $a \leq g(t) \leq b$. В последнем случае функция $g(t)$ имеет описанный выше вид, причем соответствующее число t_0 , очевидно, неотрицательно. Поэтому $d \leq t_0 + d$ и, следовательно, либо $g(d) < a$ (если $d < t_0$), либо $g(d) = d - t_0 + a = b - t_0 \leq b$ (если $t_0 \leq d$). Таким образом, во всех случаях $g(d) \leq b$, т. е. $\varphi_p(d) \in [f \leq b]$.

Обратно, пусть точка $p \in M$ обладает тем свойством, что $\varphi_p(d) \in [f \leq b]$, т. е. что $g(d) \leq b$. Тогда либо $g(t) < a$ при любом $t \in R$ и, в частности, при $t = 0$, либо функция $g(t)$ имеет описанный выше вид, причем соответствующее число t_0 неотрицательно (ибо если $g(d) < a$, то $d < t_0$, а если $a \leq g(d) \leq b$, то $d - t_0 + a = b - t_0 \leq b$). Поэтому и в этом случае $g(0) \leq a$, т. е. $p \in [f \leq a]$.

Рассмотрим теперь диффеоморфизм

$$\varphi_d: M \rightarrow M,$$

определенный формулой

$$\varphi_d(p) = \varphi(d, p), \quad p \in M.$$

Так как для любой точки $p \in M$ имеет место равенство

$$\varphi_d(p) = \varphi_p(d),$$

то, согласно только что доказанному, этот диффеоморфизм отображает множество $[f \leq a]$ на множество $[f \leq b]$. Следовательно, мы можем принять его за искомый диффеоморфизм Φ .

Далее, для любой точки $p \in [f \leq b]$ и любого числа $t \in I$ мы положим

$$r_t(p) = \begin{cases} p, & \text{если } p \in [f \leq a], \\ \varphi_p(t(a - f(p))), & \text{если } p \in [a \leq f \leq b]. \end{cases}$$

Легко видеть, что тем самым мы получим гомотопию

$$r_t: [f \leq b] \rightarrow [f \leq b],$$

для которой отображение r_0 является тождественным отображением пространства $[f \leq b]$, а отображение r_1 — ретрагирующим отображением этого пространства на подпространство $[f \leq a]$.

Наглядно гомотопию r_t можно описать как «сдвиг» множества $[f \leq b]$ на множество $[f \leq a]$ по «линиям тока» функции f .

Тем самым сформулированные выше утверждения полностью доказаны.

Рассмотрим теперь произвольное критическое значение c функции f . Пусть это критическое значение

1) *изолировано* в том смысле, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ отрезок $[c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0]$ не содержит никаких других критических значений функции f ;

2) *имеет компактный характер* в том смысле, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ множество $[c - \varepsilon_0 \leq f \leq c + \varepsilon_0]$ компактно (ясно, что в обоих условиях число ε_0 мы можем считать одним и тем же);

3) *невыврождено* в том смысле, что все критические точки $p_1, \dots, p_n$ функции f , расположенные на поверхности уровня $[f = c]$, невырождены. (В силу условия 2) число этих точек конечно.)

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что условие 1) вытекает из условий 2) и 3). Быть может, стоит также заметить, что из одного условия 3) оно, вообще говоря, не вытекает (даже если число критических точек функции f на поверхности уровня $[f = c]$ конечно).

Ясно, что точки $p_1, \dots, p_n$ обладают такими попарно непесекающимися координатными окрестностями $U_1, \dots, U_n$, что

а) для любого $i = 1, \dots, n$ локальные координаты на окрестности U_i являются ограничениями некоторых гладких на M (и не зависящих от i) функций $x^1, \dots, x^m$;

б) на каждой окрестности U_i , $i = 1, \dots, n$, координаты $x^1, \dots, x^m$ удовлетворяют условиям леммы Морса, т. е. в этой окрестности имеет место равенство

$$f = c - (x^1)^2 - \dots - (x^{h_i})^2 + (x^{h_i+1})^2 + \dots + (x^m)^2,$$

где h_i — индекс критической точки p_i ;

в) координатный гомеоморфизм окрестности U_i , $i = 1, \dots, n$, в пространство $\mathbb{R}^m$, соответствующий локальным координатам $x^1, \dots, x^m$, отображает окрестность U_i на открытый шар $|t|^2 < 2\varepsilon_0$, где ε_0 — положительное число, предусмотренное указанными выше условиями 1) и 2).

Для упрощения дальнейших выкладок нам удобно ввести на множестве

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_n$$

гладкие функции, определенные на U_i , $i = 1, \dots, n$, формулами

$$\begin{aligned} \alpha &= (x^1)^2 + \dots + (x^{h_i})^2, \\ \beta &= (x^{h_i+1})^2 + \dots + (x^m)^2. \end{aligned}$$

Согласно сказанному выше, функция f на множестве U выражается формулой

$$f = c - \alpha + \beta.$$

Пусть ε — произвольное положительное число, меньшее числа ε_0 . Это число мы будем в дальнейшем считать раз и навсегда фиксированным. Поскольку $\varepsilon < \varepsilon_0$, неравенство

$$\alpha + \beta \leq 2\varepsilon$$

определяет, очевидно, в каждой окрестности U_i подмножество, гомеоморфное замкнутому m -мерному шару.

Введем теперь в рассмотрение функцию g , определенную формулами:

$$g(p) = \begin{cases} f(p) - \mu(\alpha(p) + 2\beta(p)), & \text{если } p \in U, \\ f(p), & \text{если } p \notin U, \end{cases}$$

где μ — такая гладкая числовая функция, что

$$\begin{aligned} \mu(0) &> \varepsilon, \quad \mu(t) = 0, & \text{если } t \geq 2\varepsilon, \\ -1 &< \mu'(t) \leq 0 & \text{для всех } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Например, можно считать, что

$$\mu(t) = \begin{cases} \varepsilon \nu\left(\frac{2\varepsilon - t}{\varepsilon}\right), & \text{если } t \leq 2\varepsilon, \\ 0, & \text{если } t \geq 2\varepsilon, \end{cases}$$

где $\nu(t) = \frac{t}{2} \exp\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{t^2}\right)$. Ясно, что построенная таким образом функция g является гладкой на M функцией (ибо при $\alpha(p) + \beta(p) \geq 2\varepsilon$ необходимо $\alpha(p) + 2\beta(p) \geq 2\varepsilon$ и потому $\mu(\alpha(p) + 2\beta(p)) = 0$). Покажем, что

множество $[f \leq c + \varepsilon]$ совпадает с множеством $[g \leq c + \varepsilon]$.

Действительно, по определению имеем $g \leq f$. Поэтому $[f \leq c + \varepsilon] \subset [g \leq c + \varepsilon]$. Обратно, пусть $p \in [g \leq c + \varepsilon]$, т. е. пусть $g(p) \leq c + \varepsilon$. Если $\alpha(p) + 2\beta(p) \leq 2\varepsilon$, то

$$f(p) = c - \alpha(p) + \beta(p) \leq c + \frac{\alpha(p)}{2} + \beta(p) \leq c + \varepsilon,$$

т. е.

$$p \in [f \leq c + \varepsilon].$$

Если же $\alpha(p) + 2\beta(p) \geq 2\varepsilon$, то $f(p) = g(p)$ и потому снова $p \in [f \leq c + \varepsilon]$.

Далее, легко видеть, что

критические точки функции g совпадают с критическими точками функции f .

Действительно, поскольку $f = g$ вне множества U , для доказательства этого утверждения достаточно показать, что точки $p_1, \dots, p_n$ являются критическими точками функции g и что для любого $i = 1, \dots, n$ в U_i эта функция не имеет никаких других критических точек. Но в этой окрестности

$$\begin{aligned} dg &= df - \mu'(\alpha + 2\beta)(d\alpha + 2d\beta) = \\ &= (-1 - \mu'(\alpha + 2\beta))d\alpha + (1 - 2\mu'(\alpha + 2\beta))d\beta = \\ &= 2(-1 - \mu'(\alpha + 2\beta))(x^1 dx^1 + \dots + x^{h_i} dx^{h_i}) + \\ &\quad + 2(1 - 2\mu'(\alpha + 2\beta))(x^{h_i+1} dx^{h_i+1} + \dots + x^m dx^m), \end{aligned}$$

причем в силу условий, наложенных выше на функцию μ , выражения $-1 - \mu'(\alpha + 2\beta)$ и $1 - 2\mu'(\alpha + 2\beta)$ всюду отличны от нуля. Поэтому точка $p \in U_i$ тогда и только тогда является критической точкой функции g , когда $x^1(p) = \dots = x^m(p) = 0$, т. е. когда $p = p_i$.

Рассмотрим теперь множество $[c - \varepsilon \leq g \leq c + \varepsilon]$. Так как $[f \leq c + \varepsilon] = [g \leq c + \varepsilon]$ и $g \leq f$, то

$$[c - \varepsilon \leq g \leq c + \varepsilon] \subset [c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon].$$

Поэтому множество $[c - \varepsilon \leq g \leq c + \varepsilon]$ компактно. Кроме того, поскольку $g(p_i) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$, это множество не содержит точек $p_1, \dots, p_n$ и, следовательно, вообще не содержит ни одной критической точки функции f , а значит, и функции g . Поэтому, согласно доказанному выше,

множество $[g \leq c - \varepsilon]$ является деформационным ретрактом множества $[g \leq c + \varepsilon] = [f \leq c + \varepsilon]$.

Замечание. По аналогичным соображениям множество $[g \leq c]$ также является деформационным ретрактом множества $[f \leq c + \varepsilon]$.

Это верно и в том случае, когда условия 1) и 2) выполнены лишь «сверху», т. е. если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что отрезок $[c, c + \varepsilon_0]$ не содержит отличных от c критических значений функции f , а множество $[c \leq f \leq c + \varepsilon_0]$ компактно.

Пусть Q — множество точек $p \in U$, для которых

$$\alpha(p) < \varepsilon, \quad \beta(p) = 0.$$

Ясно, что для любого $i = 1, \dots, n$ пересечение $Q \cap U_i$ гомеоморфно единичному открытому шару E^{h_i} пространства R^{h_i} . Его замыкание $\overline{Q \cap U_i}$ состоит из точек $p \in U_i$, для которых

$$\alpha(p) \leq \varepsilon, \quad \beta(p) = 0,$$

и потому гомеоморфно замкнутому шару E^{h_i} . Итак, множество Q является объединением n непересекающихся клеток

$$e^{h_1} = Q \cap U_1, \dots, e^{h_n} = Q \cap U_n$$

размерностей $h_1, \dots, h_n$ соответственно. Для любого $i = 1, \dots, n$ граница $\dot{e}^{h_i}$ клетки e^{h_i} состоит из точек $p \in U_i$, для которых

$$\alpha(p) = \varepsilon, \quad \beta(p) = 0,$$

и потому совпадает с пересечением $[f \leq c - \varepsilon] \cap \dot{e}^{h_i}$. Это означает, что

множество $[f \leq c - \varepsilon] \cup Q$ можно рассматривать как результат приклеивания к множеству $[f \leq c - \varepsilon]$ n замкнутых шаров размерностей $h_1, \dots, h_n$ (посредством некоторых непрерывных отображений их границ в множество $[f \leq c - \varepsilon]$).

Так как $\beta = 0$ на Q , то

$$g = c - \alpha - \mu(\alpha) \text{ на } Q,$$

причем $0 \leq \alpha < \varepsilon$. С другой стороны,

$$\alpha + \mu(\alpha) = \mu(0) + \int_0^\alpha (1 + \mu'(t)) dt > \mu(0) > \varepsilon,$$

ибо, по условию, $1 + \mu'(t) > 0$. Следовательно,

$$g \leq c - \varepsilon \text{ на } Q,$$

т. е. $Q \subset [g \leq c - \varepsilon]$. Поэтому

$$[f \leq c - \varepsilon] \cup Q \subset [g \leq c - \varepsilon].$$

Покажем теперь, что

множество $[f \leq c - \varepsilon] \cup Q$ является деформационным ретрактом множества $[g \leq c - \varepsilon]$.

С этой целью мы рассмотрим пересечение F множества $[g \leq c - \varepsilon]$ с множеством $\alpha + \beta \leq 2\varepsilon$ (являющимся, как мы знаем, объединением n непересекающихся замкнутых m -мерных шаров). Это пересечение содержится в множестве U и определяется неравенствами

$$\alpha + \beta \leq 2\varepsilon, \quad \alpha - \beta + \mu(\alpha + 2\beta) \geq \varepsilon.$$

Мы можем множество F представить в виде объединения трех множеств F_1 , F_2 и F_3 , первое из которых определяется неравенствами

$$\alpha \leq \varepsilon,$$

$$\alpha - \beta + \mu(\alpha + 2\beta) \geq \varepsilon,$$

второе — неравенствами

$$\varepsilon \leq \alpha \leq \beta + \varepsilon,$$

$$\alpha - \beta + \mu(\alpha + 2\beta) \geq \varepsilon,$$

и третье — неравенствами

$$\beta + \varepsilon \leq \alpha, \quad \alpha + \beta \leq 2\varepsilon$$

(см. рис. 8).

Пусть $0 \leq t \leq 1$. Каждой точке $p \in F$ мы отнесем точку $q = r_t(p) \in U$, расположенную в той же окрестности U_i , что и точка p , координаты $x^1(q), \dots, x^m(q)$ которой связаны с координатами $x^1(p), \dots, x^m(p)$ точки p соотношениями:

$$x^1(q) = x^1(p),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^h(q) = x^h(p),$$

$$x^{h+1}(q) = s_t x^{h+1}(p),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^m(q) = s_t x^m(p),$$

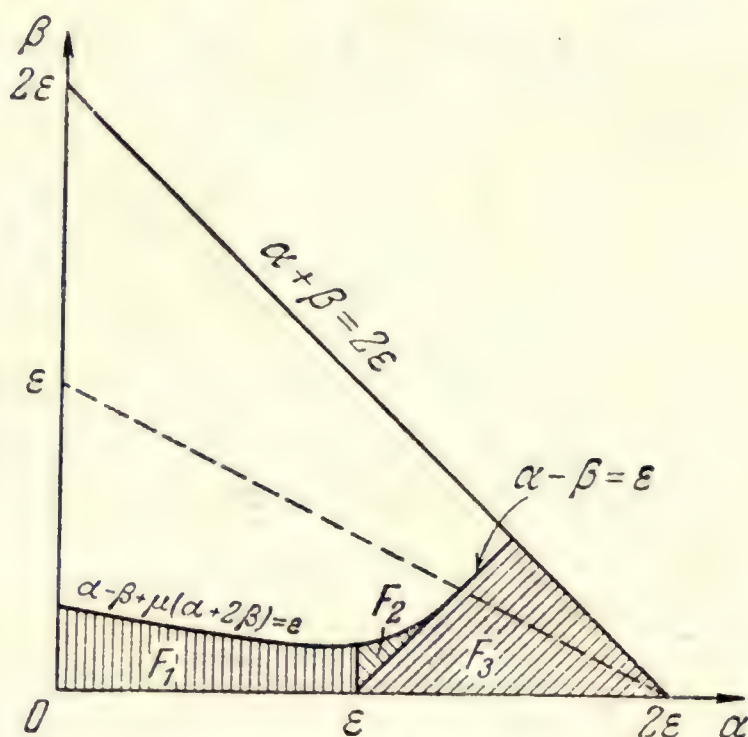


Рис. 8.

где

$$s_t = \begin{cases} 1 - t, & \text{если } p \in F_1, \\ 1 - t + t \sqrt{\frac{\alpha(p) - \varepsilon}{\beta(p)}}, & \text{если } p \in F_2, \\ 1, & \text{если } p \in F_3. \end{cases}$$

Как легко видеть, несмотря на то, что при $\alpha = \varepsilon$ и $\beta = 0$ функция s_t терпит разрыв, точка $r_t(p)$ непрерывно зависит от t и p , т. е. семейство отображений

$$r_t: F \rightarrow U$$

является гомотопией.

Поскольку для любой точки $p \in F$ имеют место равенства

$$\alpha(r_t(p)) = \alpha(p), \quad \beta(r_t(p)) = s_t^2 \beta(p),$$

то

$$\begin{aligned} \alpha(r_t(p)) + \beta(r_t(p)) &= \alpha(p) + s_t^2 \beta(p) \leq \alpha(p) + \beta(p) \leq 2\varepsilon, \\ \alpha(r_t(p)) - \beta(r_t(p)) + \mu(\alpha(r_t(p)) + 2\beta(r_t(p))) &= \\ &= \alpha(p) - s_t^2 \beta(p) + \mu(\alpha(p) + 2s_t^2 \beta(p)) \geq \\ &\geq \alpha(p) - \beta(p) + \mu(\alpha(p) + 2\beta(p)) \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

ибо $0 \leq s_t^2 \leq 1$. Таким образом, $r_t(p) \in F$ для любого $t \in I$, т. е., иными словами, семейство r_t представляет собой гомотопию отображений множества F в себя. Поскольку $r_t(p) = p$ при $\alpha(p) + \beta(p) = 2\varepsilon$, мы можем дополнить эту гомотопию до гомотопии

$$r_t: [g \leq c - \varepsilon] \rightarrow [g \leq c - \varepsilon],$$

считая, что $r_t(p) = p$ при $p \notin F$.

Ясно, что при $t = 0$ отображение r_t представляет собой тождественное отображение множества $[g \leq c - \varepsilon]$, т. е. гомотопия r_t является деформацией множества $[g \leq c - \varepsilon]$. Рассмотрим отображение r_1 .

Пусть $p \in F$. Если $p \in F_1$, то $s_1 = 0$, и потому $\beta(r_1(p)) = 0$. Так как, кроме того, $\alpha(r_1(p)) = \alpha(p) \leq \varepsilon$, то, следовательно, $r_1(p) \in Q$. Если $p \in F_2$, то $s_1^2 = \frac{\alpha(p) - \varepsilon}{\beta(p)}$ и потому $\beta(r_1(p)) = \alpha(p) - \varepsilon$, т. е. $f(r_1(p)) = c - \alpha(r_1(p)) + \beta(r_1(p)) = c - \varepsilon$. Наконец, если $p \in F_3$, то $s_1 = 1$ и потому $f(r_1(p)) = c - \alpha(p) + \beta(p) < c - \varepsilon$. Таким образом, для любой точки

$p \in F$ имеет место включение $r_1(p) \in [f \leq c - \varepsilon] \cup Q$. Поскольку вне множества F множества $[g \leq c - \varepsilon]$ и $[f \leq c - \varepsilon]$ совпадают, это включение остается в силе и при $p \notin F$. При этом, если $p \in [f \leq c - \varepsilon] \cup Q$, т. е. если либо $f(p) \leq c - \varepsilon$, либо $\alpha(p) \leq \varepsilon$ и $\beta(p) = 0$, то, как легко видеть, $r_1(p) = p$. Следовательно, отображение r_1 представляет собой ретракцию множества $[g \leq c - \varepsilon]$ на множество $[f \leq c - \varepsilon] \cup Q$. Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

З а м е ч а н и е. Аналогично можно доказать, что множество $[f \leq c]$ является деформационным ретрактом множества $[g \leq c]$.

Действительно, достаточно в изложенном выше доказательстве положить $\varepsilon = 0$. При этом множество F_1 можно будет не рассматривать (ибо оно будет состоять лишь из одной точки). Множество F_2 будет определяться неравенствами

$$\alpha \leq \beta, \quad \alpha - \beta + \mu(\alpha + 2\beta) \geq 0,$$

множество F_3 — неравенствами

$$\beta \leq \alpha, \quad \alpha - \beta + \mu(\alpha + 2\beta) \geq 0,$$

а числа s_t — формулой

$$s_t = \begin{cases} 1 - t + t \sqrt{\frac{\alpha(p)}{\beta(p)}}, & \text{если } p \in F_2, \\ 1, & \text{если } p \in F_3. \end{cases}$$

Сопоставив доказанные выше утверждения, мы немедленно получим, что

в предположениях 1), 2) и 3) множество $[f \leq c + \varepsilon]$ содержит подмножество $[f \leq c - \varepsilon] \cup Q$, получающееся из множества $[f \leq c - \varepsilon]$ приклеиванием n шаров размерностей $h_1, \dots, h_n$ (посредством некоторых отображений их границ) и являющееся деформационным ретрактом множества $[f \leq c + \varepsilon]$.

В частности,

в предположениях 1), 2) и 3) множество $[f \leq c + \varepsilon]$ гомотопически эквивалентно множеству $[f \leq c - \varepsilon]$, к которому приклеено n шаров размерностей $h_1, \dots, h_n$ соответственно.

Это утверждение впервые было доказано Морсом и известно как теорема Морса.

З а м е ч а н и е. Сопоставляя сделанные выше замечания, мы аналогично получим, что

в предположениях 1), 2) и 3) множество $[f \leq c]$ является деформационным ретрактом множества $[f \leq c + \varepsilon]$.

При этом, в соответствии со сказанным выше, можно считать, что условия 1) и 2) выполнены лишь сверху.

В силу теоремы Морса отсюда непосредственно следует, что

в предположениях 1), 2) и 3) множество $[f \leq c]$ гомотопически эквивалентно множеству $[f \leq c - \varepsilon] \cup Q$.

Действительно, по доказанному выше, множество $[f \leq c]$ гомотопически эквивалентно множеству $[f \leq c + \varepsilon]$, которое в свою очередь гомотопически эквивалентно множеству $[f \leq c - \varepsilon] \cup Q$.

4. Гладкие многообразия и клеточные разбиения

Из результатов предыдущего пункта вытекает, что если гладкая функция f на сепарабельном гладком многообразии M и число $a \in \mathbf{R}$ обладают тем свойством, что

1) при некотором $\varepsilon > 0$ множество $[f \leq a + \varepsilon]$ компактно;

2) множество $[a < f \leq a + \varepsilon]$ не содержит критических точек функции f ;

3) все критические точки функции f , принадлежащие множеству $[f \leq a]$ невырождены, то множество $[f \leq a]$ гомотопически эквивалентно некоторому клеточному разбиению K , клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с принадлежащими множеству $[f \leq a]$ критическими точками функции f , причем размерность каждой клетки равна индексу соответствующей критической точки.

Действительно, ясно, что функция f имеет лишь конечное число критических значений, не превосходящих данного числа a , причем все эти критические значения

$$c_0 < c_1 < \dots < c_n$$

изолированы, невырождены и имеют компактный характер

(см. п. 3 гл. 6). Поэтому, согласно теореме Морса, существуют такие числа

$$\varepsilon_0 > 0, \quad \varepsilon_1 > 0, \dots, \quad \varepsilon_n > 0,$$

что для любого $i = 0, 1, \dots, n$ множество $[f \leq c_i + \varepsilon_i]$ гомотопически эквивалентно множеству $[f \leq c_i - \varepsilon_i]$, к которому приклеено некоторое число замкнутых шаров. При этом, без ограничения общности, мы можем, очевидно, считать, что для любого $i = 0, 1, \dots, n - 1$ имеет место неравенство

$$c_i + \varepsilon_i < c_{i+1} - \varepsilon_{i+1},$$

а при $i = n$ — неравенство

$$c_n + \varepsilon_n < a + \varepsilon_0.$$

Тогда, в силу доказанного в предыдущем пункте, множество $[f \leq c_i + \varepsilon_i]$ при $i = 0, 1, \dots, n - 1$ будет деформационным ретрактом множества $[f \leq c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}]$, а множество $[f \leq c_n + \varepsilon_n]$ будет гомотопически эквивалентно множеству $[f \leq a]$.

Покажем теперь, что

существует такая возрастающая последовательность

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$$

конечных клеточных разбиений K_i , $i = 0, 1, \dots, n$, каждое из которых является подразбиением следующего разбиения, и такие гомотопические эквивалентности

$$\varphi_i : [f \leq c_i + \varepsilon_i] \rightarrow K_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

что для любого $i = 0, 1, \dots, n - 1$ эквивалентность φ_i является ограничением эквивалентности φ_{i+1} :

$$\varphi_i = \varphi_{i+1} \mid [f \leq c_i + \varepsilon_i].$$

С этой целью мы заметим, что, поскольку число c_0 является, очевидно, минимумом функции f , множество $[f \leq c_0 - \varepsilon_0]$ пусто. Поэтому множество $[f \leq c_0 + \varepsilon_0]$ гомотопически эквивалентно топологической сумме K_0 некоторого (конечного) числа замкнутых шаров. Пусть

$$\varphi_0 : [f \leq c_0 + \varepsilon_0] \rightarrow K_0$$

— соответствующая гомотопическая эквивалентность.

Рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого $i = 1, \dots, n$ уже построены разбиение K_{i-1} и гомотопическая

эквивалентность

$$\varphi_{i-1}: [f \leq c_{i-1} + \varepsilon_{i-1}] \rightarrow K_{i-1}.$$

Поскольку, согласно сказанному выше, множество $[f \leq c_{i-1} + \varepsilon_{i-1}]$ является деформационным ретрактом множества $[f \leq c_i - \varepsilon_i]$, эквивалентность φ_{i-1} мы можем распространить до некоторой гомотопической эквивалентности

$$\psi_i: [f \leq c_i - \varepsilon_i] \rightarrow K_{i-1}.$$

С другой стороны, согласно теореме Морса, множество $[f \leq c_i + \varepsilon_i]$ содержит подмножество вида $[f \leq c_i - \varepsilon_i] \cup Q$, где Q — топологическая сумма некоторого числа замкнутых шаров, являющееся его деформационным ретрактом. Пусть

$$r_i: [f \leq c_i + \varepsilon_i] \rightarrow [f \leq c_i - \varepsilon_i] \cup Q$$

— соответствующее ретрагирующее отображение.

Рассмотрим объединение $\dot{Q}$ граничных сфер всех шаров, суммой которых является множество Q . Пусть

$$\dot{\psi}_i: \dot{Q} \rightarrow K_{i-1}$$

— ограничение отображения ψ_i на подпространстве $\dot{Q} \subset [f \leq c_i - \varepsilon_i]$. Согласно результатам п. 3 гл. 2 гомотопическую эквивалентность ψ_i мы можем распространить до некоторой гомотопической эквивалентности

$$\bar{\psi}_i: [f \leq c_i - \varepsilon_i] \cup Q \rightarrow K_{i-1} \cup \dot{\psi}_i Q.$$

С другой стороны, согласно результатам п. 4 гл. 3, пространство $K_{i-1} \cup \dot{\psi}_i Q$ гомотопически эквивалентно некоторому клеточному разбиению K_i , содержащему разбиение K_{i-1} в качестве подразбиения. При этом гомотопическую эквивалентность

$$\omega_i: K_{i-1} \cup \dot{\psi}_i Q \rightarrow K_i$$

мы можем выбрать таким образом, чтобы на подразбиении K_{i-1} она была бы тождественным отображением.

Мы положим

$$\varphi_i = \omega_i \circ \bar{\psi}_i \circ r_i: [f \leq c_i + \varepsilon_i] \rightarrow K_i.$$

Ясно, что это отображение является гомотопической эквивалентностью, совпадающей на подразбиении K_{i-1} с эквивалентностью φ_{i-1} .

Тем самым существование разбиений K_i и эквивалентностей φ_i доказано для всех $j = 0, 1, \dots, n$ и, в частности, при $i = n$.

Для доказательства предложения, сформулированного в начале этого пункта, остается положить $K = K_n$.

Из доказанного предложения легко вытекает, что

каждая ограниченная снизу гладкая функция f компактного характера на гладком сепарабельном многообразии M , имеющая лишь невырожденные критические точки, определяет гомотопическую эквивалентность многообразия M с некоторым клеточным разбиением K , клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками функции f , причем размерность каждой клетки равна индексу соответствующей критической точки.

Действительно, ясно, что каждое число $a \in \mathbb{R}$ удовлетворяет (вместе с функцией f) условиям предыдущего предложения. Поэтому для любого $n \geq 0$ существует некоторая гомотопическая эквивалентность

$$\varphi_n: [f \leq n] \rightarrow K_n,$$

где K_n — конечное клеточное разбиение, клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с принадлежащими множеству $[f \leq n]$ критическими точками функции f . При этом ясно, что разбиения K_n можно выбрать так, чтобы

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \dots$$

и чтобы для любого $n \geq 0$ разбиение K_n являлось подразбиением разбиения K_{n+1} , а гомотопическая эквивалентность φ_n совпадала бы с ограничением $\varphi_{n+1}|_{K_n}$ гомотопической эквивалентности φ_{n+1} на разбиении K_n .

Пусть K — свободное объединение разбиений K_n , $n \geq 0$. Согласно результатам п. 2 гл. 3 это объединение является клеточным разбиением, содержащим разбиения K_n в качестве подразбиений. Определим отображение

$$\varphi: M \rightarrow K,$$

считая, что

$$\varphi|_{[f \leq n]} = \varphi_n$$

для любого $n \geq 0$. Ясно, что это отображение однозначно определено и непрерывно.

Поскольку многообразие M паракомпактно и является объединением внутренностей $[f < n]$ множеств $[f \leq n]$, оно представляет собой гомотопический предел множеств $[f \leq n]$. Разбиение K также является гомотопическим пределом разбиений K_i . Поскольку для любого $n \geq 0$ отображение

$$\varphi_n: [f \leq n] \rightarrow K_n$$

является, по построению, гомотопической эквивалентностью, отсюда в силу результатов п. 5 гл. 2 следует, что отображение φ также является гомотопической эквивалентностью.

Поскольку, согласно п. 2, удовлетворяющая условиям этого предложения функция f существует на любом сепарабельном гладком многообразии, мы, в частности, получаем отсюда, что

каждое сепарабельное гладкое многообразие гомотопически эквивалентно некоторому счетному клеточному разбиению.

В случае, когда на рассматриваемом многообразии M функция f задана более или менее обзримым способом, из доказанного предложения можно получить довольно полную информацию о гомотопическом типе многообразия.

Пример. Пусть $\mathbb{C}^{n+1}$ — комплексное арифметическое $n+1$ -мерное пространство, точками которого являются $n+1$ -членные последовательности $(z^0, z^1, \dots, z^n)$ комплексных чисел. Рассмотрим единичную сферу S^{2n+1} этого пространства, т. е. множество всех точек $(z^0, z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, для которых

$$|z^0|^2 + |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 = 1.$$

На этой сфере мы определим отношение эквивалентности, считая две точки $(z^0, z^1, \dots, z^n)$ и $(\tilde{z}^0, \tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^n)$ тогда и только тогда эквивалентными, когда существует такое комплексное число $\lambda \neq 0$ (модуль которого необходимо равен единице), что

$$\tilde{z}^i = \lambda z^i$$

для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Соответствующее фактор-пространство сферы S^{2n+1} называется *комплексным проективным пространством комплексной размерности n* . Мы будем обозначать его символом $\mathbb{C}P^n$. Точку этого пространства, содержащую точку $(z^0, z^1, \dots, z^n) \in S^{2n+1}$, мы будем обозначать символом $(z^0 : z^1 : \dots : z^n)$. Ясно, что пространство $\mathbb{C}P^n$ является компактным хаусдорфовым пространством.

Пусть U_i , $i = 0, 1, \dots, n$, — совокупность всех точек $(z^0 : z^1 : \dots : z^n) \in \mathbb{C}P^n$, для которых $z^i \neq 0$. (Ясно, что это условие инвариантно, т. е. не зависит от выбора представителя $(z^0, z^1, \dots, z^n) \in S^{2n+1}$ точки $(z^0 : z^1 : \dots : z^n)$.) Каждая точка $(z^0 : z^1 : \dots : z^n) \in U_i$ имеет одного и только одного представителя $(z^0, z^1, \dots, z^n) \in S^{2n+1}$, для которого $z^i = 1$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками множества U_i и точками пространства $\mathbb{C}^n$. Без труда проверяется, что это соответствие представляет собой гомеоморфизм. Поскольку пространство $\mathbb{C}^n$ естественно гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^{2n}$ (соответствующий гомеоморфизм переводит каждую точку $(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n$ в точку $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n) \in \mathbb{R}^{2n}$, где x^i — действительная, а y^i — мнимая части комплексного числа z^i , $i = 1, \dots, n$), тем самым определен некоторый гомеоморфизм

$$\xi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Например, гомеоморфизм $\xi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ переводит точку $(z^0 : z^1 : \dots : z^n) \in U_0$ в точку $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n) \in \mathbb{R}^{2n}$, для которой

$$x^1 + iy^1 = \frac{z^1}{z^0}, \dots, x^n + iy^n = \frac{z^n}{z^0}.$$

Пусть

$$\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

— естественная проекция (сопоставляющая точке $(z^0, z^1, \dots, z^n) \in S^{2n+1}$ точку $(z^0 : z^1 : \dots : z^n) \in \mathbb{C}P^n$). Функцию f на пространстве $\mathbb{C}P^n$ мы будем называть *гладкой*, если функция $f \circ \pi$ является на сфере S^{2n+1} гладкой функцией. Легко проверяется, что совокупность $\mathcal{O}(\mathbb{C}P^n)$ всех гладких в этом смысле функций является гладкостью на пространстве $\mathbb{C}P^n$ и что снабженное этой гладкостью пространство $\mathbb{C}P^n$ представляет собой гладкое $2n$ -мерное многообразие. (Построенные выше гомеоморфизмы ξ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, являются относительно этой гладкости диффеоморфизмами и потому их можно принять за координатные диффеоморфизмы.)

Рассмотрим на многообразии $\mathbb{C}P^n$ функцию f , определенную формулой

$$f(z^0 : z^1 : \dots : z^n) = c_0 |z^0|^2 + c_1 |z^1|^2 + \dots + c_n |z^n|^2,$$

где $c_0, c_1, \dots, c_n$ — некоторые попарно различные вещественные числа. Ясно, что эта функция однозначно определена и является гладкой на многообразии CP^n функцией.

На координатной окрестности U_0 эта функция выражается через построенные выше локальные координаты

$$x^1, y^1, \dots, x^n, y^n$$

согласно формуле

$$f(z^0 : z^1 : \dots : z^n) = c_0 + (c_1 - c_0)((x^1)^2 + (y^1)^2) + \dots \\ \dots + (c_n - c_0)((x^n)^2 + (y^n)^2).$$

Следовательно, в окрестности U_0 функция f имеет одну и только одну критическую точку

$$p_0 = (1 : 0 : \dots : 0).$$

Эта точка невырождена, и ее индекс равен удвоенному числу коэффициентов c_i , обладающих тем свойством, что $c_i < c_0$.

Аналогично в координатной окрестности U_j , $j = 1, \dots, n$, функция f обладает одной и только одной критической точкой

$$p_j = (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0), \quad j = 1, \dots, n,$$

Эта точка невырождена, и ее индекс равен удвоенному числу коэффициентов c_i , обладающих тем свойством, что $c_i < c_j$.

Таким образом, функция f обладает $n + 1$ критическими точками, которые все невырождены. При этом среди индексов этих точек встречается (точно по одному разу) каждое четное число от 0 до $2n$.

В силу сделанного выше замечания, тем самым доказано, что

многообразие CP^n гомотопически эквивалентно некоторому клеточному разбиению, содержащему $n + 1$ клеток

$$e^0, e^2, \dots, e^{2n}$$

размерностей $0, 2, \dots, 2n$ соответственно.

З а м е ч а н и е. Более внимательное изучение строения многообразия CP^n показывает, что оно не только гомотопически эквивалентно, но даже гомеоморфно указанному клеточному разбиению. Вообще, в порядке уточнения доказанного в этом пункте общего предложения можно показать, что

любое гладкое сепарабельное многообразие является телом некоторого счетного клеточного разбиения.

Однако до тех пор, пока мы интересуемся лишь гомотопическими свойствами многообразий, это уточнение нам бесполезно. По этой причине, а также потому, что его доказательство в достаточной мере трудно, мы на нем останавливаться не будем.

5. Теорема Ботта

Во всем предыдущем существенную роль играло предположение о невырожденности рассматриваемых критических точек функции f . В этом пункте мы покажем, что в несколько ослабленной форме (вполне достаточной для большинства приложений) основной результат п. 3 остается в силе и в предположении, что критические точки функции f лишь слабо невырождены. Именно, мы покажем, что

если критическое значение c функции f изолировано, имеет компактный характер и обладает тем свойством, что все критические точки функции f , расположенные на поверхности уровня $[f=c]$, слабо невырождены, то для некоторого $\varepsilon > 0$ множество $[f \leq c + \varepsilon]$ содержит подмножество вида $[f \leq c - \varepsilon] \cup Q$, где Q — топологическая сумма конечного числа замкнутых шаров, являющееся его деформационным ретрактом; при этом размерность шаров, из которых состоит множество Q , не меньше наименьшего из индексов критических точек $p \in [f=c]$.

Ясно, что для доказательства этого утверждения (впервые доказанного Боттом) достаточно доказать, что

на многообразии M существует такая гладкая функция g , что

1) для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место равенства

$$[g \leq c - \varepsilon] = [f \leq c - \varepsilon], \quad [g \leq c + \varepsilon] = [f \leq c + \varepsilon];$$

2) множество

$$[c - \varepsilon \leq g \leq c + \varepsilon] = [c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon]$$

компактно и содержит только невырожденные критические точки функции g ;

3) *все эти критические точки расположены на поверхности уровня $[f=c]$ и индекс каждой из них не меньше наименьшего из индексов критических точек $p \in [f=c]$ функции f .*

Условие слабой невырожденности критических точек $p \in [f=c]$ функции f означает, что каждая из этих критических точек принадлежит некоторому невырожденному критическому многообразию. Ввиду компактности множества $[f=c]$ каждое из этих многообразий компактно и число их конечно. Пусть

$$N_1, \dots, N_s$$

— все невырожденные критические многообразия функции f , расположенные на поверхности уровня $[f=c]$, и пусть

$$h_1, \dots, h_s$$

— их индексы. Мы положим

$$h = \min(h_1, \dots, h_s).$$

Согласно теореме вложения Уитни (см. пп. 6 и 7 гл. 5) мы, без ограничения общности, можем считать, что многообразие M , а потому и многообразие

$$N = N_1 \cup \dots \cup N_s$$

являются замкнутыми подмногообразиями некоторого евклидова пространства R^t .

По условию, для функции f существует такое число $\varepsilon > 0$, что множество $[c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon]$ компактно и не содержит никаких критических точек этой функции, отличных от точек многообразия N . Пусть W — произвольная трубчатая окрестность многообразия N в пространстве R^t , обладающая тем свойством, что

$$W \cap M \subset \left[c - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq c + \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Пусть, кроме того, W_1 и W_2 — такие (необходимо трубчатые) окрестности многообразия N в пространстве R^t с компактными замыканиями $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$, что $\overline{W}_1 \subset W_2$ и $\overline{W}_2 \subset W$.

Согласно определению невырожденных критических многообразий, многообразие N обладает в многообразии M окрестностью U , ни одна точка которой, отличная от точек многообразия N , не является критической точкой функции f . Рассмотрим множество

$$V = U \cap W_1 \cap M.$$

Это множество

- 1) содержит подмногообразие N ;
- 2) открыто в многообразии M ;
- 3) содержится в компактном множестве $\left[c - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq c + \frac{\varepsilon}{2} \right]$;
- 4) является объединением множеств

$${}_p V = U \cap {}_p W_1 \cap M, \quad p \in N,$$

где ${}_p W_1$ — слои трубчатой окрестности W_1 .

Множества ${}_p V$ мы будем называть *слоями* окрестности V . Ясно, что каждый слой ${}_p V$ является подмногообразием многообразия M , дополнительным к подмногообразию N в точке p .

По построению, для каждой точки $q \in V \setminus N$ дифференциал df_q функции f отличен от нуля. Более того, легко видеть, что (уменьшив в случае необходимости окрестность U) мы, без ограничения общности, можем считать, что этот дифференциал отличен от нуля уже на подпространстве $({}_p V)_q$ пространства M_q , где ${}_p V$ — слой окрестности V , содержащий точку q .

Предполагая, что многообразие M определено как риманово пространство, рассмотрим градиент $\text{grad } f$ функции f . По условию, этот градиент в каждой точке множества $[c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon] \setminus V$ отличен от нуля. Следовательно, поскольку множество $[c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon] \setminus V$ компактно, существует такое число $K > 0$, что

$$|\text{grad } f| \geq K \quad \text{на } [c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon] \setminus V.$$

Согласно теореме, доказанной в п. 3, на многообразии N существует гладкая функция $\bar{\varphi}$, имеющая лишь невырожденные критические точки. Мы распространим эту функцию на окрестность W , считая, что на каждом слое этой окрестности функция $\bar{\varphi}$ постоянна. Так как множество $\bar{W}_1$ компактно и содержится в окрестности $W_2 \subset W$, то на пространстве R^t существует гладкая функция $\bar{\bar{\varphi}}$, совпадающая с функцией $\bar{\varphi}$ на окрестности W_1 и равная нулю вне окрестности W_2 .

Ограничение

$$\varphi = \bar{\bar{\varphi}}|_M$$

функции $\bar{\varphi}$ на многообразии M является гладкой на M функцией, обладающей следующими свойствами:

а) функция $\varphi|_N$ имеет (на N) лишь невырожденные критические точки;

б) на каждом слое ${}_pV$, $p \in N$, окрестности V функция φ постоянна;

в) носитель $[\varphi \neq 0]$ функции φ компактен и содержится в множестве $\left[c - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq c + \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

Из свойства б) непосредственно вытекает, далее, что

г) в любой точке $q \in {}_pV$ дифференциал $d\varphi_q$ функции φ равен нулю на подпространстве $({}_pV)_q$ пространства M_q ;

д) точка $p \in N$ тогда и только тогда является критической точкой функции φ , когда эта точка является критической точкой функции $\varphi|_N$ (на многообразии N).

При этом ввиду свойства а)

е) для любой критической точки $p \in N$ функции φ максимальное подпространство пространства M_p , на котором гессиан $H_p\varphi$ равен тождественно нулю, совпадает с пространством $({}_pV)_p$, касательным к слою ${}_pV$ в точке p .

Наконец, поскольку ввиду свойства в) функция φ на многообразии M ограничена, мы, не теряя общности, можем считать (умножив, если это необходимо, функцию φ на некоторое постоянное число), что

ж) для любой точки $p \in M$ имеет место неравенство

$$|\varphi(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того, по аналогичным соображениям мы можем считать, что

з) на всем многообразии M имеет место неравенство

$$|\operatorname{grad} \varphi| \leq \frac{K}{2}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g = f + \varphi.$$

Пусть p — такая точка многообразия M , что

$$g(p) \leq c + \varepsilon.$$

Если $p \notin \left[c - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq c + \frac{\varepsilon}{2}\right]$, то $g(p) = f(p)$ и потому

$$f(p) \leq c + \varepsilon.$$

Если же $c - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(p) \leq c + \frac{\varepsilon}{2}$, то тем более

$$f(p) \leq c + \varepsilon.$$

Обратно, пусть

$$f(p) \leq c + \varepsilon.$$

Если $c - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(p) \leq c + \frac{\varepsilon}{2}$, то ввиду свойства ж)

$$g(p) \leq c + \varepsilon.$$

Если же $p \notin \left[c - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq c + \frac{\varepsilon}{2} \right]$, то ввиду свойства в) $\varphi(p) = 0$ и потому снова

$$g(p) \leq c + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$[g \leq c + \varepsilon] = [f \leq c + \varepsilon].$$

Аналогично доказывается, что

$$[c - \varepsilon \leq g] = [c - \varepsilon \leq f].$$

По построению, для любой точки $q \in V \setminus N$ дифференциал df_q функции df отличен от нуля на подпространстве $({}_pV)_q$ пространства M_q , где ${}_pV$ — слой окрестности V , содержащий точку q . В силу свойства г) отсюда непосредственно следует, что дифференциал dg_q функции g также отличен от нуля на подпространстве $({}_pV)_q$. Поэтому он отличен от нуля и на всем пространстве M_q . Таким образом, ни одна точка $q \in V \setminus N$ не является критической точкой функции g .

Аналогично в силу неравенства з) ни одна точка $q \in [c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon] \setminus V$ также не является критической точкой функции g . Следовательно, все критические точки функции g , принадлежащие множеству $[c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon]$, расположены на многообразии $N \subset [f = c]$.

С другой стороны, так как $df_p = 0$ для любой точки $p \in N$, то эта точка тогда и только тогда является критической точкой функции g , когда она является критической точкой функции φ . При этом в любой такой точке имеет место равенство

$$H_p g = H_p f + H_p \varphi.$$

Поскольку максимальные подпространства N_p и $({}_pV_p)$ пространства M_p , на которых квадратичные формы $H_p f$ и

$H_p \varphi$ тождественно равны нулю, являются взаимно дополнительными подпространствами пространства M_p , отсюда непосредственно следует, что квадратичная форма $H_p g$ невырождена и что ее индекс равен сумме индексов $h_f(p)$ и $h_\varphi(p)$ форм $H_p f$ и $H_p \varphi$ и потому не меньше числа $h \leq h_f(p)$.

Тем самым доказано, что функция g удовлетворяет всем перечисленным выше условиям.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема допускает уточнение, полностью аналогичное теореме Морса и переходящее в эту теорему, когда критическое значение c невырождено. Однако на практике это уточнение, по существу, бесполезно. Поэтому излагать его здесь мы не будем.

К задаче описания гомотопического типа гладких многообразий теорема Ботта применяется точно так же, как и теорема Морса (см. п. 4). Например, мы сразу же получаем из нее, что

каждая ограниченная снизу гладкая функция f компактного характера на гладком сепарабельном многообразии M , имеющая лишь слабо невырожденные критические точки, определяет гомотопическую эквивалентность многообразия M с некоторым пространством, получающимся из множества N всех точек минимума функции f (являющегося, по условию, подмногообразием, — вообще говоря, не связным, — многообразия M) последовательным приклеиванием некоторого счетного числа замкнутых шаров, размерности которых не меньше наименьшего из индексов критических точек функции f , не являющихся точками минимума.

НЕРАВЕНСТВА МОРСА

Строго говоря, основная теорема п. 3 лишь в неявном виде содержалась в исследованиях Морса. На самом деле Морс описывал соотношения между топологией гладкого многообразия M и критическими точками гладкой на M функции f посредством так называемых неравенств Морса. Хотя эти неравенства несут в себе значительно меньше информации, чем теорема п. 3, мы все же изложим их здесь, поскольку довольно часто достаточно пользоваться только этими неравенствами, не обращаясь к более сложной теореме п. 3. К тому же эти неравенства имеют определенный исторический интерес.

В неравенствах Морса участвуют так называемые числа Бетти многообразия M (ранги его групп гомологий). Отсылая за определением и доказательством основных свойств этих чисел к любому учебнику алгебраической топологии (см. исторический и литературный комментарий в конце книги), мы здесь лишь напомним, что

1) в определении чисел Бетти участвует некоторое поле, называемое полем коэффициентов; все результаты этого пункта сохраняют свою силу при любом выборе этого поля;

2) числа Бетти определены для некоторых пар (X, A) , состоящих из топологического пространства X и его подпространства A и являются целыми неотрицательными числами; мы их будем обозначать символами

$$b_n(X, A),$$

где $n = 0, 1, \dots$; при $A = \emptyset$ мы вместо $b_n(X; \emptyset)$ будем писать $b_n(X)$;

3) если число $b_n(X, A)$ определено для пары (X, A) , то оно определено и для любой пары (X', A') , гомотопически эквивалентной паре (X, A) , причем

$$b_n(X', A') = b_n(X, A);$$

4) число $b_n(X, A)$ заведомо определено, если пара (X, A) клеточна и число n -мерных клеток разбиения X , не принадлежащих подразбиению A , конечно;

5) если для клеточной пары (X, A) число $b_n(X, A)$ определено, то оно определено и для любой пары вида $(X^m \cup A, A)$, где X^m — m -мерный остов разбиения X , причем

$$b_n(X^m \cup A, A) = b_n(X, A),$$

если $n < m$;

6) если пространство X получается из пространства A приклеиванием k замкнутых m -мерных шаров (посредством некоторых отображений их границ), то

$$b_n(X, A) = \begin{cases} k, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Нам понадобится еще одно свойство чисел Бетти, обычно в учебниках специально не отмечаемое.

Пусть $s(X, A)$ — произвольный числовой инвариант, определенный для некоторых пар (X, A) топологических пространств. Этот инвариант мы будем называть *подаддитивным*, если для любых вложенных друг в друга трех пространств $X \supset A \supset B$ имеет место соотношение

$$s(X, B) \leq s(X, A) + s(A, B) \quad (1)$$

(конечно, при условии, что все участвующие в этом соотношении числа определены). В случае, когда в соотношении (1) всегда имеет место равенство, мы инвариант $s(X, A)$ будем называть *аддитивным*.

Используя так называемые «точные гомотопические последовательности пар», можно легко доказать, что

7) для любого $n \geq 0$ число $b_n(X, A)$ подаддитивно и, более того, что

8) для любого $n \geq 0$ подаддитивно число

$$c_n(X, A) = b_n(X, A) - b_{n-1}(X, A) + \dots + (-1)^n b_0(X, A).$$

Для каждой пары (X, A) , обладающей тем свойством, что $b_n(X, A) = 0$ для всех достаточно больших n , определено число

$$\chi(X, A) = b_0(X, A) - b_1(X, A) + \dots + (-1)^n b_n(X, A) + \dots,$$

называемое *эйлеровой характеристикой* пары (X, A) . Аналогично свойству 8) можно без труда доказать, что

9) эйлерова характеристика $\chi(X, A)$ аддитивна.

Пусть K — произвольное клеточное разбиение, обладающее тем свойством, что для любого $n \geq 0$ число $a_n(K)$ его n -мерных клеток конечно. Тогда (см. свойство 4)) для любых $n \geq 0$ и $m \geq 0$ определено число $b_n(K^m, K^{m-1})$, а также число $b_n(K)$. При этом, согласно свойству 6), для любых $n \geq 0$ и $m \geq 0$ имеет место равенство

$$b_n(K^m, K^{m-1}) = \begin{cases} a_n(K), & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Суммируя эти равенства по m , мы получим, что для любого $n \geq 0$ имеет место равенство

$$\sum_{m=0}^{n+1} b_n(K^m, K^{m-1}) = a_n(K). \quad (2)$$

Применяя к этому равенству нужное число раз соотношение подаддитивности и учитывая, что $b_n(K^{n+1}, K^{-1}) = b_n(K)$, мы немедленно получим, что

$$b_n(K) \leq a_n(K). \quad (3)$$

Аналогично, беря альтернированную сумму соотношений (2) и используя свойство аддитивности эйлеровой характеристики, мы получим (в предположении, что $\dim K = m$, т. е. что $a_n(K) = 0$ при $n > m$) соотношение

$$\begin{aligned} b_0(K) - b_1(K) + \dots + (-1)^m b_m(K) &= \\ &= a_0(K) - a_1(K) + \dots + (-1)^m a_m(K) \end{aligned} \quad (4)$$

Более точные соотношения можно получить, используя подаддитивность инвариантов $c_n(X, A)$. Действительно, беря альтернированную сумму первых n соотношений (2), мы немедленно получим, что

для любого $n \geq 0$ имеют место неравенства

$$b_n(K) - b_{n-1}(K) + \dots + (-1)^n b_0(K) \leq \\ \leq a_n(K) - a_{n-1}(K) + \dots + (-1)^n a_0(K). \quad (5)$$

Ясно, что неравенства (3) являются непосредственными следствиями неравенств (5). (Чтобы получить неравенство (3) для $n = k$, достаточно сложить неравенства (5), отвечающие значениям $n = k$ и $n = k - 1$.) Равенство (4) также вытекает из неравенств (5) (достаточно сравнить друг с другом неравенства (5), отвечающие значениям $n = m$ и $n = m + 1$, и воспользоваться тем, что $a_{m+1}(K) = b_{m+1}(K) = 0$).

З а м е ч а н и е. Неравенства (3) непосредственно вытекают из определения чисел Бетти как рангов группы гомологий. Равенство (4) известно как «теорема о топологической инвариантности эйлеровой характеристики» и ее доказательство (по существу, совпадающее с изложенным выше) можно найти в любом учебнике алгебраической топологии. Напротив, неравенства (5) имеют значительно более глубокий характер и в учебниках топологии обычно не излагаются.

Пусть M — произвольное гладкое сепарабельное многообразие и f — произвольная гладкая ограниченная снизу функция компактного характера на многообразии M , имеющая лишь невырожденные критические точки. Согласно п. 4 эта функция определяет гомотопическую эквивалентность многообразия M с некоторым клеточным разбиением K , клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками функции f , причем размерность каждой клетки равна индексу соответствующей критической точки. Предположим, что число критических точек функции f конечно (это условие, например, необходимо выполнено, если многообразие M компактно). Тогда разбиение K обладает указанным выше свойством и потому к нему применимы все полученные выше результаты. Учитывая, что числа $b_n(K)$ равны числам $b_n(M)$ (в силу свойства 3) чисел Бетти) и что для любого $n = 0, 1, \dots, m$, где $m = \dim M$, число $a_n(K)$ равно числу $a_n(f)$ критических точек функции f , имеющих индекс n , мы немедленно получаем отсюда, что

для любого гладкого сепарабельного многообразия M , любой гладкой ограниченной снизу функции f компактного характера на многообразии M , имеющей лишь конеч-

ное число критических точек, которые все невырождены и любого $n \geq 0$ имеют место неравенства

$$b_n(M) - b_{n-1}(M) + \dots + (-1)^n b_0(M) \leq \\ \leq a_n(f) - a_{n-1}(f) + \dots + (-1)^n a_0(f)$$

где $b_n(M)$ — числа Бетти многообразия M , а $a_n(f)$ — число критических точек функции f , имеющих индекс n .

В частности,

для любого $n \geq 0$ имеют место неравенства

$$b_n(M) \leq a_n(f).$$

Кроме того, справедливо равенство

$$b_0(M) - b_1(M) + \dots + (-1)^m b_m(M) = \\ = a_0(f) - a_1(f) + \dots + (-1)^m a_m(f),$$

Эти соотношения позволяют иногда довольно точно оценить числа Бетти данного многообразия M (или, наоборот, из знания его чисел Бетти получить информацию о числе критических точек функции f). Например, из них легко следует, что

если $a_{n-1}(f) = a_{n+1}(f) = 0$, то $b_{n-1}(M) = b_{n+1}(M) = 0$ и $b_n(M) = a_n(f)$.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что все эти результаты справедливы лишь для ограниченных снизу функций компактного характера.

ЭЛЕМЕНТЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе собран строго отобранный минимум сведений из теории римановых пространств (и пространств аффинной связности), необходимый для дальнейших глав. Никакой целостной теории эта глава поэтому не содержит. Однако все изложение ведется в полной строгости с особым вниманием к деталям, при классических изложениях обычно оставляемых в тени.

Первые шесть пунктов посвящены пространствам аффинной связности.

В п. 1 вводятся основные понятия теории пространств аффинной связности.

В пп. 2—4 строится формальный аппарат ковариантного (абсолютного) дифференцирования.

В п. 5 после нескольких простых замечаний о геодезических доказывается существование окрестностей, нормальных относительно каждой своей точки (теорема Уайтхеда).

В п. 6 выводятся известные уравнения Картана для дифференциальных форм связности.

В остальных пунктах (пп. 7—12) рассматриваются собственно римановы пространства.

В п. 7 доказывается существование и единственность римановой связности.

В п. 8 строится и изучается риманов тензор кривизны. В этом же пункте метрический тензор выражается через дифференциальные формы связности соответствующей римановой связности.

В п. 9 вводится внутренняя метрика риманова пространства и рассматриваются ее простейшие свойства.

В п. 10 доказывается существование нормальных выпуклых окрестностей. Здесь же доказывается одна лемма о сходимости, необходимая в следующем пункте.

В п. 11 доказывается, что в полном римановом пространстве любые две точки можно соединить кратчайшей (теорема Хопфа — Ринова).

Наконец, в п. 12 доказывается, что риманово пространство тогда и только тогда полно, когда оно метрически полно.

1. Аффинные связности

Пусть M — произвольное гладкое многообразие. *Аффинной связностью* на многообразии M называется функция ∇ , сопоставляющая каждому векторному полю $X \in \mathcal{O}(M)$

некоторое линейное (но не $\mathcal{O}(M)$ -линейное) отображение

$$\nabla_X : \mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(M),$$

обладающее тем свойством, что для любых функций $f, g \in \mathcal{O}(M)$ и любых полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$ имеют место соотношения:

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$$

($\mathcal{O}(M)$ -линейность по X),

$$\nabla_X(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$$

(правило дифференцирования произведения).

Многообразие M , на котором задана аффинная связность ∇ , называется *пространством аффинной связности*, а отображение ∇_X — *ковариантным дифференцированием вдоль векторного поля X* (относительно данной аффинной связности ∇).

Понятие аффинной связности имеет локальный характер, т. е.

если хотя бы одно из векторных полей X или Y равно нулю на открытом подмногообразии W пространства аффинной связности M , то векторное поле $\nabla_X Y$ также равно нулю на W .

Действительно, пусть f — гладкая на M функция, равная единице в некоторой точке $p \in W$ и нулю вне W . Тогда если $Y = 0$ на W , то $fY = 0$ на M и потому $\nabla_X(fY) = 0$ на M . Но

$$\nabla_X(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y,$$

так что

$$f \cdot \nabla_X Y = -Xf \cdot Y \quad \text{на } M,$$

и потому

$$(\nabla_X Y)_p = -(Xf)(p) \cdot Y_p = 0,$$

ибо $f(p) = 1$ и $Y_p = 0$.

Аналогично если $X = 0$ на W , то $fX = 0$ на M и потому $\nabla_{fX} Y = 0$ на M . Но $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$, так что $(\nabla_X Y)_p = 0$, ибо $f(p) = 1$. Поскольку p — произвольная точка множества W , этим доказано, что в обоих случаях $\nabla_X Y = 0$ на W .

Пусть теперь X и Y — произвольные векторные поля на открытом подмногообразии W пространства аффинной связности M . Как мы знаем, для любой точки $p \in W$

существует такая ее окрестность $V \subset W$ и такие векторные поля X' и Y' на M , что $X' = X$ и $Y' = Y$ на V . Мы определим на W аффинную связность $\nabla|_W$, полагая

$$((\nabla|_W)_X Y)_p = (\nabla_{X'} Y')_p, \quad p \in W.$$

В силу локального характера аффинной связности вектор $(\nabla_{X'} Y')_p$ для любой точки $p \in W$ не зависит от выбора полей X' и Y' . Поэтому эта формула однозначно определяет векторное поле $(\nabla|_W)_X Y$ на W . Тот факт, что построенная функция $\nabla|_W$ является аффинной связностью, проверяется непосредственно.

Аффинную связность $\nabla|_W$ мы будем называть *ограничением* связности ∇ на W , а открытое подмногообразие W , снабженное этой связностью, — *открытым подпространством* пространства M . В случае, когда недоразумения исключены, аффинную связность $\nabla|_W$ на W мы будем обозначать тем же символом ∇ , что и аффинную связность на всем пространстве M .

В частности, на любой координатной окрестности U пространства M определена аффинная связность $\nabla|_U$. Пусть $X_1, \dots, X_m$ — произвольный базис модуля $\mathcal{O}^1(U)$ и пусть

$$X = X^i X_i, \quad Y = Y^j X_j$$

— произвольные векторные поля на U . Тогда, как легко видеть,

$$\nabla_X Y = X^i \cdot X_i Y^j \cdot X_j + X^i X^j \nabla_{X_i} (X_j) \quad \text{на } U.$$

Полагая

$$\nabla_{X_i} (X_j) = \Gamma_{ij}^k X_k,$$

где Γ_{ij}^k — некоторые гладкие на U функции (называемые *коэффициентами* связности ∇ в базисе $X_1 \dots X_m$), мы получим отсюда для компонент $(\nabla_X Y)^k$ поля $\nabla_X Y$ следующее выражение:

$$(\nabla_X Y)^k = (X_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) X^i. \quad (1)$$

В частности, если $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, то

$$(\nabla_X Y)^k = \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) X^i. \quad (1')$$

Для любых векторных полей X, Y , заданных на пространстве аффинной связности M , мы положим

$$K(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

Таким образом, $K(X, Y)$ представляет собой некоторое векторное поле на M , а $R(X, Y)$ — некоторое отображение $\mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(M)$. Ясно, что имеют место следующие «свойства антисимметричности»:

$$K(X, Y) = -K(Y, X), \quad R(X, Y) = -R(Y, X).$$

Кроме того, непосредственно проверяется, что для любых трех полей $X, Y, Z \in \mathcal{O}^1(M)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \\ = K(X, [Y, Z]) + K(Y, [Z, X]) + K(Z, [X, Y]) + \\ + \nabla_X K(Y, Z) + \nabla_Y K(Z, X) + \nabla_Z K(X, Y). \end{aligned}$$

В частности,

если $K = 0$, то

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Последнее тождество известно как тождество Бианки.

Как правило, удобнее вместо поля $K(X, Y)$ и отображения $R(X, Y)$ рассматривать тензорные поля K и R , определенные формулами:

$$K(\omega; X, Y) = \omega(K(X, Y)), \quad \omega \in \mathcal{O}_1(M), \quad X, Y \in \mathcal{O}^1(M),$$

$$R(\omega; Z, X, Y) = \omega(R(X, Y)Z), \quad \omega \in \mathcal{O}_1(M), \quad X, Y, Z \in \mathcal{O}^1(M)$$

(см. п. 8 гл. 4). Поле K (типа $(1, 2)$) мы будем называть *полем тензоров кручения*, а поле R (типа $(1, 3)$) — *полем тензоров кривизны* рассматриваемого пространства аффинной связности M .

В каждой точке $p \in M$ поле K определяет некоторый тензор $K_p \in \mathcal{O}_2^1(p)$ — *тензор кручения в точке p* . Для любых векторов $A, B \in \mathcal{O}^1(p)$ функция

$$K_p(A, B)(\alpha) = K_p(\alpha; A, B)$$

ковектора $\alpha \in \mathcal{O}_1(p)$ является тензором типа $(1, 0)$, т. е. вектором. Таким образом, тензор K_p позволяет сопоставить любым векторам $A, B \in M_p$ некоторый вектор $K_p(A, B) \in M_p$.

Аналогично в каждой точке $p \in M$ поле R определяет некоторый тензор $R_p \in \mathcal{O}_3^1(p)$ — *тензор кривизны в точке p* . Для любых векторов $A, B, C \in \mathcal{O}^1(p)$ функция

$$[R_p(A, B)C](\alpha) = R_p(\alpha; C, A, B)$$

ковектора $\alpha \in \mathcal{O}_1(p)$ является тензором типа $(1, 0)$, т. е. вектором. Ясно, что соответствие $C \rightarrow R_p(A, B)C$ линейно. Таким образом, тензор R_p позволяет сопоставить любым векторам $A, B \in M_p$ некоторое линейное преобразование $R_p(A, B)$ пространства M_p .

Пусть U — произвольная координатная окрестность в пространстве M и пусть $X_1, \dots, X_m$ — произвольный базис $\mathcal{O}(U)$ -модуля $\mathcal{O}^1(U)$. Полагая

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k,$$

мы с помощью формулы (1) без труда найдем, что для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(U)$ компоненты $K(X, Y)^k$ векторного поля $K(X, Y)$ на U выражаются формулой

$$K(X, Y)^k = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - c_{ij}^k) X^i Y^j,$$

откуда для компонент K_{ij}^k тензорного поля K мы получаем формулу

$$K_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - c_{ij}^k. \quad (2)$$

В частности, если базис $X_1, \dots, X_m$ голономен, то

$$K_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k. \quad (2')$$

Следовательно,

поле K тензоров кручения тогда и только тогда равно нулю, когда для любой системы локальных координат на пространстве M соответствующие коэффициенты связности Γ_{ij}^k симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Аналогично, вычисляя с помощью формулы (1) компоненты полей $\nabla_X \nabla_Y Z$ и $\nabla_Y \nabla_X Z$, мы без труда найдем, что для любых трех полей $X, Y, Z \in \mathcal{O}^1(U)$ поле $R(X, Y)Z \in \mathcal{O}^1(U)$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} (R(X, Y)Z)^k &= \\ &= (\Gamma_{is}^k \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{js}^k \Gamma_{il}^s + X_i \Gamma_{jl}^k - X_j \Gamma_{il}^k - c_{ij}^s \Gamma_{sl}^k) X^i Y^j Z^l, \end{aligned}$$

т. е. что компоненты R_{lij}^k тензорного поля R выражаются формулами

$$R_{lij}^k = \Gamma_{is}^k \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{js}^k \Gamma_{il}^s + X_i \Gamma_{jl}^k - X_j \Gamma_{il}^k - c_{ij}^s \Gamma_{sl}^k. \quad (3)$$

В частности, если базис $X_1, \dots, X_m$ голономен, то

$$R_{lij}^k = \Gamma_{is}^k \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{js}^k \Gamma_{il}^s + \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j}. \quad (3')$$

2. Ковариантное дифференцирование векторных полей

Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ — произвольная регулярная кривая в пространстве аффинной связности M и пусть $X(t)$ — некоторое гладкое векторное поле на кривой γ . Рассмотрим произвольный элементарный отрезок $\gamma|_C$ кривой γ . Как мы знаем (см. п. 2 гл. 5), на многообразии M существует такое векторное поле X , что

$$X_{\gamma(t)} = X(t) \quad \text{для любого } t \in C$$

и такое векторное поле A , что

$$A_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) \quad \text{для любого } t \in C.$$

Определим на $\gamma|_C$ векторное поле $\frac{\nabla X}{dt}(t)$, полагая

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = (\nabla_A X)_{\gamma(t)} \quad \text{для любого } t \in C$$

Оказывается, что

поле $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ не зависит от выбора полей X и A , т. е. определяется исключительно полем $X(t)$ и кривой γ .

Для доказательства этого утверждения мы рассмотрим локальные координаты $x^1, \dots, x^m$, определенные в координатной окрестности $U \supset \gamma(C)$. Пусть

$$X(t) = X^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)} \quad \text{на } C$$

и

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{на } U,$$

где $X^i = X x^i$ — гладкие на U функции, а $X^i(t)$ — гладкие на C функции, связанные с функциями X^i соотношениями

$$X^i(t) = X^i(\gamma(t)).$$

Пусть аналогично

$$\dot{\gamma}(t) = A^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)} \quad \text{на } C$$

и

$$A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{на } U,$$

где $A^i = Ax^i$ и $A^i(t) = A^i(\gamma(t))$. Тогда

$$(\nabla_A X)^k = A^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k A^i X^j, \quad k = 1, \dots, m,$$

где Γ_{ij}^k — коэффициенты связности ∇ . Обозначая компоненты вектора $\frac{\nabla X}{dt}(t) = (\nabla_A X)_{\gamma(t)}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{\gamma(t)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_{\gamma(t)}$ символами $\frac{\nabla X^k}{dt}(t)$, $k = 1, \dots, m$, мы немедленно получаем отсюда, что

$$\frac{\nabla X^k}{dt}(t) = A^i(t) \frac{\partial X^k}{\partial x^i}(\gamma(t)) + \Gamma_{ij}^k(t) A^i(t) X^j(t),$$

где

$$\Gamma_{ij}^k(t) = \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)).$$

Но мы знаем (см. п. 1 гл. 5), что

$$A^i(t) = \dot{x}^i(t),$$

откуда, согласно правилу дифференцирования сложной функции, непосредственно вытекает, что

$$A^i(t) \frac{\partial X^k}{\partial x^i}(\gamma(t)) = \frac{dX^k(t)}{dt}.$$

Таким образом,

$$\frac{\nabla X^k}{dt}(t) = \frac{dX^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(t) \dot{x}^i(t) X^j(t), \quad k = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Поскольку правая часть этой формулы не зависит от выбора полей X и A , сформулированное выше утверждение тем самым полностью доказано.

Поскольку любая точка регулярной кривой γ принадлежит некоторому элементарному отрезку, изложенная выше конструкция однозначно определяет вектор $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ для любого $t \in I$. Ясно, что построенное таким образом векторное поле

$\frac{\nabla X}{dt}(t)$ на кривой $\gamma(t)$ является гладким полем. Мы будем говорить, что это поле получено *ковариантным дифференцированием поля $X(t)$ вдоль кривой γ* .

Ясно, что на множестве всех полей $X(t)$ ковариантное дифференцирование $\frac{\nabla}{dt}$ линейно, т. е. для любых двух полей $X_1(t)$ и $X_2(t)$ на кривой $\gamma(t)$ имеет место формула

$$\frac{\nabla}{dt}(X_1(t) + X_2(t)) = \frac{\nabla X_1}{dt}(t) + \frac{\nabla X_2}{dt}(t).$$

При умножении векторного поля на числовую функцию ковариантное дифференцирование подчиняется правилу дифференцирования произведения, т. е. для любой функции $f(t)$, $t \in I$, и любого поля $X(t)$ на кривой γ имеет место формула

$$\frac{\nabla}{dt}(f(t) X(t)) = \frac{df(X)}{dt} X(t) + f(t) \frac{\nabla X}{dt}(t).$$

В любой системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$ компоненты $\frac{\nabla X^k}{dt}(t)$ поля $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\gamma(t)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\gamma(t)}$ выражаются, очевидно, формулами (1), независимо от того, элементарен или нет отрезок кривой γ , содержащийся в соответствующей координатной окрестности.

Поэтому эти формулы можно положить в основу «координатного» определения операции $\frac{\nabla}{dt}$, так как легко проверить, что числа $\frac{\nabla X^k}{dt}(t)$, заданные этими формулами, служат координатами вполне определенного (не зависящего от выбора локальных координат $x^1, \dots, x^m$) вектора. Важно отметить, что это новое определение применимо и в случае, когда кривая $\gamma(t)$ нерегулярна. Таким образом, мы можем считать, что

операция $\frac{\nabla}{dt}$ ковариантного дифференцирования векторных полей вдоль кривой определена для любой гладкой кривой $\gamma(t)$.

Имея это в виду, рассмотрим в пространстве M произвольную гладкую поверхность $\varphi: I_1 \times I_2 \rightarrow M$ и некоторое векторное поле $X(t^1, t^2)$ на поверхности φ . (Мы, как и в п. 1 гл. 5, считаем поверхность φ двумерной, хотя все дальнейшее

справедливо с соответствующими изменениями и для любого n .) Для каждого фиксированного $t^2 \in I_2$ векторы $X(t^1, t^2)$ образуют поле $X_{t^2}(t^1)$ на гладкой кривой $\varphi_{t^2}(t^1) = \varphi(t^1, t^2)$, и, значит, на этой кривой определено поле $\frac{\nabla X_{t^2}}{dt^1}$.

Ясно, что формула

$$\frac{\nabla X}{\partial t^1}(t^1, t^2) = \frac{\nabla X_{t^2}}{dt^1}(t^1)$$

определяет на поверхности φ некоторое векторное поле $\frac{\nabla X}{\partial t^1}(t^1, t^2)$. Аналогично формула

$$\frac{\nabla X}{\partial t^2}(t^1, t^2) = \frac{\nabla X_{t^1}}{dt^2}(t^2),$$

где $X_{t^1}(t^2) = X(t^1, t^2)$ определяет на φ векторное поле $\frac{\nabla X}{\partial t^2}(t^1, t^2)$. Операции $\frac{\nabla}{\partial t^1}$ и $\frac{\nabla}{\partial t^2}$ мы будем называть операциями ковариантного дифференцирования на поверхности φ по параметрам t^1 и t^2 соответственно.

Пусть $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты в точке $p = \varphi(t^1, t^2)$. Ясно, что компоненты $\frac{\nabla X^k}{\partial t^1}(t^1, t^2)$ вектора $\frac{\nabla X}{\partial t^1}(t^1, t^2)$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p, p = \varphi(t^1, t^2)$, выражаются формулой

$$\frac{\nabla X^k}{\partial t^1}(t^1, t^2) = \frac{\partial X^k(t^1, t^2)}{\partial t^1} + \Gamma_{ij}^k(t^1, t^2) \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^1} X^j(t^1, t^2),$$

где $X^k(t^1, t^2)$ — компоненты вектора $X(t^1, t^2)$, а

$$x^i(t^1, t^2) = x^i(\varphi(t^1, t^2)),$$

и соответственно

$$\Gamma_{ij}^k(t^1, t^2) = \Gamma_{ij}^k(\varphi(t^1, t^2)).$$

В частности, для компонент $\left(\frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}\right)^k(t^1, t^2)$ вектора $\frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}(t^1, t^2)$ мы получаем отсюда, что

$$\left(\frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}\right)^k(t^1, t^2) = \frac{\partial^2 x^k(t^1, t^2)}{\partial t^1 \partial t^2} + \Gamma_{ij}^k(t^1, t^2) \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^1} \frac{\partial x^j(t^1, t^2)}{\partial t^2}.$$

(Здесь учтено, что компонентами вектора $\frac{\partial \varphi}{\partial t^2}(t^1, t^2)$ являются

производные $\frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^2}$. Аналогично

$$\left(\frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t^1}\right)^k(t^1, t^2) = \frac{\partial^2 x^k(t^1, t^2)}{\partial t^2 \partial t^1} + \Gamma_{ij}^k(t^1, t^2) \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^2} \frac{\partial x^j(t^1, t^2)}{\partial t^1}.$$

Если $K=0$, то $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ и эти выражения совпадают. Тем самым доказано, что

если $K=0$, то для любой поверхности $\varphi(t^1, t^2)$ имеет место формула

$$\frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\partial \varphi}{\partial t^2} = \frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t^1}. \quad (2)$$

Возвращаясь к произвольному векторному полю $X(t^1, t^2)$ на поверхности φ , рассмотрим поле $\frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\nabla X}{\partial t^1}(t^1, t^2)$. Его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\nabla X}{\partial t^1}\right)^k(t^1, t^2) = & \frac{\partial^2 X^k(t^1, t^2)}{\partial t^2 \partial t^1} + \\ & + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}(t^1, t^2) \frac{\partial x^l(t^1, t^2)}{\partial t^2} \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^1} X^j(t^1, t^2) + \\ & + \Gamma_{ij}^k(t^1, t^2) \frac{\partial^2 x^i(t^1, t^2)}{\partial t^2 \partial t^1} X^j(t^1, t^2) + \\ & + \Gamma_{ij}^k(t^1, t^2) \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^1} \frac{\partial X^j(t^1, t^2)}{\partial t^2} + \\ & + \Gamma_{is}^k(t^1, t^2) \frac{\partial x^s(t^1, t^2)}{\partial t^2} \left(\frac{\partial X^s(t^1, t^2)}{\partial t^1} + \Gamma_{ij}^s(t^1, t^2) \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^1} X^j(t^1, t^2) \right), \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}(t^1, t^2) = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}(\varphi(t^1, t^2)).$$

Вычитая из этой формулы аналогичную формулу для $\left(\frac{\nabla}{\partial t^1}\right) \left(\frac{\nabla X}{\partial t^2}\right)^k(t^1, t^2)$, мы получим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\nabla X}{\partial t^1}\right)^k(t^1, t^2) - \left(\frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\nabla X}{\partial t^2}\right)^k(t^1, t^2) = \\ = \left(\Gamma_{is}^k(t^1, t^2) \Gamma_{jl}^s(t^1, t^2) - \Gamma_{js}^k(t^1, t^2) \Gamma_{il}^s(t^1, t^2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i}(t^1, t^2) - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j}(t^1, t^2) \right) \frac{\partial x^i(t^1, t^2)}{\partial t^2} \frac{\partial x^j(t^1, t^2)}{\partial t^1} X^l(t^1, t^2), \end{aligned}$$

т. е. (см. формулу (3) п. 1) что

$$\left(\frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\nabla X}{\partial t^1} \right)^k (t^1, t^2) - \left(\frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\partial X}{\partial t^2} \right)^k (t^1, t^2) = \\ = R_{lij}^k (t^1, t^2) \frac{\partial x^i (t^1, t^2)}{\partial t^2} \frac{\partial x^j (t^1, t^2)}{\partial t^1} X^l (t^1, t^2),$$

где

$$R_{lij}^k (t^1, t^2) = R_{lij}^k (\varphi (t^1, t^2)).$$

Возвращаясь от компонент к векторным полям, мы получаем отсюда, что

$$\frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\nabla X}{\partial t^1} (t^1, t^2) - \frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\nabla X}{\partial t^2} (t^1, t^2) = R_{\varphi (t^1, t^2)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial t^1} \right) X (t^1, t^2),$$

т. е. что

$$\frac{\nabla}{\partial t^2} \frac{\nabla}{\partial t^1} - \frac{\nabla}{\partial t^1} \frac{\nabla}{\partial t^2} = R_{\varphi (t^1, t^2)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial t^1} \right), \quad (3)$$

где обе части равенства рассматриваются как операторы, действующие на векторных полях $X (t^1, t^2)$.

Пусть

$$\gamma (t) = \varphi (t^1 (t), t^2 (t))$$

— произвольная кривая, принадлежащая поверхности φ . Векторное поле $X (t^1, t^2)$ определяет на этой кривой поле

$$X (t) = X (t^1 (t), t^2 (t)).$$

В произвольной системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$ мы имеем

$$\frac{\nabla X^k}{dt} (t) = \frac{dX^k}{dt} (t) + \Gamma_{ij}^k (t) \dot{x}^i (t) X^j (t) = \\ = \frac{\partial X^k}{\partial t^1} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^1 (t) + \frac{\partial X^k}{\partial t^2} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^2 (t) + \\ + \Gamma_{ij}^k (t^1 (t), t^2 (t)) \frac{\partial x^i}{\partial t^1} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^1 (t) X^j (t^1 (t), t^2 (t)) + \\ + \Gamma_{ij}^k (t^1 (t), t^2 (t)) \frac{\partial x^i}{\partial t^2} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^2 (t) X^j (t^1 (t), t^2 (t)) = \\ = \frac{\nabla X^k}{\partial t^1} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^1 (t) + \frac{\nabla X^k}{\partial t^2} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^2 (t).$$

Следовательно, как и в элементарном анализе,

$$\frac{\nabla X}{dt} (t) = \frac{\nabla X}{\partial t^1} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^1 (t) + \frac{\nabla X}{\partial t^2} (t^1 (t), t^2 (t)) \dot{t}^2 (t).$$

Ясно, что соответствующая формула

$$\frac{\nabla X}{\partial t}(t) = \frac{\nabla X}{\partial t^i}(t^1(t), \dots, t^n(t)) \dot{t}^i(t) \quad (4)$$

имеет место и для любого n .

3. Параллельный перенос вдоль кривой

Мы будем говорить, что векторное поле $X(t)$ на кривой $\gamma(t)$, $t \in I$, является *полем параллельных векторов*, если

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = 0 \quad \text{для любого } t \in I.$$

Согласно формуле (1) п. 2

поле $X(t)$ тогда и только тогда является полем параллельных векторов, когда для любой системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$ его компоненты $X^k(t) = X(t) x^k$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dX^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(t) \dot{x}^i(t) X^j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Пусть $p = \gamma(t_0)$ и $q = \gamma(t_1)$ — две произвольные точки кривой $\gamma(t)$, $t \in I$. Мы будем говорить, что вектор $B \in M_q$ получается из вектора $A \in M_p$ *параллельным переносом вдоль кривой γ* , если для некоторого интервала $J \subset I$, содержащего точки t_0 и t_1 , существует на кривой $\gamma|_J$ такое поле $X(t)$ параллельных векторов, что

$$X(t_0) = A, \quad X(t_1) = B.$$

В этом случае мы будем писать

$$B = \tau_q^p A.$$

Из этого определения непосредственно вытекает, что параллельный перенос $\tau = \tau_q^p$ обладает свойством транзитивности:

для любых трех точек $p = \gamma(t_0)$, $q = \gamma(t_1)$ и $r = \gamma(t_2)$ кривой γ и любых трех векторов $A \in M_p$, $B \in M_q$ и $C \in M_r$ из соотношений $B = \tau_q^p A$, $C = \tau_r^q B$ вытекает соотношение $C = \tau_r^p A$.

Покажем теперь, что

для любого вектора $A \in M_p$ вектор $\tau_q^p A \in M_q$ всегда существует и определен однозначно, причем получающееся

отображение

$$\tau_q^p : M_p \rightarrow M_q$$

представляет собой изоморфизм линейных пространств.

В силу транзитивности переноса τ это утверждение достаточно доказать для случая, когда кривая γ целиком содержится в некоторой координатной скрестности. Кроме того, поскольку отображение τ_p^p тождественно, тот факт, что отображение τ_q^p изоморфно, вытекает из его линейности и транзитивности (ибо $\tau_p^q \circ \tau_q^p = \tau_p^p$).

Имея это в виду, рассмотрим уравнения (1), которым удовлетворяют компоненты $X^k(t)$ произвольного поля параллельных векторов на кривой γ . По известной теореме из теории дифференциальных уравнений существуют такие гладкие на интервале I функции $g^i(t; a^1, \dots, a^m)$, линейно зависящие от m числовых параметров $a^1, \dots, a^m$, что

1) для любых $a^1, \dots, a^m$ функции $X^i(t) = g^i(t; a^1, \dots, a^m)$ удовлетворяют уравнениям (1);

$$2) \quad g^i(t_0; a^1, \dots, a^m) = a^i,$$

причем этими условиями функции g^i определяются единственным образом. На геометрическом языке эта теорема означает, что для любых $a^1, \dots, a^m$ формула

$$X(t; a^1, \dots, a^m) = g^i(t; a^1, \dots, a^m) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)}$$

определяет на γ такое поле $X(t; a^1, \dots, a^m)$ параллельных векторов, что

$$X(t_0; a^1, \dots, a^m) = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t_0)}.$$

Поскольку вектор $a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t_0)}$ пробегает все пространство $M_{\gamma(t_0)} = M_p$, отсюда следует, что отображение τ определено на всем пространстве M_p . Поскольку функции g^i определяются условиями 1) и 2) единственным образом, отображение τ однозначно. Поскольку функции g^i линейно зависят от $a^1, \dots, a^m$, отображение τ линейно.

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Операцию $\tau = \tau_q^p$ параллельного переноса вдоль кривой γ из точки p в точку q можно определить не только для векторов, но и для тензоров произвольного типа $(r, s) \neq (0, 0)$.

Пусть сначала α — произвольный тензор типа $(0, 1)$ в точке p , т. е. ковектор $\alpha: M_p \rightarrow R$. Мы определим ковектор $\tau\alpha: M_q \rightarrow R$, полагая для любого вектора $A \in M_q$

$$\tau\alpha(A) = \alpha(\tau^{-1}A),$$

где $\tau^{-1} = \tau_p^q: M_q \rightarrow M_p$ — параллельный перенос вдоль кривой γ из точки q в точку p , обратный к переносу $\tau = \tau_q^p$.

Далее, для любого тензора $L \in \mathcal{O}_s^r(p)$, $r + s > 0$, мы положим

$$\begin{aligned} \tau L(\alpha^1, \dots, \alpha^r; A_1, \dots, A_s) = \\ = L(\tau^{-1}\alpha^1, \dots, \tau^{-1}\alpha^r; \tau^{-1}A_1, \dots, \tau^{-1}A_s), \end{aligned}$$

где $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in \mathcal{O}_1(q)$, $\dots$, $A_s \in \mathcal{O}^1(q)$.

Ясно, что так определенное отображение

$$\tau: \mathcal{O}_s^r(p) \rightarrow \mathcal{O}_s^r(q), \quad r + s > 0,$$

также является изоморфизмом линейных пространств.

Мы распространим его на всю алгебру $\mathcal{O}^*(p)$, считая, что, на $\mathcal{O}_0^0(p) = R$ это отображение тождественно. Ясно, что получающееся таким образом отображение

$$\tau: \mathcal{O}^*(p) \rightarrow \mathcal{O}^*(q)$$

является изоморфизмом алгебр, т. е.

$$\tau(L_1 \otimes L_2) = \tau(L_1) \otimes \tau(L_2)$$

для любых тензоров $L_1, L_2 \in \mathcal{O}^*(p)$. Кроме того, оно перестановочно с отображениями свертывания C_j^i , т. е.

$$\tau(C_j^i L) = C_j^i(\tau L),$$

каждый раз когда тензор $C_j^i L$ определен (т. е. при $i \leq s$ и $j \leq r$).

Пусть $T(t)$ — произвольное тензорное поле (типа $(r, s) \neq (0, 0)$) на кривой $\gamma(t)$, $t \in I$. Мы будем говорить, что это поле состоит из *параллельных тензоров*, если для любых точек $t_0, t_1 \in I$ имеет место равенство $T(t_1) = \tau T(t_0)$, где τ —

параллельный перенос вдоль кривой γ от точки $\gamma(t_0)$ до точки $\gamma(t_1)$. Ясно, что для векторных полей это определение равносильно исходному.

Найдем условия, которым должны удовлетворять компоненты параллельных на кривой $\gamma(t)$ тензоров $T(t)$ (в предположении, что кривая $\gamma: I \rightarrow M$ целиком содержится в некоторой координатной окрестности U).

Пусть сначала $r=0$, $s=1$, т. е. пусть тензоры $T(t)$ являются ковекторами $\alpha(t)$. Тогда в любой системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$, определенных в окрестности U , будут иметь место равенства

$$\alpha(t) = \alpha_k(t) (dx^k)_{\gamma(t)},$$

где $\alpha_k(t)$ — некоторые гладкие на I функции. По определению, условие $\alpha(t_1) = \tau \alpha(t_0)$ параллельности ковекторов $\alpha(t)$ в точках $t_0, t_1 \in I$ равносильно выполнению для любого поля

$$X(t) = X^k(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{\gamma(t)}$$

параллельных на кривой γ векторов равенства

$$\alpha(t_1)(X(t_1)) = \alpha(t_0)(X(t_0)).$$

Таким образом, ковекторы $\alpha(t)$ тогда и только тогда параллельны на γ , когда для любого поля $X(t)$ параллельных на γ векторов число

$$\alpha(t)(X(t)) = \alpha_k(t) X^k(t)$$

не зависит от t . Дифференцируя равенство

$$\alpha_k(t) X^k(t) = \text{const}$$

по t , мы, учитывая формулу (1), получим, что это равенство равносильно соотношению

$$(\dot{\alpha}_k(t) - \Gamma_{ik}^j(t) \dot{x}^i(t) \alpha_j(t)) X^k(t) = 0.$$

Поскольку для каждого $t \in I$ числа $X^k(t)$ могут принимать любые значения, это соотношение возможно, лишь когда

$$\frac{d\alpha_k(t)}{dt} - \Gamma_{ik}^j(t) \dot{x}^i(t) \alpha_j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Тем самым доказано, что

поле $\alpha(t)$ тогда и только тогда является полем параллельных ковекторов, когда его компоненты $\alpha_k(t)$ удовлетворяют уравнениям (2).

Пусть теперь $r = 1$ и $s = 1$, так что

$$T(t) = T_j^i(t) (dx^j)_{\gamma(t)} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)}.$$

Легко видеть (как и для случая $r = 0, s = 1$), что тензоры $T(t)$ тогда и только тогда параллельны на $\gamma(t)$, когда для любых параллельных на $\gamma(t)$ ковекторов $\alpha(t)$ и векторов $X(t)$ функция

$$T(t)(\alpha(t); X(t)) = T_j^i(t) \alpha_i(t) X^j(t)$$

не зависит от t . Дифференцируя эту функцию по t и учитывая формулы (1) и (2), мы немедленно получим, что

поле $T(t)$ типа $(1, 1)$ тогда и только тогда является полем параллельных тензоров, когда в любой системе локальных координат его компоненты $T_j^i(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dT_j^i(t)}{dt} + \Gamma_{kl}^i(t) \dot{x}^k(t) T_j^l(t) - \Gamma_{kj}^l(t) \dot{x}^k(t) T_l^i(t) = 0. \quad (3)$$

Случай произвольных r и s разбирается совершенно аналогично. При этом уравнения, определяющие компоненты поля $T(t)$, содержат r членов «векторного» типа (аналогичных второму члену формулы (3)) и s членов «ковекторного» типа (аналогичных третьему члену формулы (3)).

4. Ковариантное дифференцирование тензорных полей

Пусть T — произвольное тензорное поле на пространстве аффинной связности M , имеющее тип $(r, s) \neq (0, 0)$, и пусть X — некоторое векторное поле на M . Пусть, далее, p — произвольная точка пространства M и $\gamma(t)$ — интегральная кривая поля X , для которой $\gamma(0) = p$. Мы определим в точке p тензор $(\nabla_X T)_p$, полагая

$$(\nabla_X T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^{-1} T_{\gamma(t)} - T_p}{t}, \quad (1)$$

где τ_t — параллельный перенос вдоль кривой γ из точки p в точку $\gamma(t)$. Предел здесь принимается в том смысле, что для любой системы r ковекторов и s векторов в точке p

значение тензора $(\nabla_X T)_p$ на этой системе равно пределу значений тензора $\frac{1}{t} (\tau_t^{-1} T_{\gamma(t)} - T_p)$. В частности, это означает, что для любого базиса пространства M_p компоненты тензора $(\nabla_X T)_p$ являются пределами соответствующих компонент тензора $\frac{1}{t} (\tau_t^{-1} T_{\gamma(t)} - T_p)$.

Мы вычислим эти компоненты, предполагая, что $r = s = 1$, поскольку рассмотрение общего случая лишь неоправданно усложнит выкладку.

Зафиксировав некоторое значение $t = t_0$ параметра t , параллельно перенесем вдоль кривой γ тензор $T_{\gamma(t_0)}$ во все точки $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq t_0$. В результате на отрезке $\gamma|_{[0, t_0]}$ определится поле параллельных тензоров $S(t)$, причем будут выполнены соотношения

$$S(t_0) = T_{\gamma(t_0)}, \quad S(0) = \tau_{t_0}^{-1} T_{\gamma(t_0)}.$$

Пусть $S_j^i(t)$ и $T_j^i(t)$ — компоненты соответственно тензоров $S(t)$ и $T(t)$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\gamma(t)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\gamma(t)}$. Здесь $x^1, \dots, x^m$ — локальные координаты в точке p ; мы считаем, что t_0 настолько мало, что весь отрезок $\gamma|_{[0, t_0]}$ содержится в координатной окрестности системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$. Тогда, поскольку $S_j^i(t_0) = T_j^i(t_0)$, тензор

$$\frac{\tau_{t_0}^{-1} T_{\gamma(t_0)} - T_p}{t_0} = \frac{S(0) - T_{\gamma(0)}}{t_0}$$

будет иметь компоненты

$$\frac{S_j^i(0) - T_j^i(0)}{t_0} = \frac{S_j^i(0) - S_j^i(t_0)}{t_0} + \frac{T_j^i(t_0) - T_j^i(0)}{t_0}.$$

По теореме Лагранжа первое слагаемое правой части равно $-\dot{S}_j^i(t^*)$, где $0 \leq t^* \leq t_0$ и потому при $t_0 \rightarrow 0$ стремится к $-\dot{S}_j^i(0)$. Что же касается второго слагаемого, то при $t_0 \rightarrow 0$ его предел равен $\dot{T}_j^i(0)$. Таким образом, для компонент $((\nabla_X T)_p)_j^i$ тензора $(\nabla_X T)_p$ (в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$) мы получаем следующее выражение:

$$((\nabla_X T)_p)_j^i = -\dot{S}_j^i(0) + \dot{T}_j^i(0).$$

С другой стороны, компоненты $S_j^i(t)$ удовлетворяют уравнениям (3) п. 3, т. е. уравнениям

$$\dot{S}_j^i(t) + \Gamma_{kl}^i(t) \dot{x}^k(t) S_j^l(t) - \Gamma_{kj}^l(t) \dot{x}^k(t) S_l^i(t) = 0,$$

откуда следует, что

$$-\dot{S}_j^i(t_0) = \Gamma_{kl}^i(t_0) \dot{x}^k(t_0) T_j^l(t_0) - \Gamma_{kj}^l(t_0) \dot{x}^k(t_0) T_l^i(t_0),$$

ибо $S(t_0) = T(t_0)$. Вводя компоненты $X^k = Xx^k$ и $T_j^i = T\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ полей X и T и переходя к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, мы получим отсюда соотношение

$$\begin{aligned} -\dot{S}_j^i(0) &= \Gamma_{kl}^i(0) \dot{x}^k(0) T_j^l(0) - \Gamma_{kj}^l(0) \dot{x}^k(0) T_l^i(0) = \\ &= (\Gamma_{kl}^i X^k T_j^l - \Gamma_{kj}^l X^k T_l^i)_p, \end{aligned}$$

где индекс p показывает, что все величины в скобках вычислены в точке p . (Напомним, что $\gamma(t)$ является интегральной кривой поля X и потому $\dot{x}^k(0) = X^k(p)$.)

Далее, так как

$$T_j^i(t) = T_j^i(\gamma(t)),$$

то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dT_j^i(t)}{dt} = \left(\frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} \right)_{\gamma(t)} \frac{dx^k(t)}{dt},$$

откуда следует, что

$$\dot{T}_j^i(0) = \left(\frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} X^k \right)_p.$$

Таким образом, для компонент тензора $(\nabla_X T)_p$ мы получаем следующее окончательное выражение (индекс p мы опускаем):

$$(\nabla_X T)_j^i = \left(\frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i T_j^l - \Gamma_{kj}^l T_l^i \right) X^k. \quad (2)$$

Поскольку все функции в правой части этой формулы являются гладкими функциями, отсюда следует, что

поле $\nabla_X T$ является гладким тензорным полем на пространстве M .

Формула, аналогичная формуле (2), имеет место, конечно, и для любых r и s . Она содержит r членов «векторного»

типа (аналогичных члену $\Gamma_{kl}^i T_j^l$) и s членов «ковекторного» типа (аналогичных члену $-\Gamma_{kj}^l T_l^i$). В частности, для векторных полей мы получим, что

$$(\nabla_X Y)^i = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i Y^l \right) X^k.$$

Поскольку эта формула совпадает с формулой (1) п. 1, мы видим, таким образом, что

на векторных полях операция ∇_X совпадает с операцией ∇_X , отвечающей в аффинной связности ∇ полю X .

Мы распространим по линейности операцию ∇_X на все элементы алгебры $\mathcal{O}^*(M)$, считая, что на функциях $f \in \mathcal{O}(M) = \mathcal{O}_0^0(M)$ она совпадает с операцией X :

$$\nabla_X f = Xf, \quad f \in \mathcal{O}(M).$$

Ясно, что формула (1), определяющая операцию ∇_X , остается в силе и для любых элементов алгебры $\mathcal{O}^*(M)$ (при $T=f$ она переходит в формулу (4) п. 3 гл. 5).

По определению, операция ∇_X сохраняет тип тензорных полей. Кроме того, так как для любых полей $T, S \in \mathcal{O}^*(M)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{\tau_t^{-1}(T \otimes S)_{\gamma(t)} - (T \otimes S)_p}{t} &= \frac{\tau_t^{-1}T_{\gamma(t)} \otimes \tau_t^{-1}S_{\gamma(t)} - T_p \otimes S_p}{t} = \\ &= \frac{\tau_t^{-1}T_{\gamma(t)} - T_p}{t} \otimes \tau_t^{-1}S_{\gamma(t)} + T_p \otimes \frac{\tau_t^{-1}S_{\gamma(t)} - S_p}{t} \end{aligned}$$

и так как $\tau_t^{-1}S_{\gamma(t)}^t \rightarrow S_p$ при $t \rightarrow 0$, то

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S,$$

т. е.

операция ∇_X является дифференцированием алгебры $\mathcal{O}^*(M)$.

Наконец, ясно, что

операция ∇_X перестановочна со всеми отображениями свертывания C_j^i .

Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ — произвольная регулярная кривая пространства M и пусть $T(t)$ — произвольное гладкое тензорное поле (скажем, типа (r, s)) на этой кривой. Как мы знаем, на

любом элементарном отрезке $\gamma|_C$ кривой γ поле $T(t)$ продолжаемо до некоторого поля T на M . Мы определим на отрезке $\gamma|_C$ тензорное поле $\frac{\nabla T}{dt}(t)$, положив

$$\frac{\nabla T}{dt}(t) = (\nabla_A T)_{\gamma(t)} \quad \text{для любого } t \in C,$$

где A — продолжение на M поля $\dot{\gamma}(t)$ (ср. аналогичное определение для векторных полей в п. 2). Так же как и в п. 2 (но с использованием вместо формулы (1) п. 1 формулы (2) этого пункта), мы немедленно получим, что компоненты $\frac{\nabla T_i^j}{dt}(t)$ поля $\frac{\nabla T}{dt}$ выражаются (при $(r, s) = (1, 1)$) формулой

$$\frac{\nabla T_i^j}{dt}(t) = \frac{dT_i^j}{dt}(t) + \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k(t) T_j^l(t) - \Gamma_{kj}^l \dot{x}^k(t) T_i^l(t). \quad (3)$$

Следовательно,

поле $\frac{\nabla T}{dt}(t)$ не зависит от выбора полей T и A , т. е. определяется исключительно полем $T(t)$ (и кривой $\gamma(t)$).

Поскольку любая точка кривой $\gamma(t)$ принадлежит некоторому элементарному отрезку, эта конструкция однозначно определяет тензор $\frac{\nabla T}{dt}(t)$ для любого $t \in I$. При этом ввиду формулы (3) тензоры $\frac{\nabla T}{dt}(t)$ образуют на кривой $\gamma(t)$ гладкое тензорное поле. Мы будем говорить, что это поле получено *ковариантным дифференцированием поля $T(t)$ вдоль кривой $\gamma(t)$* .

Сопоставляя формулу (3) с формулой (3) п. 3, мы немедленно получим, что

тензорное поле $T(t)$ на кривой $\gamma(t)$ тогда и только тогда является полем параллельных тензоров, когда

$$\frac{\nabla T}{dt}(t) = 0 \quad \text{для всех } t \in I.$$

Таким образом, параллельность любых тензоров может быть охарактеризована так же, как параллельность векторов (ср. п. 3).

Замечание. Правая часть формулы (3) имеет смысл для любой гладкой кривой $\gamma(t)$ и, как легко видеть, определяет компоненты некоторого тензорного поля $\frac{\nabla T}{dt}(t)$, не

зависящего от выбора локальных координат. Следовательно, так же как и для векторных полей,

операция ковариантного дифференцирования тензорных полей вдоль кривой определена для любой гладкой кривой $\gamma(t)$.

5. Геодезические. Нормальные окрестности

Гладкая кривая $\gamma: I \rightarrow M$ в пространстве аффинной связности M называется *геодезической*, если векторы поля $\dot{\gamma}(t)$ параллельны на γ , т. е. если

$$\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \quad \text{для всех } t \in I.$$

Это означает, что функции $x^k(t)$, параметрически задающие геодезическую $\gamma(t)$ в некоторой системе локальных координат, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(t) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt} = 0. \quad (1)$$

Ясно, что

для любой геодезической $\gamma(t)$ и любых чисел a и b кривая $\gamma(at + b)$ также является геодезической.

Мы будем говорить, что геодезическая $\gamma(at + b)$ получается из геодезической $\gamma(t)$ *линейным преобразованием параметра.*

В дальнейшем нам понадобится следующее простое замечание:

Пусть непрерывная кривая $\gamma(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, т. е. пусть для каждой ее точки p и любой системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в точке p функции $x^1(t), \dots, x^m(t)$, которые в соответствующей координатной окрестности параметрически задают кривую $\gamma(t)$, обладают непрерывными вторыми производными. Тогда если эти функции удовлетворяют уравнениям (1), то кривая $\gamma(t)$ гладка и потому является геодезической.

Действительно, мы можем последовательно определить все производные функций $x^i(t)$, дифференцируя нужное число раз соотношение (1).

Полезно также иметь в виду, что свойство «быть геодезической» имеет локальный характер, т. е.

кривая $\gamma(t)$ пространства M является геодезической, если она является геодезической локально, т. е. любая ее точка обладает такой окрестностью, что содержащийся в этой окрестности отрезок кривой $\gamma(t)$ представляет собой геодезическую.

Заметим еще, что

любая геодезическая является либо регулярной, либо вырожденной кривой.

Действительно, если вектор $\dot{\gamma}(t)$ равен нулю хотя бы для одного значения параметра t , то он равен нулю и для всех t (ибо параллельный перенос является изоморфизмом).

Из теоремы существования и единственности решений систем дифференциальных уравнений (примененной к системе (1)) немедленно следует, что

для любой точки $p \in M$, любого вектора $A \in M_p$ и любого числа t_0 существует такая геодезическая $\gamma(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0 , что

$$\gamma(t_0) = p, \quad \dot{\gamma}(t_0) = A,$$

причем любые две такие геодезические совпадают вблизи точки t_0 .

Далее, легко видеть, что

если две геодезические $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, определенные соответственно на (пересекающихся) интервалах I_1 и I_2 , обладают тем свойством, что для некоторой точки $t_0 \in I_1 \cap I_2$ имеют место равенства

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0), \quad \dot{\gamma}_1(t_0) = \dot{\gamma}_2(t_0),$$

то геодезические $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ совпадают на всем интервале $I = I_1 \cap I_2$.

Действительно, пусть C — множество всех точек $t \in I$, для которых

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \quad \dot{\gamma}_1(t) = \dot{\gamma}_2(t).$$

Согласно предыдущему утверждению это множество открыто. С другой стороны, поскольку кривые $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ и поля $\dot{\gamma}_1(t)$, $\dot{\gamma}_2(t)$ непрерывны, а пространство M хаусдорфово, это множество замкнуто (в I). Поскольку оно не пусто (ибо $t_0 \in C$), а интервал I связан, это возможно лишь при $C = I$.

Геодезическая γ называется *максимальной*, если она не является ограничением никакой другой геодезической, определенной на большем интервале оси R . Из только что доказанного утверждения немедленно следует, что

для любой точки $p \in M$, любого вектора $A \in M_p$ и любого числа t_0 существует одна и только одна максимальная геодезическая γ , определенная на некотором интервале, содержащем точку t_0 , для которой

$$\gamma(t_0) = p, \quad \dot{\gamma}(t_0) = A. \quad (2)$$

Действительно, пусть $\mathcal{G}$ — множество всех геодезических $\gamma(t)$, удовлетворяющих соотношениям (2). Каждая из этих геодезических определена на некотором интервале I_γ оси R , содержащем точку t_0 . По доказанному, множество $\mathcal{G}$ не пусто и любые две геодезические $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$ совпадают на интервале $I_{\gamma_1} \cap I_{\gamma_2}$. Поэтому формула

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t), \quad \text{если } t \in I_\gamma,$$

однозначно определяет на интервале

$$I = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{G}} I_\gamma$$

некоторую кривую $\bar{\gamma}: I \rightarrow M$. Ясно, что эта кривая и является искомой максимальной геодезической. Она регулярна, если $A \neq 0$, и представляет собой постоянное отображение оси R в точку p , если $A = 0$.

В дальнейшем мы всегда будем полагать $t_0 = 0$. Максимальную геодезическую γ , для которой

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = A,$$

мы будем обозначать символом $\gamma_{p,A}$ или, если это не вызывает недоразумений, символом γ_A .

Легко видеть, что

для любого числа a имеет место равенство

$$\gamma_{aA}(t) = \gamma_A(at). \quad (3)$$

Для доказательства достаточно заметить, что $\dot{\gamma}_A(at)|_{t=0} = aA$, и воспользоваться свойством единственности геодезических γ_A .

Пусть D_p — множество векторов A пространства M_p , для которых геодезическая γ_A определена на отрезке оси R ,

содержащем точку $t=1$. Для любого вектора $A \in D_p$ мы положим

$$\text{Exp } A = \gamma_A(1). \quad (4)$$

Так определенное отображение $\text{Exp}: D_p \rightarrow M$ мы будем называть *экспоненциальным отображением в точке p* .

Согласно формуле (3) для любого $t \in \mathbf{R}$, для которого точка $\gamma_A(t) \in M$ определена, имеет место равенство

$$\gamma_A(t) = \text{Exp}(tA).$$

Окрестность V_0 нулевого вектора пространства M_p мы будем называть *нормальной*, если

1) она обладает свойством «звездности», т. е. если для любого вектора $A \in V_0$ и любого неотрицательного числа $a \leq 1$ вектор aA принадлежит окрестности V_0 ;

2) отображение Exp определено на V_0 , т. е. $V_0 \subset D_p$;

3) отображение Exp на V_0 является диффеоморфизмом этой окрестности на некоторую окрестность $V(p)$ точки p .

Предусмотренную условием 3) окрестность

$$V(p) = \text{Exp } V_0$$

мы будем называть *нормальной окрестностью* точки $p \in M$.

Оказывается, что

каждая точка p_0 пространства аффинной связности M обладает нормальной окрестностью $V(p_0)$.

Для доказательства этого утверждения мы выберем (и раз навсегда зафиксируем) такую систему локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в точке p_0 , что

$$x^1(p_0) = \dots = x^m(p_0) = 0.$$

Уменьшив (если потребуется) соответствующую координатную окрестность U , мы можем считать, что координатный гомеоморфизм $\xi: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ отображает окрестность U на открытый шар $(t^1)^2 + \dots + (t^m)^2 < c_1^2$ пространства $\mathbf{R}^m$ радиуса c_1 с центром в точке $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^m$.

Мы введем в окрестности U метрику, принимая за расстояние $\rho(p, q)$ между двумя любыми ее точками p и q евклидово расстояние

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x^i(p) - x^i(q))^2}$$

между соответствующими точками $\xi(p)$ и $\xi(q)$ пространства R^m . Символом $U_{\delta}(p)$ мы будем обозначать δ -окрестность произвольной точки $p \in U$ и в этой метрике, т. е. совокупность всех точек $q \in U$, для которых $\rho(p, q) < \delta$. В частности,

$$U_{c_1}(p_0) = U.$$

Кроме того, в каждом из пространств M_p , $p \in U$, мы введем скалярное умножение, превращающее его в евклидово пространство, считая базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ пространства M_p ортонормированным.

Применим к уравнениям (1) теорему о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий. Согласно этой теореме для любого $c_1 > 0$ существуют такое $c > 0$ и такие гладкие функции

$$x^i(t; \xi^1, \dots, \xi^m; a^1, \dots, a^m)$$

$2m + 1$ переменных $t, \xi^1, \dots, \xi^m, a^1, \dots, a^m$, что для любых фиксированных $\xi^1, \dots, \xi^m, a^1, \dots, a^m$, удовлетворяющих неравенствам

$$(\xi^1)^2 + \dots + (\xi^m)^2 < c^2, \quad (a^1)^2 + \dots + (a^m)^2 < c^2,$$

функции

$$x^i(t) = x^i(t; \xi^1, \dots, \xi^m; a^1, \dots, a^m)$$

удовлетворяют при $|t| \leq 2c$ уравнениям (1) с начальными условиями

$$x^i(0) = \xi^i, \quad \dot{x}^i(0) = a^i, \quad i = 1, \dots, m,$$

и, кроме того, обладают тем свойством, что

$$(x^1(t))^2 + \dots + (x^m(t))^2 < c_1^2 \quad \text{при } |t| \leq 2c.$$

На языке кривых пространства M это означает, что для любой точки $p \in U_c(p_0)$ и любого вектора $A \in M_p$ с $|A| < c$ максимальная геодезическая $\gamma_{p,A}$ при $|t| \leq 2c$ содержится в окрестности U и гладко зависит от точки p и вектора A в том смысле, что функции

$$x^i(t; p; A) = x^i(t; x^1(p), \dots, x^m(p); a^1, \dots, a^m),$$

осуществляющие параметрическое задание геодезической $\gamma_{p,A}$ на отрезке $|t| \leq 2c$, гладко зависят от координат $x^1(p), \dots, x^m(p)$ и $a^1, \dots, a^m$ точки p и вектора A .

Согласно формуле (3) для любого числа a , для которого выражение $x^i(at; p; A)$ определено, имеет место равенство

$$x^i(at; p; A) = x^i(t; p; aA). \quad (5)$$

В частности, это равенство заведомо имеет место при $|a| \leq 1$.

Дважды дифференцируя соотношения (5) по a и полагая

$$D^2 x^i(t; p; A) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x^i(t; p; A),$$

$$D_{jk} x^i(t; p; A) = \frac{\partial^2}{\partial a^j \partial a^k} x^i(t; p; A), \quad j, k = 1, \dots, m,$$

мы получим, что

$$t^2 D^2 x^i(at; p; A) = a^j a^k D_{jk} x^i(t; p; aA).$$

Отсюда и из формулы Маклорена

$$f(t) = f(0) + \dot{f}(0)t + \frac{1}{2} \ddot{f}(\theta t)t^2, \quad 0 < \theta < 1,$$

примененной к функции $f(t) = x^i(t; p; A)$, немедленно вытекает, что

$$x^i(t; p; A) = x^i(p) + a^i t + \frac{1}{2} a^j a^k D_{jk} x^i(t; p; \theta A),$$

ибо согласно начальным условиям

$$x^i(0; p; A) = x^i(p), \quad \frac{\partial x^i}{\partial t}(0; p; A) = a^i.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial x^i(t; p; A)}{\partial a^j} \right)_{A=0} = \delta_j^i t$$

и, в частности,

$$\left(\frac{\partial x^i(c; p; A)}{\partial a^j} \right)_{A=0} = \delta_j^i c, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

По условию, для любого из рассматриваемых векторов A определена точка $\gamma_A(c) = \gamma_{p, A}(c)$. Поэтому для вектора cA определена точка $\gamma_{cA}(1) = \text{Exp}(cA)$, так что $cA \in D_p$. Это означает, что отображение Exp определено на некоторой окрестности V вектора $0 \in M_p$ (а именно, на окрестности, состоящей из векторов A , для которых $|A| \leq c^2$).

Для любого вектора A этой окрестности точка $\text{Exp } A = \gamma_{A/c}(c)$ имеет координаты

$$x^1\left(c; p; \frac{A}{c}\right), \dots, x^m\left(c; p; \frac{A}{c}\right). \quad (7)$$

Это означает, что составное отображение $\xi \circ \text{Exp}$ окрестности $V \subset M_p$ в пространство $\mathbf{R}^m$, где ξ — координатный гомеоморфизм, соответствующий системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$, задается функциями (7). Согласно формуле (6) якобиан этого отображения в точке $A=0$ равен единице. Поэтому существует такое положительное число $\varepsilon_p \leq c^2$, что на окрестности V_0 вектора $0 \in M_p$, состоящей из векторов $A \in M_p$, для которых $|A| < \varepsilon_p$, отображение $\xi \circ \text{Exp}$ является диффеоморфизмом. Следовательно, диффеоморфизмом является на V_0 и отображение Exp . Поскольку окрестность V_0 удовлетворяет, очевидно, условию звездности, тем самым доказано, что

любая точка $p \in U_c(p_0)$ обладает нормальной окрестностью $V(p) = \text{Exp}(V_0)$.

В частности, нормальной окрестностью обладает и точка p_0 . Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Замечание. Согласно замечанию, сделанному в конце п. 2 гл. 4,

«радиусы» ε_p построенных выше нормальных окрестностей V_0 можно выбрать так, чтобы они непрерывно зависели от точки p .

Из этого замечания непосредственно вытекает, что на окрестности $U_c(p_0)$ существует такая непрерывная функция $\eta(p)$, что для любой точки $p \in U_c(p_0)$ сферическая $\eta(p)$ -окрестность $U_{\eta(p)}(p)$ этой точки p содержится в ее нормальной окрестности $V(p)$.

Действительно, можно положить

$$\eta(p) = \min_{|A|=\varepsilon_p} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(x^i\left(c; p; \frac{A}{c}\right) - x^i(p)\right)^2}.$$

Ясно, что любая звездная окрестность нулевого вектора пространства M_p , содержащаяся в нормальной окрестности, также является нормальной окрестностью. С другой стороны,

звездные окрестности вектора 0 в касательном пространстве M_p образуют фундаментальную систему окрестностей этого вектора. Отсюда непосредственно вытекает, что

нормальные окрестности $V(p)$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки p в многообразии M .

Значение нормальных окрестностей определяется тем, что *любая точка q нормальной окрестности $V(p)$ может быть соединена в $V(p)$ с точкой p единственной (с точностью до линейного преобразования параметра) геодезической.*

Именно, геодезической γ_A , где A — такой вектор, что $\text{Exp } A = q$.

Не следует думать, что любая окрестность точки p , обладающая этим свойством, непременно является нормальной окрестностью. Можно утверждать лишь, что

окрестность V , содержащаяся в некоторой нормальной окрестности точки p , будет нормальной окрестностью этой точки, если любую точку $q \in V$ можно соединить в V с точкой p хотя бы одной геодезической.

Действительно, в этом случае прообраз $V_0 = \text{Exp}^{-1}(V)$ окрестности V при экспоненциальном отображении Exp будет нормальной окрестностью вектора $0 \in M_p$, переходящей при отображении Exp в окрестность V .

Предположим, что в пространстве M_p задан некоторый базис $A_1, \dots, A_m$. Тогда определено линейное изоморфное отображение α арифметического пространства R^m в пространство M , переводящее точку $a = (a^1, \dots, a^m)$ в вектор $a^i A_i$. Пусть

$$E = \text{Exp} \circ \alpha.$$

Отображение E^{-1} представляет собой диффеоморфизм нормальной окрестности $V(p)$ точки p на открытое множество $\alpha^{-1}(V_0) \subset R^m$. Соответствующие локальные координаты $x^1, \dots, x^m$ в точке p (с координатной окрестностью $V(p)$) мы будем называть *нормальными координатами* в точке p (определенными базисом $A_1, \dots, A_m$). Таким образом, по определению,

$$E^{-1}(q) = (x^1(q), \dots, x^m(q)), \quad q \in V(p),$$

откуда вытекает, что для любого вектора $A = a^i A_i$ пространства M_p имеет место равенство

$$x^i(\text{Exp } A) = a^i.$$

Поскольку $\gamma_A(t) = \gamma_{tA}(1)$, отсюда следует, что

в нормальных координатах $x^1, \dots, x^m$ каждая геодезическая γ_A задается в окрестности $V(p)$ линейными функциями

$$x^1(t) = a^1 t, \dots, x^m(t) = a^m t.$$

Значительным усилением доказанной выше теоремы о существовании нормальных окрестностей является следующая теорема, впервые доказанная Уайтхедом:

каждая точка p_0 пространства аффинной связности M обладает окрестностью V , являющейся нормальной окрестностью любой своей точки.

Поскольку любые две точки $p, q \in V$ можно соединить в V единственной геодезической (ибо V является нормальной окрестностью, скажем, точки p), из этой теоремы вытекает, что

каждая точка p_0 пространства аффинной связности обладает окрестностью V , любые две точки которой можно соединить в V единственной геодезической.

Для доказательства теоремы Уайтхеда мы вновь обратимся к рассмотренным выше системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$ и метрике $\rho(p, q)$, определяемой этой системой в окрестности $U = U_{c_1}(p_0)$ точки p_0 .

Для каждой точки $p \in U_c(p_0)$, где c — некоторое положительное число, мы построили выше нормальную окрестность $V(p)$ и положительное число $\eta(p)$, непрерывно зависящее от p и обладающее тем свойством, что сферическая окрестность $U_{\eta(p)}(p)$ содержится в окрестности $V(p)$. Так как $\eta(p)$ непрерывно зависит от p , то для любого положительного $\delta < c$ нижняя грань η_δ чисел $\eta(p)$ на замыкании $\bar{U}_\delta(p_0)$ сферической δ -окрестности $U_\delta(p_0)$ точки p_0 положительна (ибо это замыкание, будучи гомеоморфно замкнутому евклидову шару, компактно). Поскольку при уменьшении δ число η_δ может только увеличиться, существует такое $\delta_0 > 0$, что $\eta(\delta) > 2\delta_0$. Но тогда для любого $\delta \leq \delta_0$ и любой точки $p \in$

$\in U_\delta(p_0)$ будут иметь место включения

$$U_\delta(p_0) \subset U_{2\delta}(p) \subset U_{2\delta_0}(p) \subset U_{\eta(\delta_0)}(p) \subset \\ \subset U_{\eta(\delta)}(p) \subset U_{\eta(p)}(p) \subset V(p).$$

Тем самым доказано, что

существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любого положительного $\delta \leq \delta_0$ и любой точки $p \in U_\delta(p_0)$ окрестность $U_\delta(p_0)$ содержится в некоторой нормальной окрестности точки p .

Отсюда, в частности, следует, что

любые две точки p и q окрестности $U_\delta(p_0)$ можно соединить геодезической.

Действительно, по доказанному, существует такая нормальная окрестность $V(p)$ точки p , что $U_\delta(p_0) \subset V(p)$ и, следовательно, $q \in V(p)$. Поэтому в $V(p)$ существует (и притом только одна) геодезическая $\gamma(t)$, соединяющая точку p с точкой q .

Однако, вообще говоря, эта геодезическая не лежит в окрестности $U_\delta(p_0)$. Чтобы было выполнено и это свойство, мы должны соответствующим образом распорядиться «радиусом» c_1 координатной окрестности $U = U_{c_1}(p_0)$, который у нас пока был совершенно произвольным.

Именно, мы предположим, что число c_1 выбрано настолько малым, что в любой точке $p \in U_{c_1}(p_0)$ матрица

$$\left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(p) x^k(p) \right)$$

положительно определена. Поскольку, по условию, $x^1(p_0) = \dots = x^m(p_0) = 0$, такой выбор числа c_1 всегда возможен.

Покажем, что

при указанном выборе числа c_1 построенная выше геодезическая $\gamma(t)$, соединяющая точки p и q , целиком лежит в окрестности $U_\delta(p_0)$.

Действительно, пусть параметр t на геодезической $\gamma(t)$ выбран так, что $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Полагая $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$, рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ функцию

$$F(t) = \sum_{i=1}^m (x^i(t))^2$$

(квадрат расстояния $\rho(\gamma(t), p_0)$ точки $\gamma(t)$ от точки p_0). Так как функции $x^i(t)$ удовлетворяют уравнениям (1), то

$$\begin{aligned}\ddot{F}(t) &= 2 \sum_{k=1}^m ((\dot{x}^k(t))^2 + \ddot{x}^k(t) x^k(t)) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^m ((\dot{x}^k(t))^2 - \Gamma_{ij}^k(t) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) x^k(t)) = \\ &= 2 \left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(t) x^k(t) \right) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t),\end{aligned}$$

и потому

$$\ddot{F}(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(напомним, что геодезическая $\gamma(t)$ содержится в окрестности $V(p)$, а следовательно, и в окрестности $U = U_{c_1}(p_0)$).

Таким образом, функция $F(t)$ на отрезке $[0, 1]$ выпукла и потому

$$F(t) \leq \max(F(0), F(1)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Но $F(0) = \rho^2(p, p_0) < \delta^2$ и $F(1) = \rho^2(q, p_0) < \delta^2$. Следовательно, $F(t) < \delta^2$, т. е. $\rho(\gamma(t), p_0) < \delta$. Поэтому $\gamma(t) \in U_\delta(p_0)$.

Итак, мы доказали, что для любого $\delta < \delta_0$ окрестность $U_\delta(p_0)$ точки p_0 содержится в некоторой нормальной окрестности $V(p)$ своей произвольной точки p и что, кроме того, каждую точку $q \in U_\delta(p_0)$ можно соединить с точкой p некоторой геодезической, целиком лежащей в $U_\delta(p_0)$. Но тогда, как мы знаем (см. выше), окрестность $U_\delta(p_0)$ является нормальной окрестностью точки p . Тем самым теорема Уайтхеда полностью доказана.

6. Дифференциальные формы связности

Пусть p — произвольная точка пространства аффинной связности M , V_0 — некоторая нормальная окрестность нулевого вектора в пространстве M_p и $V(p) = \text{Exp } V_0$ — соответствующая нормальная окрестность точки p . Как мы знаем, для любой точки $q \in V(p)$ существует в $V(p)$ единственная геодезическая, соединяющая точку p с точкой q . Пусть $\tau_q: M_p \rightarrow M_q$ — параллельный перенос вдоль этой гео-

дезической. Любому вектору $A \in M_q$ мы отнесем вектор $X_q \in M_q$, полагая

$$X_q = \tau_q A.$$

Очевидно, что

векторы X_q составляют на $V(p)$ гладкое векторное поле X .

Мы будем говорить, что поле X получено *параллельным переносом вектора A вдоль геодезических*.

Пусть теперь $A_1, \dots, A_m$ — произвольный базис пространства M_p . Рассмотрим на окрестности $V(p)$ поля $X_1, \dots, X_m$, полученные из векторов $A_1, \dots, A_m$ параллельным переносом вдоль геодезических. Так как в любой точке $q \in V(p)$ векторы $(X_1)_q, \dots, (X_m)_q$ очевидно, линейно независимы, то поля $X_1, \dots, X_m$ составляют базис модуля $\mathcal{O}^1(V(p))$ (см. п. 6 гл. 4). Этот базис мы будем называть *нормальным базисом* (порожденным данным базисом $A_1, \dots, A_m$ пространства M_p). Как правило, этот базис не голономен.

Пусть $\bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^m$ — базис модуля $\mathcal{O}_1(V(p))$, сопряженный нормальному базису $X_1, \dots, X_m$, т. е. такой, что

$$\bar{\omega}^i(X_j) = \delta_j^i,$$

и пусть Γ_{ij}^k — коэффициенты связности ∇ в базисе $X_1, \dots, X_m$:

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\omega}^k(\nabla_{X_i} X_j).$$

Мы положим

$$\bar{\omega}_j^i = \Gamma_{kj}^i \bar{\omega}^k.$$

Пусть, далее, Q — множество всех точек $(t, a^1, \dots, a^m) = (t, a)$, $t \in R$, $a \in R^m$, пространства $R^{m+1} = R \times R^m$, для которых $ta^i A_i \in V_0$. Рассмотрим отображение

$$\hat{E}: Q \rightarrow V(p),$$

определенное формулой

$$\hat{E}(t, a) = E(ta),$$

т. е. формулой

$$\hat{E}(t, a) = \text{Exp}(ta^i A_i).$$

Множество Q открыто в R^{m+1} и потому представляет собой гладкое многообразие (размерности $m+1$) с локальными координатами $t, a^1, \dots, a^m$ (определенными на всем Q). Ясно,

что отображение $\hat{E}$ гладко в любой точке $(t, a) \in Q$ и потому на Q определены линейные дифференциальные формы $\hat{E}^* \bar{\omega}^i$ и $\hat{E}^* \bar{\omega}_j^i$ (см. п. 7 гл. 4).

Зафиксировав числа $a^1, \dots, a^m$, рассмотрим кривую

$$\gamma(t) = \hat{E}(t, a).$$

Эта кривая представляет собой отрезок геодезической γ_A , где $A = a^k A_k$, так что

$$\dot{\gamma}(0) = a^k A_k.$$

Поскольку касательные векторы на геодезической параллельны, отсюда следует, что для любого t

$$\dot{\gamma}(t) = (a^k X_k)_{\gamma(t)}. \quad (1)$$

С другой стороны, из определений немедленно вытекает, что

$$d\hat{E}_{(t, a)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = d\dot{\gamma}_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \dot{\gamma}(t).$$

Поэтому

$$(\hat{E}^* \bar{\omega}^i) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \bar{\omega}^i(a^k X_k) = a^i.$$

Тем самым доказано, что определенная на Q форма $\hat{E}^* \bar{\omega}^i$ имеет вид

$$\hat{E}^* \bar{\omega}^i = a^i dt + \omega^i,$$

где ω^i — некоторая форма от дифференциалов $da^1, \dots, da^m$ (с коэффициентами, зависящими от t).

Аналогично

$$(\hat{E}^* \bar{\omega}_j^i) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \bar{\omega}_j^i(a^k X_k) = \Gamma_{kj}^i a^k.$$

Но, поскольку вектор $(a^k X_k)_{\gamma(t)}$ является касательным вектором геодезической $\gamma(t)$ и для любого j векторы $(X_j)_{\gamma(t)}$ параллельны на $\gamma(t)$, то

$$\nabla_{a^k X_k} (X_j) = \Gamma_{kj}^i a^k X_i = 0,$$

и потому

$$\Gamma_{kj}^i a^k = 0.$$

Тем самым доказано, что коэффициент при dt в форме $\hat{E}^* \bar{\omega}_j^i$ равен нулю, т. е. аналогично формам ω^i эта форма

зависит только от дифференциалов $da^1, \dots, da^m$. Мы положим

$$\omega_j = \hat{E}^* \bar{\omega}_j^i.$$

Построенные формы ω^i, ω_j^i от дифференциалов $da^1, \dots, da^m$ мы будем называть *формами связности*.

Легко видеть, что

при $t=0$ все формы связности обращаются в нуль (т. е. обращаются в нуль все их коэффициенты).

Действительно, в точке $(0, a)$ для любой функции $f \in \mathcal{O}(p)$ имеет место соотношение

$$d\hat{E}_{(0, a)} \left(\frac{\partial}{\partial a^k} \right) f = \left(\frac{\partial}{\partial a^k} (f \circ \hat{E}) \right)_{t=0} = \frac{\partial}{\partial a^k} ((f \circ \hat{E})_{t=0}) = 0,$$

ибо $(f \circ \hat{E})_{t=0} = 0$. (Напомним, что операции $\frac{\partial}{\partial a^k}$ в применении к функции $f \circ \hat{E}$ являются обычными дифференцированиями по координатам.) Таким образом,

$$d\hat{E}_{(0, a)} \left(\frac{\partial}{\partial a^k} \right) = 0,$$

и потому

$$\omega^i \left(\frac{\partial}{\partial a^k} \right) (0, a) = 0, \quad \omega_j^i \left(\frac{\partial}{\partial a^k} \right) (0, a) = 0.$$

Далее, легко видеть, что

для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(V(p))$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} X\bar{\omega}^i(Y) - Y\bar{\omega}^i(X) - \bar{\omega}^i([X, Y]) &= \\ &= \bar{\omega}^k(X) \bar{\omega}_k^i(Y) - \bar{\omega}^k(Y) \bar{\omega}_k^i(X) + K_{kl}^i \bar{\omega}^k(X) \bar{\omega}^l(Y), \\ X\bar{\omega}_j^i(Y) - Y\bar{\omega}_j^i(X) - \bar{\omega}_j^i([X, Y]) &= \\ &= \bar{\omega}_j^k(X) \bar{\omega}_k^i(Y) - \bar{\omega}_j^k(Y) \bar{\omega}_k^i(X) + R_{jkl}^i \bar{\omega}^l(Y), \end{aligned} \quad (2)$$

где K_{kl}^i и R_{jkl}^i — компоненты полей K и R тензоров кручения и кривизны аффинной связности ∇ в нормальном базисе $X_1, \dots, X_m$.

Действительно, так как соотношения (2) линейны по X и Y , то их достаточно проверить лишь для базисных полей $X = X_s, Y = X_r, s, r = 1, \dots, m$. Но, в силу равенств

$$\bar{\omega}^i(X_j) = \delta_j^i, \quad \bar{\omega}_j^i(X_k) = \Gamma_{kj}^i,$$

соотношения (1) для полей $X = X_s$, $Y = X_r$ имеют вид

$$-c_{sr}^i = \Gamma_{rs}^i - \Gamma_{sr}^i + K_{sr}^i,$$

$$X_s \Gamma_{rj}^i - X_r \Gamma_{sj}^i - \Gamma_{kj}^i c_{sr}^k = \Gamma_{sj}^k \Gamma_{rk}^i - \Gamma_{rj}^k \Gamma_{sk}^i + R_{jsr}^i,$$

где c_{sr}^i — коэффициенты разложения поля $[X_s, X_r]$ по базису $X_1, \dots, X_m$:

$$[X_s, X_r] = c_{sr}^i X_i.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что последние соотношения, по существу, совпадают с формулами (2) и (3) п. 1.

Пусть теперь X и Y — векторные поля на Q . Написав соотношения (1) для любой точки $q = \hat{E}(t, a) \in V(p)$, подставив в получившиеся соотношения вместо векторов X_q и Y_q векторы $d\hat{E}_{(t, a)}(X_{(t, a)})$ и $d\hat{E}_{(t, a)}(Y_{(t, a)})$ и используя формулу, определяющую дифференциал $d\hat{E}_{(t, a)}$ (см. п. 6 гл. 4), мы немедленно получим, что соотношения (2) останутся справедливыми и для полей на Q , если только заменить в них формы $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}_j^i$ формами $\hat{E}^* \bar{\omega}^i = a^i dt + \omega^i$ и $\hat{E}^* \bar{\omega}_j^i = \omega_j^i$ соответственно (и если под функциями K_{kl}^i и R_{jkl}^i понимать соответственно функции $K_{kl}^i \circ \hat{E}$ и $R_{jkl}^i \circ \hat{E}$). После очевидных элементарных преобразований мы получим отсюда, что

для любых векторных полей X и Y на Q имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} X(a^i dt(Y)) + X\omega^i(Y) - Y(a^i dt(X)) - Y\omega^i(X) - \\ - a^i dt([X, Y]) - \omega^i([X, Y]) = \\ = (a^k dt(X) + \omega^k(X)) \omega_k^i(Y) - (a^k dt(Y) + \omega^k(Y)) \omega_k^i(X) + \\ + T_{kl}^i (a^k dt(X) + \omega^k(X)) (a^l dt(Y) + \omega^l(Y)), \\ X\omega_j^i(Y) - Y\omega_j^i(X) - \omega_j^i([X, Y]) = \\ = \omega_j^k(X) \omega_k^i(Y) - \omega_j^k(Y) \omega_k^i(X) + \\ + R_{jkl}^i (a^k dt(X) + \omega^k(X)) (a^l dt(Y) + \omega^l(Y)). \end{aligned}$$

Эти соотношения мы применим к полю $X = \frac{\partial}{\partial t}$ и полю Y вида $Y^i \frac{\partial}{\partial a^i}$, где функции Y^i не зависят от t . Поскольку

в этом случае

$$dt(X) = 1, \quad \omega^i(X) = 0, \quad \omega_j^i(X) = 0, \quad dt(Y) = 0$$

и

$$[X, Y] = \frac{\partial}{\partial t} \left(Y^i \left(\frac{\partial}{\partial a^i} \right) - Y^i \frac{\partial}{\partial a^i} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial Y^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial a^i} = 0,$$

мы получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega^i(Y) &= Ya^i + a^k \omega_k^i(Y) + K_{kl}^i a^k \omega^l(Y), \\ \frac{\partial}{\partial t} \omega_j^i(Y) &= R_{jkl}^i a^k \omega^l(Y). \end{aligned} \quad (3)$$

Ясно, что для любой формы $\omega = \omega_i da^i$, коэффициенты ω_i которой зависят от t , формула

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(Y) = \frac{\partial}{\partial t} \omega(Y)$$

определяет для любого t на множестве Q_t точек $a \in R^m$, для которых $(t, a) \in Q$, некоторую форму $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ с коэффициентами $\frac{\partial \omega_i}{\partial t}$. Следовательно, учитывая, что $Ya^i = da^i(Y)$, мы можем соотношения (3) переписать в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^i}{\partial t} &= da^i + a^k \omega_k^i + K_{kl}^i a^k \omega^l, \\ \frac{\partial \omega_j^i}{\partial t} &= R_{jkl}^i a^k \omega^l. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти дифференциальные уравнения впервые были найдены Картаном. Вместе с начальными условиями

$$\omega^i|_{t=0} = \omega_j^i|_{t=0} = 0$$

они позволяют однозначно восстановить формы связности по тензорным полям K и R .

7. Римановы связности

Пусть M — произвольное риманово пространство с полем метрического тензора g (см. п. 10 гл. 4).

Аффинную связность ∇ , заданную на пространстве M , мы будем называть *римановой связностью*, если

1) ее поле тензоров кручения K равно нулю, т. е.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (1)$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$;

2) параллельный перенос вдоль любой кривой на M является изометрическим отображением касательных пространств.

Условие 2) означает, что для любых точек $p, q \in M$ и любой кривой γ , соединяющей точки p и q , имеет место равенство

$$g_q = \tau g_p,$$

где τ — параллельный перенос вдоль кривой γ из точки p в точку q . Отсюда немедленно следует, что условие 2) равносильно выполнению для любого векторного поля $Z \in \mathcal{O}^1(M)$ соотношения

$$\nabla_Z g = 0. \quad (2)$$

Так как операция ∇_Z является дифференцированием алгебры $\mathcal{O}(M)$ (см. п. 4), то для любых полей $X, Y, Z \in \mathcal{O}^1(M)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \nabla_Z (g \otimes X \otimes Y) = \nabla_Z g \otimes X \otimes Y + g \otimes \nabla_Z X \otimes Y + \\ + g \otimes X \otimes \nabla_Z Y. \end{aligned}$$

Производя здесь полное свертывание и вспоминая, что на гладких функциях операция ∇_Z совпадает с операцией Z , мы немедленно получим, что

$$Zg(X, Y) = (\nabla_Z g)(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Отсюда следует, что равенство (2) равносильно выполнению для любых двух векторных полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(M)$ соотношения

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \quad (3)$$

Далее, из равенства (3) и определения поля K следует что

$$\begin{aligned} Zg(X, Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Z Y) + \\ + g([Z, X], Y) + g(K[Z, X], Y). \end{aligned}$$

Поскольку в любой точке $p \in M$ билинейная форма g_p положительно определена и потому невырождена, отсюда вытекает, что условие 1) равносильно (при выполнении условия 2))

равенству

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Z Y) + g([Z, X], Y). \quad (4)$$

Тем самым показано, что

связность ∇ тогда и только тогда является римановой связностью, когда для любых векторных полей $X, Y, Z \in \mathcal{O}^1(M)$ имеют место равенства (3) и (4).

Циклически переставляя в соотношении (4) символы X, Y и Z , мы получим еще два аналогичных соотношения. Складывая первое соотношение с третьим и вычитая второе, мы получим, что

$$2g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X, Y) - Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) + \\ + g(Z, [X, Y]) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]). \quad (5)$$

Поскольку в каждой точке $p \in M$ форма g_p невырождена, это соотношение однозначно определяет поле $\nabla_Z Y$.

Определив с помощью формулы (5) на произвольном римановом пространстве M для любых векторных полей $Z, Y \in \mathcal{O}^1(M)$ векторное поле $\nabla_Z Y$, мы получим некоторое отображение $\nabla_Z: \mathcal{O}^1(M) \rightarrow \mathcal{O}^1(M)$. Поскольку правая часть формулы (5) линейна по Z , отображение ∇_Z линейно зависит от Z . Кроме того, раскрывая выражение $2g(X, \nabla_Z(fY))$, где $f \in \mathcal{O}(M)$, мы немедленно получим, что оно равно $2Zfg(X, Y) + 2fg(X, \nabla_Z Y)$, откуда вытекает, что для отображения ∇_Z справедливо правило дифференцирования произведения fY . Таким образом, соответствие $Z \rightarrow \nabla_Z$ является некоторой аффинной связностью на M . Далее, переставляя в формуле (5) символы X и Y и складывая получающуюся формулу с формулой (5), мы, после сокращений, получим соотношение (3). Аналогично, циклически переставляя в формуле (5) символы X, Y, Z и складывая получающиеся формулы с формулой (5), мы получим соотношение (4). Это означает, что построенная аффинная связность риманова.

Тем самым доказано, что

на произвольном римановом пространстве существует одна и только одна риманова связность ∇ .

В дальнейшем каждое риманово пространство мы будем считать пространством аффинной связности относительно

этой римановой связности ∇ . Тем самым к каждому риманову пространству будут применимы все результаты предыдущих пунктов.

Пусть $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат риманова пространства M и пусть Γ_{ij}^k — коэффициенты связности ∇ в этой системе локальных координат. Как мы знаем (см. п. 1), связность ∇ тогда и только тогда удовлетворяет условию 1) определения римановой связности, когда

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (6)$$

С другой стороны, ясно, что равенство (3) тогда и только тогда имеет место для любых полей X, Y, Z , когда в каждой координатной окрестности оно имеет место для полей вида $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Но, полагая в этом равенстве $X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, мы, как легко видеть, получим соотношение

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj} \Gamma_{ki}^l + g_{li} \Gamma_{kj}^l, \quad (7)$$

где g_{ij} — компоненты тензорного поля g в локальных координатах $x^1, \dots, x^m$. Тем самым мы доказали, что

связность ∇ тогда и только тогда риманова, когда в любой системе локальных координат ее коэффициенты Γ_{jk}^i удовлетворяют соотношениям (6) и (7).

Пусть $\gamma(t)$ — произвольная регулярная кривая и $X(t), Y(t)$ — два векторных поля на кривой $\gamma(t)$. Согласно соотношению (3) для каждого элементарного отрезка кривой имеет место равенство

$$Ag(X, Y) = g(\nabla_A X, Y) + g(X, \nabla_A Y),$$

где X, Y и A — продолжения векторных полей $X(t), Y(t)$ и $\dot{\gamma}(t)$ с рассматриваемого элементарного отрезка на все пространство M . Но, по определению,

$$g(\nabla_A X, Y)(\gamma(t)) = g_{\gamma(t)}((\nabla_A X)_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}) = \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t) \right),$$

и аналогично

$$g(X, \nabla_A Y) = \left(X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t) \right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (Ag(X, Y))(\gamma(t)) &= A_{\gamma(t)}g(X, Y) = \dot{\gamma}(t)g(X, Y) = \\ &= \dot{x}^k(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{\gamma(t)} g(X, Y) = \dot{x}^k(t) \left(\frac{\partial g(X, Y)}{\partial x^k} \right)_{\gamma(t)} = \\ &= \frac{d}{dt} (g(X, Y)(\gamma(t))) = \frac{d}{dt} (g_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)})) = \frac{d}{dt} (X(t), Y(t)). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что

для любых векторных полей $X(t)$ и $Y(t)$ на кривой $\gamma(t)$ имеет место формула

$$\frac{d(X(t), Y(t))}{dt} = \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t) \right) + \left(X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t) \right). \quad (8)$$

З а м е ч а н и е. Формулу (8) можно легко доказать и на основе соотношений (7), пользуясь формулой (1) п. 2. Это доказательство проходит и без предположения регулярности кривой, так что

формула (8) имеет место для любых гладких кривых $\gamma(t)$.

8. Риманов тензор кривизны и формы связности

По определению, поле K тензора кручения для любого риманова пространства M равно нулю. Что же касается поля R тензора кривизны, то вместо него часто бывает удобнее рассматривать поле $R(X, Y, Z, V)$ типа $(0, 4)$ (называемое полем риманова тензора кривизны), которое определяется формулой

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V).$$

Оказывается, что это поле обладает следующими свойствами симметрии:

$$R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V), \quad (1)$$

$$R(X, Y, Z, V) = -R(X, Y, V, Z), \quad (2)$$

$$R(X, Y, Z, V) = R(Z, V, X, Y). \quad (3)$$

Свойство (1) немедленно вытекает из соотношения $R(X, Y) = -R(Y, X)$. Для доказательства свойства (2), очевидно, достаточно доказать его в любой точке $p \in M$, для чего в свою очередь достаточно показать, что для любых трех векторов $A, B, C \in M_p$ имеет место равенство

$$R_p(A, B, C, C) = 0.$$

Пусть V — нормальная окрестность точки p и пусть Z — векторное поле на V , полученное параллельным перенесением вектора C вдоль геодезических (см. начало п. 6). Согласно формуле (5) п. 7

$$2g(Z, \nabla_X Z) = Xg(Z, Z)$$

для любого векторного поля X на V . Но, так как поле Z получено параллельным перенесением, сохраняющим поле g , то

$$g_q(Z_q, Z_q) = g_p(C, C),$$

для любой точки $q \in V$, т. е.

$$g(Z, Z) = \text{const}, \quad \text{на } V$$

и потому

$$Xg(Z, Z) = 0.$$

Таким образом,

$$g(Z, \nabla_X Z) = 0.$$

В силу формулы (3) п. 7 из этого соотношения вытекает, что для любых полей $X, Y \in \mathcal{O}^1(V)$ имеет место равенство $R(X, Y, Z, Z) = g(R(X, Y)Z, Z) =$

$$\begin{aligned} &= g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) = \\ &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) = 0. \end{aligned}$$

Полагая теперь $X_p = A$ и $Y_p = B$, мы и получим отсюда, что $R_p(A, B, C, C) = 0$. Тем самым свойство (2) полностью доказано.

Для доказательства свойства (3) заметим, что в силу тождества Бианки (см. стр. 361) имеет место аналогичное тождество и для риманова тензора кривизны

$$R(X, Y, Z, V) + R(Y, Z, X, V) + R(Z, X, Y, V) = 0. \quad (4)$$

Переставляя в этом соотношении символ V с символами X , Y и Z , складывая получающиеся три соотношения с (4) и учитывая свойства (1) и (2), мы получим соотношение

$$R(V, Y, Z, X) + R(V, Z, X, Y) = 0.$$

Аналогично

$$R(Y, X, V, Z) + R(Y, V, Z, X) = 0.$$

Складывая последние два соотношения и учитывая свойство (2), мы получим

$$R(Y, X, V, Z) + R(V, Z, X, Y) = 0,$$

равносильное соотношению (3). Тем самым свойство (3) также полностью доказано.

Рассмотрим теперь для риманова многообразия M соответствующие формы связности ω^i и ω_j^i . Так как $K = 0$, то уравнения Картана для этих форм имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega^i}{\partial t} &= da^i + a^k \omega_k^i, & \omega^i|_{t=0} &= 0, \\ \frac{\partial \omega_j^i}{\partial t} &= R_{jkl}^i a^k \omega^l, & \omega_j^i|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Дифференциальные формы ω^i и ω_j^i мы строили, исходя из некоторого нормального базиса $X_1, \dots, X_m$ в нормальной окрестности $V = V(p)$ точки p . В случае риманова пространства мы будем дополнительно предполагать, что этот базис *ортонормирован*, т. е. что в точке p , а потому, в силу нормальности базиса и инвариантности тензорного поля g при параллельном переносе и в любой точке $q \in V$, имеют место соотношения

$$g(X_i, X_j) = \delta_{ij}. \quad (6)$$

Таким образом, функции $g(X_i, X_j)$ постоянны на V и, следовательно, $X_k g(X_i, X_j) = 0$ для любого $k = 1, \dots, m$. Отсюда, в силу соотношения (3) п. 7, непосредственно вытекает, что

$$g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_k} X_j) = 0.$$

Но, по определению,

$$g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) = g(\Gamma_{ki}^h X_h, X_j) = \Gamma_{ki}^h \delta_{hj} = \Gamma_{kb}^j,$$

и аналогично

$$g(X_i, \nabla_{X_k} X_j) = \Gamma_{kj}^i.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{ki}^j + \Gamma_{kj}^i = 0,$$

т. е.

$$\bar{\omega}_i^j + \bar{\omega}_{kj}^i = 0,$$

и потому

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (7)$$

Далее, по определению, $\bar{\omega}^i(X_j) = \delta_j^i$. Следовательно, вычисляя значение формы $\bar{\omega}^i \otimes \bar{\omega}^i$ на полях X_j и X_k , мы получим, что

$$(\bar{\omega}^i \otimes \bar{\omega}^i)(X_j, X_k) = \bar{\omega}^i(X_j) \bar{\omega}^i(X_k) = \delta_j^i \delta_k^i.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$g = \sum_i \bar{\omega}^i \otimes \bar{\omega}^i$$

(ибо обе стороны этого равенства принимают на любых полях одни и те же значения) и потому

$$\hat{E}^* g = \sum_i \hat{E}^* \bar{\omega}^i \otimes \hat{E}^* \bar{\omega}^i.$$

Вспомнив, что $\hat{E}^* \bar{\omega}^i = a^i dt + \omega^i$, мы получим отсюда следующее равенство:

$$\begin{aligned} \hat{E}^* g = & \left[\sum_i (a^i)^2 \right] dt \otimes dt + \left(\sum_i a^i \omega^i \right) \otimes dt + \\ & + dt \otimes \left(\sum_i a^i \omega^i \right) + \sum_i \omega^i \otimes \omega^i. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим теперь подмножество Q_0 множества Q , состоящее из точек $(t, a) \in Q$, для которых

$$(a^1)^2 + \dots + (a^m)^2 = 1.$$

Являясь регулярной поверхностью уровня $[\varphi = 1]$ функции $\varphi(t, a) = \sum_i (a^i)^2$, это множество представляет собой гладкое многообразие (см. п. 4 гл. 5). Пусть $\iota: Q_0 \rightarrow Q$ — отображение вложения. Легко видеть, что

$$\iota^* \left(\sum_i a^i \omega^i \right) = 0. \quad (9)$$

Действительно, в силу уравнения Картана и соотношений (7)

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i a^i \omega^i \right) = 2 \sum_i a^i da^i = d \left(\sum_i (a^i)^2 \right) = d\varphi,$$

и потому

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\iota^* \sum_i a^i \omega^i \right) = 2 \iota^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i a^i \omega^i \right) = \iota^* d\varphi = d(\varphi \circ \iota) = 0,$$

ибо $\varphi \circ \iota = 1$. Таким образом, форма $\iota^* \sum_i a^i \omega^i$ не зависит от t . Но при $t=0$ эта форма, в силу начальных условий $\omega^i|_{t=0} = 0$, равна нулю. Следовательно, она равна нулю и при любом t .

Пусть H — ограничение $\hat{E}|_{Q_0} = \hat{E} \circ \iota$ отображения $\hat{E}$ на Q_0 . Тогда

$$H^*g = \iota^*(\hat{E}^*g),$$

откуда, в силу формул (8) и (9), вытекает, что

$$H^*g = dt \otimes dt + \sum_i \omega^i \otimes \omega^i, \quad (10)$$

где под t и ω^i понимаются соответственно функция $t|_{Q_0}$ и форма $\iota^*\omega^i$.

Этим важным соотношением мы неоднократно будем существенно пользоваться. В связи с этим полезно отметить, что

отображение H является диффеоморфизмом множества Q_0^+ точек $(t, a) \in Q_0$, для которых $t > 0$, на «проколотую окрестность» $V \setminus p$.

При этом, если $q = \text{Exp } A$, где $q \in V \setminus p$, и $A \in V_0 \setminus 0$, то

$$q = H(|A|, a), \quad (11)$$

где $a = (a^1, \dots, a^m)$ — строчка координат орта $A/|A|$ в базисе $A_1, \dots, A_m$, с помощью которого строится отображение H (или, точнее, соответствующее отображение E , см. п. 5).

9. Длины кривых и внутренняя метрика

Пусть $\gamma(s)$, $\alpha \leq s \leq \beta$, — произвольная кусочно гладкая кривая (или, точнее, отрезок такой кривой) риманова пространства M . Число

$$J(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(s)| ds$$

мы будем называть *длиной* кривой γ (тот факт, что в некоторых точках отрезка $[\alpha, \beta]$ подынтегральное выражение не определено, не лишает интеграл смысла).

В случае, когда кривая $\gamma(s)$, $\alpha \leq s \leq \beta$, целиком лежит в некоторой нормальной окрестности $V(p)$ точки p и не проходит через точку p , для вычисления длины этой кривой удобно перейти в соответствующее множество Q_0^+ , т. е. ввести в рассмотрение кривую

$$\gamma_0 = H^{-1} \circ \gamma$$

на Q_0^+ , где H — построенный выше диффеоморфизм $Q_0^+ \rightarrow V(p) \setminus p$. Так как $\gamma = H \circ \gamma_0$, то

$$\dot{\gamma}(s) = dH_{\gamma_0(s)}(\dot{\gamma}_0(s)),$$

и потому

$$|\dot{\gamma}(s)|^2 = g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = (H^*g)_{\gamma_0(s)}(\dot{\gamma}_0(s), \dot{\gamma}_0(s)),$$

откуда, в силу формулы (10) п. 8, немедленно следует, что

$$|\dot{\gamma}(s)|^2 = [dt(\dot{\gamma}_0(s))]^2 + \sum_i [\omega^i(\dot{\gamma}_0(s))]^2.$$

С другой стороны, полагая

$$\gamma_0(s) = (t(s), a(s)), \quad \alpha \leq s \leq \beta,$$

где $t(s)$ — числовая положительная функция параметра s , а $a(s)$ — кусочно гладкая (но, вообще говоря, нерегулярная, даже если кривая $\gamma(s)$ регулярна) кривая на сфере $(a^1)^2 + \dots + (a^m)^2 = 1$, мы немедленно получим, что

$$\dot{\gamma}_0(s) = d\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \dot{t}(s)\frac{\partial}{\partial t} + \dot{a}(s),$$

где $\dot{t}(s)$ — производная функции $t(s)$ по s , а $\dot{a}(s) = da\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ — касательный вектор кривой $a(s)$. Таким образом,

$$dt(\dot{\gamma}_0(s)) = \dot{t}(s), \quad \omega^i(\dot{\gamma}_0(s)) = \omega^i(\dot{a}(s)).$$

Отсюда для числа $|\dot{\gamma}(s)|$ мы получаем формулу

$$|\dot{\gamma}(s)|^2 = [\dot{t}(s)]^2 + \sum_i [\omega^i(\dot{a}(s))]^2$$

и, значит, для длины $J(\gamma)$ кривой γ — формулу

$$J(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{t}(s)]^2 + \sum_i [\omega^i(\dot{a}(s))]^2} ds. \quad (1)$$

Две кусочно гладкие кривые $\gamma_1(t)$, $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$, и $\gamma_2(s)$, $\alpha_2 \leq s \leq \beta_2$, мы будем называть *эквивалентными*, если на отрезке $[\alpha_2, \beta_2]$ существует такая монотонная и гладкая вне точек разрыва функция $t(s)$, что $t(\alpha_2) = \alpha_1$, $t(\beta_2) = \beta_1$ и $\gamma_2(s) = \gamma_1(t(s))$ для всех $s \in [\alpha_2, \beta_2]$. Для точек $s_0 \in [\alpha_2, \beta_2]$, в которых функция $t(s)$ имеет разрыв первого рода (скачок), это равенство означает, что

$$\gamma_2(s_0) = \gamma_1(t)$$

для любого t , подчиненного неравенствам

$$t(s_0 - 0) \leq t \leq t(s_0 + 0).$$

Ясно, что отношение эквивалентности кривых рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что совокупность всех кривых распадается на классы попарно эквивалентных кривых.

Поскольку для почти всех s имеет место равенство $\dot{\gamma}_2(s) = \dot{\gamma}_1(t(s)) \dot{t}(s)$, ясно, что

эквивалентные прямые имеют одинаковую длину.

Заметим, что нерегулярная кривая вполне может быть эквивалентна регулярной кривой.

Фиксировав на кривой $\gamma(t)$ некоторую точку $p_0 = \gamma(t_0)$, мы определим функцию $s(t)$, полагая

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Таким образом,

$$s(t) = J(\gamma|_{[t_0, t]}), \quad \text{если } t \geq t_0,$$

и

$$s(t) = -J(\gamma|_{[t, t_0]}), \quad \text{если } t \leq t_0.$$

Ясно, что функция $s(t)$ монотонна и непрерывна. Она постоянна тогда и только тогда, когда кривая $\gamma(t)$ вырождена.

Ее обратная функция $t(s)$ обладает, очевидно, тем свойством, что для любой точки s_0 , в которой она имеет скачок, выполнено равенство $\gamma(t(s_0 - 0)) = \gamma(t(s_0 + 0))$ (ибо кривая $\gamma|_{[t(s_0 - 0), t(s_0 + 0)]}$ вырождена). Поэтому, если кривая γ не вырождена, то определена кусочно гладкая кривая

$$\gamma^*(s) = \gamma(t(s)),$$

эквивалентная кривой γ . Эта кривая γ^* обладает тем свойством, что длина любого ее отрезка $\gamma^*|_{[s_0, s_1]}$ равна соответствующему приращению параметра s :

$$J(\gamma^*|_{[s_0, s_1]}) = s_1 - s_0.$$

О кривых, обладающих этим свойством, мы будем говорить, что параметром на них является длина дуги (отсчитываемая от точки p_0). Таким образом,

любая невырожденная кусочно гладкая кривая эквивалентна кривой, параметром на которой является длина дуги.

В связи с последним предложением полезно отметить следующее очевидное утверждение:

длина дуги тогда и только тогда является параметром на гладкой кривой $\gamma(s)$, когда для любого s вектор $\dot{\gamma}(s)$ единичен, т. е. $|\dot{\gamma}(s)| = 1$.

Поэтому, в частности,

любая гладкая кривая, параметром на которой служит длина дуги, является регулярной кривой.

Таким образом,

любая невырожденная кусочно гладкая кривая эквивалентна некоторой кусочно регулярной кривой.

Для геодезических условие $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ достаточно проверить лишь в одной точке (ибо на геодезической $\gamma(s)$ векторы $\dot{\gamma}(s)$ получаются друг из друга параллельным переносом и поэтому имеют одинаковую длину). В частности,

длина дуги тогда и только тогда является параметром на максимальной геодезической γ_A , когда $|A| = 1$.

Предположим, что рассматриваемое риманово пространство M связно, т. е. что любые две его точки можно соединить в M кусочно гладкой кривой (см. п. 1 гл. 5).

Расстоянием $\rho(p, q)$ между двумя любыми точками p и q связного риманова пространства M мы будем называть нижнюю грань длин всех кусочно гладких (или, что в силу сказанного выше равносильно, всех кусочно регулярных) кривых γ , соединяющих эти точки:

$$\rho(p, q) = \inf_{\gamma} J(\gamma).$$

Оказывается, что

расстояние $\rho(p, q)$ превращает риманово пространство M в метрическое пространство, т. е. это расстояние симметрично:

$$\rho(p, q) = \rho(q, p), \quad p, q \in M,$$

удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\rho(p, r) \leq \rho(p, q) + \rho(q, r), \quad p, q, r \in M,$$

и невырождено, т. е.

$$\rho(p, q) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } p = q.$$

Первые два свойства очевидны. Что же касается третьего, то для его доказательства следует лишь показать, что

$$\rho(p, q) > 0, \quad \text{если } p \neq q,$$

так как ясно, что $\rho(p, q) = 0$ при $p = q$.

Рассмотрим сначала случай, когда точка q принадлежит некоторой нормальной окрестности $V(p)$ точки p . Пусть $\gamma(s)$, $\alpha \leq s \leq \beta$, — произвольная кусочно гладкая кривая в $V(p)$, соединяющая точку p с точкой q , и пусть s_0 — наибольшее значение параметра s , для которого $\gamma(s_0) = p$ (очевидно, что такое s_0 всегда существует). Рассмотрим отрезок $\gamma' = \gamma|_{[s_0, \beta]}$ кривой γ . Ясно, что

$$J(\gamma) \geq J(\gamma').$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ отрезок $\gamma'_\varepsilon = \gamma|_{[s_0 + \varepsilon, \beta]}$ кривой γ' лежит в $V(p) \setminus p$, и потому для его длины справедлива формула (1), из которой вытекает оценка

$$J(\gamma'_\varepsilon) \geq \left| \int_{s_0 + \varepsilon}^{\beta} \dot{t}(s) ds \right| = |t(\beta) - t(s_0 + \varepsilon)|.$$

Поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ число $J(\gamma'_\varepsilon)$ стремится, очевидно, к числу $J(\gamma')$, а число $t(s_0 + \varepsilon)$ — к числу $t(s_0) = 0$, отсюда и из

предыдущего неравенства вытекает, что

$$J(\gamma) \geq t_q, \quad (2)$$

где $t_q = t(\beta)$ — значение координаты $t > 0$, для которого имеет место равенство $H(t_q, \alpha) = q$.

По определению, нормальная окрестность $V(p)$ является образом при отображении Exp некоторой нормальной окрестности V_0 нулевого вектора пространства M_p . Если эта окрестность V_0 состоит из всех векторов $A \in M_p$, для которых $|A| < \delta$, то соответствующую окрестность $V(p)$ мы будем называть *нормальной сферической δ -окрестностью* точки p и будем обозначать ее символом $V_\delta(p)$. Из неравенства (2) и формулы (11) п. 8 непосредственно следует, что если точка q принадлежит границе окрестности $V_\delta(p)$, то для длины любой кривой γ , соединяющей в $V_\delta(p)$ точку p с точкой q , имеет место неравенство

$$J(\gamma) \geq \delta. \quad (3)$$

Поскольку любая кривая в M , исходящая из точки p и не лежащая целиком в $V_\delta(p)$, обязательно пересекает границу окрестности $V_\delta(p)$, отсюда следует, что неравенство (3) имеет место как для произвольной, не лежащей целиком в $V_\delta(p)$ кривой, соединяющей точку p с любой точкой $q \in V_\delta(p)$, так и для произвольной кривой в M , соединяющей точку p с любой точкой $q \notin V_\delta(p)$.

Таким образом, мы доказали, что, какова бы ни была точка q пространства M , для длины любой кривой γ , соединяющей точку p с точкой q , имеет место либо неравенство (2), либо неравенство (3). Следовательно,

$$\rho(p, q) = \inf_{\gamma} J(\gamma) \geq \delta_q,$$

где $\delta_q = t_q$, если $q \in V_\delta(p)$, и $\delta_q = \delta$, если $q \notin V_\delta(p)$. Так как $t_q > 0$, если $q \neq p$, то тем самым невырожденность расстояния ρ полностью доказана.

Построенную метрику $\rho(p, q)$ мы будем называть *внутренней метрикой* риманова пространства M .

Кусочно гладкую кривую γ , соединяющую точки p и q , мы будем называть *кратчайшей*, если она имеет наименьшую длину среди всех кривых на M , соединяющих эти точки,

т. е. если

$$J(\gamma) = \rho(p, q).$$

Вообще говоря, для любых точек p и q кратчайшей, соединяющей эти точки, может и не существовать или, наоборот, таких кратчайших может быть несколько. Однако

если точки p и q достаточно близки, а именно, если точка q принадлежит некоторой нормальной сферической δ -окрестности $V_\delta(p)$ точки p , то существует одна и (с точностью до эквивалентности) только одна кратчайшая, соединяющая эти точки, причем этой кратчайшей служит геодезическая γ_q , соединяющая в $V_\delta(p)$ точку p с точкой q .

Действительно, полагая $q = \text{Exp } A$, где $|A| < \delta$, мы получим, что геодезическая γ_q является отрезком $\gamma_A|_{[0,1]}$ максимальной геодезической γ_A , определенной соотношениями

$$\gamma_A(0) = p, \quad \dot{\gamma}_A(0) = A.$$

Следовательно,

$$J(\gamma_q) = \int_0^1 |\dot{\gamma}_A(t)| dt = \int_0^1 |A| dt = |A|. \quad (4)$$

Поскольку $|A| = t_q$, где, как и выше, t_q — значение координаты t , для которого имеет место равенство $H(t_q, a) = q$, отсюда и из неравенства (2) вытекает, что

$$J(\gamma) \geq J(\gamma_q)$$

для любой кривой γ , соединяющей в $V_\delta(p)$ точки p и q . Кроме того, так как $|A| < \delta$, то ввиду неравенства (3) это неравенство справедливо и для любой кривой γ , соединяющей в M точки p и q . Тем самым доказано, что геодезическая γ_q действительно является кратчайшей в M , соединяющей точки p и q .

Докажем теперь единственность этой кратчайшей. Пусть $\gamma(s)$, $\alpha \leq s \leq \beta$, — произвольная кратчайшая в M , соединяющая точки p и q . Без ограничения общности мы можем считать, что она кусочно регулярна. Так как

$$J(\gamma) = J(\gamma_q) = |A| < \delta,$$

то в силу неравенства (3) кратчайшая γ целиком расположена в окрестности $V_\delta(p)$, и потому для нее справедливо

неравенство (2). Но так как кривая γ является кратчайшей и $J(\gamma) = |A| = t_q$, то это неравенство является на самом деле равенством. С другой стороны, из его доказательства непосредственно следует, что равенство в нем имеет место тогда и только тогда, когда число α является единственным значением параметра $s \in [\alpha, \beta]$, для которого $\gamma(s) = p$, когда $\omega^i(\dot{a}(s)) = 0$ для всех i и всех $s \in [\alpha, \beta]$ (т. е. когда $\dot{a}(s) = 0$ и потому $a(s) = \text{const}$) и, наконец, когда функция $\dot{t}(s)$ неотрицательна. Но в этом случае, в силу кусочной регулярности кривой γ , функция $\dot{t}(s)$ может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек. Поэтому для функции $t(s)$ существует непрерывная обратная функция $s(t)$. Ясно, что кривая $\gamma(s(t))$, эквивалентная кривой $\gamma(t)$, совпадает с геодезической γ_q .

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Предположение, что окрестность $V_\delta(p)$ является сферической окрестностью, нам было нужно лишь для сравнения длины геодезической γ_q с длинами кривых γ , не лежащих целиком в окрестности $V_\delta(p)$. Поэтому для произвольной нормальной окрестности $V(p)$ точки p справедливо следующее утверждение:

геодезическая γ_q , соединяющая точку p с точкой q некоторой нормальной окрестности $V(p)$ точки p , является единственной кратчайшей в $V(p)$, соединяющей точки p и q .

Из формулы (4) и неравенства (3) непосредственно вытекает, что

точка $q \in M$ тогда и только тогда принадлежит нормальной сферической δ -окрестности точки p , когда $\rho(p, q) < \delta$, т. е. когда точка q принадлежит сферической δ -окрестности $U_\delta(p)$ точки p в метрике ρ .

Другими словами,

$$V_\delta(p) = U_\delta(p)$$

при любом $\delta > 0$, для которого окрестность $V_\delta(p)$ определена.

Поскольку окрестности $V_\delta(p)$ образуют, очевидно, фундаментальную систему окрестностей в точке p , отсюда следует, что

окрестности $U_\delta(p)$ образуют фундаментальную систему окрестностей в точке p .

Это означает, что

метрика ρ согласована с топологией пространства M .

Но мы знаем (см. п. 4 гл. 1), что любое связное локально компактное метрическое пространство сепарабельно. Следовательно,

любое связное риманово пространство сепарабельно.

Таким образом, для связных многообразий сепарабельность является не только достаточным (см. п. 10 гл. 4), но и необходимым условием возможности определить это многообразие как риманово пространство.

10. Нормальные выпуклые окрестности

Согласно сказанной в п. 5 теореме Уайтхеда любая точка p_0 риманова пространства M обладает окрестностью $V(p_0)$, являющейся нормальной окрестностью каждой своей точки, причем согласно изложенному там доказательству за окрестность $V(p_0)$ можно принять сферическую окрестность $U_\delta(p_0)$, $\delta < \delta_0$, точки p_0 относительно некоторой определенной в окрестности точки p_0 метрики, зависящей от системы локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в точке p_0 . Из определения этой метрики непосредственно следует, что если мы примем за $x^1, \dots, x^m$ нормальные координаты в точке p_0 , то окрестность $U_\delta(p_0)$ будет образом при отображении Exp сферической окрестности $|A| < \delta$ вектора $0 \in M_p$, т. е. будет нормальной сферической окрестностью $V_\delta(p_0)$. Таким образом,

при достаточно малом $\delta > 0$ нормальная сферическая δ -окрестность $V_\delta(p_0)$ является нормальной окрестностью каждой своей точки.

З а м е ч а н и е. Не следует думать, что метрика, использованная при доказательстве теоремы Уайтхеда (и построенная с помощью нормальных координат в точке p_0), совпадает с метрикой ρ (хотя, как мы и видели, сферические окрестности точки p_0 в обеих метриках совпадают). Эти метрики всего лишь эквивалентны в точке p_0 , т. е. отношение расстояний в обеих метриках между двумя любыми точками p

и q стремится к единице, когда $(p, q) \rightarrow (p_0, p_0)$. Мы этот факт оставим без доказательства.

Нормальную окрестность V точки p_0 мы будем называть *нормальной выпуклой окрестностью*, если она является нормальной окрестностью каждой своей точки и если для любых точек $p, q \in V$ геодезическая γ_{pq} , соединяющая в V точки p и q , является единственной кратчайшей, соединяющей эти точки. Оказывается, что

при достаточно малом $\delta > 0$ нормальная сферическая окрестность $V_\delta(p_0)$ является нормальной выпуклой окрестностью.

Действительно, пусть δ_0 — верхняя грань чисел δ , для которых окрестность $V_\delta(p_0)$ является нормальной окрестностью каждой своей точки, и пусть $\delta < \delta_0/4$. Как мы знаем, содержащаяся в $V_\delta(p_0)$ геодезическая γ_{pq} является единственной кривой в $V_{\delta_0}(p_0)$, имеющей длину $\rho(p, q)$ и соединяющей точки p и q . С другой стороны, любая кривая в M , соединяющая точки p и q и не лежащая в $V_{\delta_0}(p_0)$, имеет, очевидно, длину $> 3\delta$ и потому не может быть кратчайшей, ибо $\rho(p, q) \leq \rho(p, p_0) + \rho(p_0, q) \leq 2\delta$.

Из доказанного утверждения немедленно вытекает, что для любого компактного подмножества S произвольного (связного) риманова пространства M существует такое число $d = d_M$, что любые точки $p, q \in S$, расстояние $\rho(p, q)$ между которыми меньше d , можно соединить в M единственной кратчайшей.

Действительно, в силу компактности существуют такие точки $p_1, \dots, p_r \in S$ и такие числа $\delta_1 > 0, \dots, \delta_r > 0$, что окрестности $V_{2\delta_1}(p_1), \dots, V_{2\delta_r}(p_r)$ являются нормальными выпуклыми окрестностями точек $p_1, \dots, p_r$ соответственно, а окрестности $V_{\delta_1}(p_1), \dots, V_{\delta_r}(p_r)$ покрывают все множество S . Но тогда любое число $d < \min(\delta_1, \dots, \delta_r)$ будет, очевидно, обладать требуемым свойством.

Мы можем теперь доказать, что на любом римановом пространстве каждая кратчайшая является (с точностью до эквивалентности) геодезической.

Действительно, каждая точка кратчайшей принадлежит некоторой нормальной выпуклой окрестности, а отрезок кратчайшей, содержащейся в этой окрестности, является, как мы знаем, геодезической (ибо любой отрезок кратчайшей также является кратчайшей). Следовательно, в окрестности каждой своей точки рассматриваемая кратчайшая является геодезической, и потому вся кратчайшая в целом также является геодезической.

Из этого утверждения, в частности, следует, что *при соответствующем выборе параметра t каждая кратчайшая (соединяющая две различные точки) является регулярной кривой.*

Пусть снова p_0 — произвольная точка риманова пространства M и пусть $V = V_\delta(p_0)$ — некоторая ее нормальная выпуклая окрестность. Тогда для любой точки $p \in V$, любого вектора $B \in M_p$ и любого достаточно малого числа $\sigma > 0$ отрезок длины σ максимальной геодезической γ_B , исходящей из точки p , целиком лежит в V . Мы будем обозначать этот отрезок символом $\gamma_{p, B, \sigma}$, предполагая при этом, что вектор B единичен, так что параметром на этом отрезке геодезической является длина дуги s .

Пусть $x^1, \dots, x^m$ — произвольная система локальных координат, определенная в окрестности V , и пусть $x^1(s), \dots, x^m(s)$, $0 \leq s \leq \sigma$, — функции, осуществляющие параметрическое задание отрезка $\gamma_{p, B, \sigma}$ в этой системе координат и потому удовлетворяющие на отрезке $[0, \sigma]$ дифференциальным уравнениям геодезических

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x^1, \dots, x^m) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x^i(0) = a^i, \quad \dot{x}^i(0) = b^i,$$

где

$$a^i = x^i(p), \quad b^i = Bx^i, \quad i = 1, \dots, m$$

Воспользуемся теоремой о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий. Согласно этой теореме на отрезке $[0, \sigma]$ существуют такие гладкие функции

$$\bar{x}^i(s) = x^i(s; \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^m; \bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m),$$

гладко зависящие от параметров $\bar{a}^1, \dots, \bar{a}^m, \bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m$, что при $\bar{a}^i$, достаточно близких к a^i , и при $\bar{b}^i$, достаточно близких к b^i , функции $\bar{x}^i(s)$ удовлетворяют системе (1) и начальным условиям

$$\bar{x}^i(0) = \bar{a}^i, \quad \dot{\bar{x}}^i(0) = \bar{b}^i.$$

Так как для любого $s \in [0, \sigma]$ числа $\bar{x}^i(s)$ близки к числам $x^i(s)$, то в V существует такая точка $\bar{\gamma}(s)$, что $x^i(\bar{\gamma}(s)) = \bar{x}^i(s)$. Поскольку функции $\bar{x}^i(s)$ удовлетворяют системе (1), отображение $s \rightarrow \bar{\gamma}(s)$ отрезка $[0, \sigma]$ в пространство M является геодезической. Эта геодезическая выходит из точки $\bar{p}$ с координатами $x^i(\bar{p}) = \bar{a}^i$ и имеет в этой точке касательный вектор $\bar{B}$ с координатами $\bar{B}x^i = \bar{b}^i$.

Таким образом, для любой точки $\bar{p}$, достаточно близкой к точке p , и любого вектора $\bar{B} \in M_{\bar{p}}$, достаточно близкого к вектору $B \in M_p$ (в том смысле, что его координаты $\bar{b}^i = \bar{B}x^i$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\bar{p}}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\bar{p}}$ достаточно близки к координатам $b^i = Bx^i$ вектора B в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$), в окрестности V существует геодезическая $\bar{\gamma}(s)$, $0 \leq s \leq \sigma$, выходящая из точки $\bar{p}$ и имеющая в этой точке касательный вектор $\bar{B}$. Если вектор $\bar{B}$ единичен, то эта геодезическая является, по определению, отрезком $\gamma_{\bar{p}, \bar{B}, \sigma}$. Тем самым доказано, что

если для точки $p \in V$, единичного вектора $B \in M_p$ и числа $\sigma > 0$ отрезок $\gamma_{p, B, \sigma}$ определен и содержится в V , то для любой точки $\bar{p}$, достаточно близкой к точке p , любого единичного вектора $\bar{B} \in M_{\bar{p}}$, достаточно близкого к вектору $B \in M_p$, и любого положительного числа $\bar{\sigma} \leq \sigma$ отрезок $\gamma_{\bar{p}, \bar{B}, \bar{\sigma}}$ определен и содержится в V .

Концевая точка $\bar{q} = \gamma_{\bar{p}, \bar{B}, \bar{\sigma}}(\bar{\sigma})$ отрезка $\gamma_{\bar{p}, \bar{B}, \bar{\sigma}}$ и касательный вектор $\bar{C} = \dot{\gamma}_{\bar{p}, \bar{B}, \bar{\sigma}}(\bar{\sigma})$ в этой точке имеют соответственно координаты

$$x^i(\bar{\sigma}; \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^m; \bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m)$$

и

$$\dot{x}^i(\bar{\sigma}; \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^m; \bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m),$$

откуда непосредственно следует, что

точка $\bar{q}$ и вектор $\bar{C}$ непрерывно зависят от точки $\bar{p}$, вектора $\bar{B}$ и числа $\bar{\sigma}$.

Мы применим эти утверждения к доказательству следующей леммы о сходимости:

Пусть p — произвольная точка риманова пространства M и пусть $\gamma_n(t)$, $0 \leq t \leq t_n$, — последовательность геодезических, исходящих из точки p , на каждой из которых параметр t является длиной дуги. Предположим, что касательные векторы $A_n = \dot{\gamma}_n(0)$ геодезических $\gamma_n(t)$ в точке p сходятся при $n \rightarrow \infty$ к некоторому вектору $A_* \in M_p$, а числа t_n сходятся к некоторому числу t_* . Тогда, если исходящая из точки p максимальная геодезическая $\gamma(t) = \gamma_{A_*}(t)$, имеющая в точке p касательный вектор A_* , определена при $t = t_*$, то

$$\gamma_{A_*}(t_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t_n).$$

Действительно, отрезок $\gamma_{A_*}|_{[0, t_*]}$ геодезической γ разбивается на конечное число отрезков γ_i , $i = 1, \dots, r$, каждый из которых лежит в некоторой нормальной выпуклой окрестности V_i и, следовательно, имеет вид $\gamma_{p_i, B_i, \sigma_i}$. Поэтому для достаточно больших n каждый отрезок $\gamma_n|_{[0, t_n]}$ разбивается на лежащие в окрестностях V_i отрезки вида $\gamma_{p_i^n, B_i^n, \sigma_i^n}$, где точки p_i^n близки к точкам p_i , векторы B_i^n близки к векторам B_i , а $\sigma_i^n = \sigma_i$ при $i = 1, \dots, r-1$ и $\sigma_r^n = \sigma_r + t_n - t$. При этом, так как для любого $i > 1$ точки p_i^n и векторы B_i^n непрерывно зависят от точек p_{i-1}^n , векторов B_{i-1}^n и чисел σ_i^n , то точка $\gamma_n(t_n) = p_{r+1}^n$ непрерывно зависит от числа $t_n = \sum_i \sigma_i^n$ и потому при $t_n \rightarrow t_*$ стремится к точке $\gamma_{A_*}(t_*)$.

11. Полные римановы пространства

Связное риманово пространство M мы будем называть *полным*, если любая его максимальная геодезическая определена на всей числовой оси $\mathbf{R}$. Оказывается, что

любые две точки полного риманова пространства можно соединить хотя бы одной кратчайшей.

Действительно, пусть p — произвольная точка связного полного риманова пространства M , r — некоторое неотрицательное число, C_r — множество всех точек $q \in M$, для которых

$$\rho(p, q) \leq r,$$

где ρ — внутренняя метрика на M , и пусть E_r — подмножество множества C_r , состоящее из всех точек $q \in C_r$, которые можно соединить с точкой p хотя бы одной кратчайшей. Поскольку для любой точки $q \in M$ существует такое число r , что $q \in C_r$, для доказательства сформулированного выше утверждения достаточно доказать, что для любого $r \geq 0$ имеет место равенство

$$E_r = C_r. \quad (1)$$

Мы покажем сначала, что

для любого $r \geq 0$ множество E_r компактно.

Поскольку метрическое пространство M сепарабельно, для доказательства компактности множества E_r достаточно доказать, что из любой последовательности точек $q_n \in E_r$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит E_r . По определению, для любой точки $q_n \in E_r$ существует кратчайшая $\gamma_n(t)$, $0 \leq t \leq t_n$, соединяющая точку p с точкой q_n . Предполагая, что параметр t на каждой кратчайшей γ_n является длиной дуги, рассмотрим векторы $A_n = \dot{\gamma}_n(0)$. Так как длины этих векторов равны единице, то, переходя, если необходимо, к подпоследовательности последовательности q_n , мы можем считать, что векторы A_n сходятся к некоторому единичному вектору $A_* \in M_p$. Аналогично, поскольку $0 \leq t_n \leq r$, мы можем считать, что числа t_n сходятся к некоторому числу t_* . При этом в силу условия полноты максимальная геодезическая $\gamma_{A_*}(t)$ определена при $t = t_*$. Таким образом, для кратчайших γ_n (являющихся, как мы знаем, геодезическими) выполнены условия доказанной выше леммы о сходимости. Поэтому $\gamma_n(t_n) \rightarrow \gamma_{A_*}(t_*)$, т. е. $q_n \rightarrow q_*$, где $q_* = \gamma_{A_*}(t_*)$. Поскольку $t_n = \rho(p, q_n)$, отсюда следует, что $t_* = \rho(p, q_*)$, т. е. что геодезическая γ_{A_*} на отрезке $[0, t_*]$ является кратчайшей. Следовательно, точка $q_* = \gamma_{A_*}(t_*)$ принадлежит множеству E_r . Тем самым компактность множества E_r полностью доказана.

Применим теперь «индукцию по континууму». Ясно, что равенство (1) автоматически выполнено при $r=0$. Кроме того, ясно, что если оно выполнено при $r=r_0$, то оно выполнено и для любого $r < r_0$. Наконец, если оно выполнено для всех $r < r_0$, то оно выполнено и при $r=r_0$, так как любая точка $q \in C_{r_0}$ является пределом точек $q_n \in C_{r_n} = E_{r_n} \cap E_{r_0}$, где $r_n < r_0$, а множество E_{r_0} , будучи компактным, замкнуто. Поэтому для доказательства равенства (1) достаточно показать, что если оно выполнено для какого-то числа $r \geq 0$, то оно выполнено и для некоторого большего числа $r + \delta$. При этом можно предполагать, что $C_r \neq M$.

Итак, пусть для некоторого $r \geq 0$ имеет место равенство (1), причем $C_r \neq M$. Обозначая, как и выше, символом $V_\delta(q)$ сферическую δ -окрестность точки $q \in M$ во внутренней метрике ρ , мы в силу компактности множества E_r можем найти такую конечную систему точек $q_1, \dots, q_n$ и положительных чисел $\delta_1, \dots, \delta_n$, что

- 1) окрестности $V_{\delta_i}(q_i)$ покрывают множество E_r ;
- 2) замыкание каждой окрестности $V_{2\delta_i}(q_i)$ компактно;
- 3) каждая окрестность $V_{2\delta_i}(q_i)$ является нормальной выпуклой окрестностью точки q_i .

Пусть

$$V = V_{\delta_1}(q_1) \cup \dots \cup V_{\delta_n}(q_n),$$

и пусть $\dot{V}$ — граница открытого множества V . Так как множества E_r и $\dot{V}$ компактны и не пересекаются (ибо $E_r \subset V$), то функция $\rho(q, \bar{q})$, где $q \in E_r$ и $\bar{q} \in \dot{V}$, имеет положительную нижнюю грань ρ_0 . Любая кусочно регулярная кривая, соединяющая точку p с произвольной точкой $q \notin V$, пересекает границу S_r множества $E_r = C_r$ и границу $\dot{V}$ множества V (или кончается на $\dot{V}$), и потому ее длина не меньше, чем $r + \rho_0$. Это означает, что $\rho(p, q) \geq r + \rho_0$. Поэтому для любого положительного $\delta < \rho_0$ множество $C_{r+\delta}$ целиком содержится в множестве V . Покажем, что при $\delta < \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$ имеет место равенство

$$E_{r+\delta} = C_{r+\delta}. \quad (2)$$

Пусть $q \in C_{r+\delta}$. Если $q \in C_r$, то $q \in E_r \subset E_{r+\delta}$. Поэтому можно предполагать, что $q \notin C_r$. Пусть q' — точка множества S_r , наименее удаленная от точки q (такая точка

существует, ибо множество $S_r \subset E_r$ компактно). Так как любая кусочно регулярная кривая, соединяющая точки p и q , пересекает множество S_r , то ее длина $\geq r + \rho(q, q')$. Это означает, что

$$\rho(p, q) \geq r + \rho(q, q')$$

и потому

$$\rho(q, q') \leq \rho(p, q) - r \leq \delta.$$

Поскольку

$$\delta < \min(\delta_1, \dots, \delta_n),$$

отсюда следует, что точки q и q' лежат в одной и той же нормальной выпуклой окрестности $V_{2\delta_i}(q_i)$ (действительно, так как окрестности $V_{\delta_i}(q_i)$ покрывают E_r , то существует такое i , что $q \in V_{\delta_i}(q_i)$ и потому $q' \in V_\delta(q) \subset V_{2\delta_i}(q_i)$). Следовательно, точки q и q' можно соединить кратчайшей. Комбинируя эту кратчайшую с кратчайшей, соединяющей точки p и q' , мы получим соединяющую точки p и q кривую длины

$$r + \rho(q, q') \leq \rho(p, q),$$

т. е. длины $\rho(p, q)$, и потому кратчайшую. Следовательно,

$$q \in E_{r+\delta}.$$

Тем самым равенство (2), а потому и сформулированное выше утверждение полностью доказаны.

З а м е ч а н и е. При доказательстве компактности множества E_r мы использовали лишь его ограниченность (в метрике ρ) и тот факт, что

$$q_* = \gamma_{A_*}(t_*) \in E_r,$$

не считая, конечно, предположения, что любую его точку можно соединить с точкой p хотя бы одной кратчайшей. В силу доказанного утверждения последнее условие выполнено для любого подмножества E полного пространства M . Поскольку включение

$$q_* \in E$$

в силу равенства

$$q_* = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$$

вытекает из включений

$$q_n \in E$$

и замкнутости множества E , мы получаем отсюда, что
любое ограниченное замкнутое подмножество E полного риманова пространства M компактно.

Для любого связного риманова пространства M расстояние $\rho(p, q)$ можно рассматривать как функцию, заданную на произведении $M \times M$ двух экземпляров многообразия M . Оказывается, что

если точки p и q различны ($p \neq q$) и достаточно близки (содержатся в одной и той же нормальной выпуклой окрестности), то расстояние ρ является гладкой функцией в точке $(p, q) \in M \times M$.

Действительно, если точки p и q содержатся в некоторой нормальной выпуклой окрестности V , то расстояние $\rho(p, q)$ равно длине геодезической, соединяющей в V точку p с точкой q . Но мы знаем, что эта длина равна длине $|A|$ вектора $A \in M_p$, для которого $\text{Exp } A = q$. Поскольку $A \neq 0$ (ибо $q \neq p$), длина $|A|$ является гладкой функцией координат вектора A , т. е. нормальных координат точки q . Таким образом, расстояние $\rho(p, q)$ гладко зависит от точки q . Аналогичное рассуждение показывает, что оно гладко зависит и от точки p . Следовательно, функция ρ гладка в точке $(p, q) \in M \times M$.

В точках вида (p, p) функция $\rho(p, q)$ свойством гладкости уже не обладает. Однако ясно, что ее квадрат $\rho^2(p, q)$ в этих точках гладок (ибо квадрат длины $|A|^2$ вектора A гладок и при $A = 0$).

З а м е ч а н и е. Утверждать, что функция $\rho^2(p, q)$ гладка во всех точках $(p, q) \in M \times M$, нельзя: это неверно даже для таких простых многообразий, как сферы.

12. Условия полноты римановых пространств

Весьма неожиданным является то обстоятельство, что полные римановы пространства можно в классе всех римановых пространств охарактеризовать чрезвычайно простыми, по существу, чисто топологическими свойствами. Именно, оказывается, что

для любого связного риманова пространства M следующие три свойства равносильны:

1) пространство M полно в смысле п. 11, т. е. каждая его максимальная геодезическая определена на всей оси R ;

2) пространство M полно по отношению к внутренней метрике ρ , т. е. каждая фундаментальная последовательность его точек сходится;

3) каждое ограниченное (в метрике ρ) замкнутое подмножество M компактно.

Тот факт, что из свойства 1) вытекает свойство 3), уже был отмечен в п. 11, а тот факт, что из свойства 3) вытекает свойство 2) доказан в п. 4 гл. 1. Таким образом, нам, по существу, нужно лишь доказать, что из свойства 2), т. е. метрической полноты, вытекает свойство 1), т. е. полнота в смысле п. 11.

Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ — произвольная геодезическая метрически полного риманова пространства M , определенная на конечном справа интервале $I = (a, b)$. Для любой последовательности $t_n \in I$ точек интервала I , сходящейся к числу b , последовательность $p_n = \gamma(t_n)$ фундаментальна в M , (ибо в предположении, что параметр t является длиной дуги, $\rho(p_i, p_j) = |t_i - t_j|$) и потому имеет в M определенный предел p . Ясно, что этот предел не зависит от выбора последовательности t_n . Пусть V — произвольная нормальная выпуклая окрестность точки p и пусть $x^1, \dots, x^m$ — некоторая система локальных координат, определенных в окрестности V . Рассмотрим функции $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$, осуществляющие параметрическое задание геодезической $\gamma(t)$ в окрестности V . Эти функции определены на некотором интервале $I_0 \subset I$ с правым концом b , причем предел $\lim_{t \rightarrow b-0} x^i(t)$ существует при любом i . Мы доопределим функции $x^i(t)$ в точке b , полагая

$$x^i(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} x^i(t).$$

Так как на интервале I_0 функции $x^i(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям геодезических

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x^1, \dots, x^m) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad (1)$$

то, поскольку первые производные $\dot{x}^i(t)$ ограничены на I_0 (ибо $\sum_i [\dot{x}^i(t)]^2 = 1$ для любого $t \in I_0$), вторые производные $\ddot{x}^i(t)$ также ограничены на I_0 . Поэтому первые производные $\dot{x}^i(t)$ равномерно непрерывны на I_0 , откуда, в частности, следует, что при $t \rightarrow b - 0$ они имеют определенный предел $\lim_{t \rightarrow b - 0} \dot{x}^i(t)$. Так как по теореме Лагранжа

$$\frac{x^i(t) - x^i(b)}{t - b} = \dot{x}^i(\xi), \quad \text{где } t \leq \xi \leq b,$$

то этот предел совпадает с левой производной $\dot{x}^i(b)$ функции $x^i(t)$ в точке b :

$$\dot{x}^i(b) = \lim_{t \rightarrow b - 0} \dot{x}^i(t). \quad (2)$$

Из существования предела $\lim_{t \rightarrow b - 0} \dot{x}^i(t)$ в силу уравнений (1) вытекает, что предел $\lim_{t \rightarrow b - 0} \ddot{x}^i(t)$ также существует. Применяя к функции $\dot{x}^i(t)$ теорему Лагранжа, мы, как и выше, найдем, что этот предел совпадает с левой производной $\ddot{x}^i(b)$ функции $\dot{x}^i(t)$ в точке b :

$$\ddot{x}^i(b) = \lim_{t \rightarrow b - 0} \ddot{x}^i(t). \quad (3)$$

Полагая теперь

$$B = \dot{x}^i(b) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p,$$

рассмотрим выходящую из точки p геодезическую γ_B , касающуюся в этой точке вектора B . Пусть параметр t на этой геодезической пробегает полуинтервал $b \leq t < c$. Определим на M непрерывную кривую $\bar{\gamma}: (a, c) \rightarrow M$, полагая

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{если } a < t < b, \\ \gamma_B(t), & \text{если } b \leq t < c. \end{cases}$$

При $t \neq b$ функции $\bar{x}^i(t)$, осуществляющие параметрическое задание этой кривой в окрестности V , удовлетворяют уравнениям (1). Кроме того, в точке b существуют производные $\dot{\bar{x}}^i(b) = \dot{x}^i(b)$, причем, поскольку кривая $\gamma_B(t)$ является геодезической, существуют правые производные $\ddot{\bar{x}}^i(b)$ и эти правые производные удовлетворяют уравнениям (1). Но в силу

равенств (2) и (3) левые производные $\ddot{x}^i(b) = \ddot{x}^i(b)$ также удовлетворяют этим уравнениям. Поэтому в точке b существуют обычные вторые производные функций $\bar{x}^i(t)$ и эти производные непрерывны и удовлетворяют системе (1). Как мы знаем (см. п. 5), отсюда вытекает, что кривая $\bar{\gamma}$ регулярна и является геодезической.

Таким образом, любая геодезическая γ , определенная на конечном справа интервале (a, b) , является ограничением некоторой геодезической $\bar{\gamma}$, определенной на большем интервале (a, c) . Аналогично доказывается, что если интервал (a, b) конечен слева, то геодезическую γ можно продолжить на больший интервал (c, b) , $c < a$. Следовательно, каждая максимальная геодезическая непременно должна быть определена на всей оси $\mathbf{R}$. Тем самым равносильность свойств 1), 2) и 3) полностью доказана.

Из доказанного утверждения, в частности, вытекает, что *любое компактное связное риманово пространство полно.*

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

В этой главе излагаются основные аналитико-геометрические теоремы Морса об индексах, позволяющие свести вычисление числа сопряженных точек, расположенных на произвольном интервале, к вычислению отрицательного индекса инерции некоторой квадратичной формы.

После вводных пп. 1—2 в пп. 3—4 излагаются основные понятия поля Якоби и сопряженной точки и доказываются их простейшие свойства.

В пп. 5—7 устанавливается, что поля Якоби являются не чем иным, как полями, минимизирующими некоторый квадратичный функционал.

В пп. 8—10 строится фундаментальная форма Морса.

В пп. 11—12 доказываются основные теоремы Морса.

В п. 13 теоремы Морса переформулируются в более удобном виде.

В дополнении основные результаты главы переносятся на случай задачи с подвижным концом.

1. Геодезические как линии стационарной длины

Вообще говоря, геодезическая не является кратчайшей, т. е. ее длина (между двумя ее произвольными точками) не минимальна. Можно лишь утверждать, что длина достигает на геодезической своего экстремального (стационарного) значения. Доказательству этого утверждения (его точную формулировку см. ниже) и посвящен в основном этот пункт.

Пусть $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow M$ — произвольная регулярная кривая риманова пространства M (точнее, отрезок такой кривой) и пусть p и q — ее концевые точки:

$$p = \gamma(t_1), \quad q = \gamma(t_2).$$

Пусть, далее, G — подмножество плоскости R^2 , состоящее из всех точек $(t, \tau) \in R^2$, для которых

$$t_1(\tau) \leq t \leq t_2(\tau), \quad -\tau_0 < \tau < \tau_0,$$

где τ_0 — некоторое положительное число, а $t_1(\tau)$ и $t_2(\tau)$ — такие гладкие функции, определенные при $|\tau| < \tau_0$, что $t_1(\tau) < t_2(\tau)$ и $t_1(0) = t_1$, $t_2(0) = t_2$.

Поверхность

$$\varphi: G \rightarrow M$$

(точнее, ограничение на G некоторой поверхности, определенной на области в R^2 , содержащей множество G) мы будем называть *вариацией* кривой γ , если кривая

$$\varphi_0(t) = \varphi(t, 0)$$

совпадает с кривой $\gamma(t)$. Каждая вариация φ определяет на M две (вообще говоря, нерегулярные) *концевые кривые*

$$\varphi_p(\tau) = \varphi(t_1(\tau), \tau), \quad \varphi_q(\tau) = \varphi(t_2(\tau), \tau),$$

проходящие через точки p и q соответственно:

$$\varphi_p(0) = p, \quad \varphi_q(0) = q.$$

Если эти кривые вырождаются, т. е. если

$$\varphi_p(\tau) = p, \quad \varphi_q(\tau) = q$$

для всех τ , то поверхность φ мы будем называть *вариацией с закрепленными концами*.

В каждой точке $\varphi(t, \tau) \in M$, где $(t, \tau) \in G$, вариация φ определяет два вектора: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau)$. В частности, в каждой точке $\gamma(t)$ кривой γ вариация φ определяет векторы $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0)$. При этом ясно, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) = \dot{\gamma}(t).$$

Что же касается векторов $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0)$, то они составляют некоторое новое векторное поле

$$X(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0)$$

на кривой $\gamma(t)$. Мы будем говорить, что это векторное поле *ассоциировано* с вариацией φ . С касательными векторами $\dot{\varphi}_p(0)$ и $\dot{\varphi}_q(0)$ кривых $\varphi_p(\tau)$ и $\varphi_q(\tau)$ в точках p и q

оно связано формулами

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_p(0) &= \dot{t}_1(0) \dot{\gamma}(t_1) + X(t_1), \\ \dot{\varphi}_q(0) &= \dot{t}_2(0) \dot{\gamma}(t_2) + X(t_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Следовательно,

если φ является вариацией с закрепленными концами, то

$$X(t_1) = -\dot{t}_1(0) \dot{\gamma}(t_1),$$

$$X(t_2) = -\dot{t}_2(0) \dot{\gamma}(t_2).$$

В частности,

если $t_1(\tau) = t_1$ и $t_2(\tau) = t_2$ для всех τ (т. е. множество G является прямоугольником), то для любой вариации с закрепленными концами

$$X(t_1) = X(t_2) = 0.$$

Очевидно, что это необходимое условие является также и достаточным, т. е.

любое векторное поле $X(t)$ на кривой $\gamma(t)$, для которого

$$X(t_1) = X(t_2) = 0,$$

ассоциировано с некоторой вариацией φ с закрепленными концами, определенной на прямоугольнике

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad -\tau_0 < \tau < \tau_0,$$

где τ_0 — некоторое (достаточно малое) положительное число.

Каждая вариация φ определяет для любого τ кривую

$$\varphi_\tau(t) = \varphi(t, \tau) \quad t_1(\tau) \leq t \leq t_2(\tau),$$

с касательным вектором

$$\dot{\varphi}_\tau(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau).$$

Пусть

$$J(\tau) = \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} |\dot{\varphi}_\tau(t)| dt$$

— длина этой кривой. Дифференцируя функцию $J(\tau)$ по τ и замечая, что, согласно формуле (8) п. 7 гл. 7, производная

по τ функции

$$|\dot{\varphi}_\tau(t)| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau)\right)}$$

выражается формулой

$$\frac{d}{dt} |\dot{\varphi}_\tau(t)| = \frac{1}{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau)\right|} \left(\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right),$$

мы получим, используя формулу (2) п. 2 гл. 7, что

$$\begin{aligned} j(\tau) = \dot{t}_2(\tau) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_2(\tau), \tau) \right| - \dot{t}_1(\tau) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1(\tau), \tau) \right| + \\ + \int_{t_1(\tau)}^t \frac{1}{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau)\right|} \left(\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right) dt. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\tau = 0$ и считая для простоты, что $|\dot{\gamma}(t)| = 1$, т. е. что параметр t на кривой $\gamma(t)$ является длиной дуги, мы получим формулу

$$j(0) = \dot{t}_2(0) - \dot{t}_1(0) + \int_{t_1}^{t_2} \left(\nabla \frac{X}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right) dt.$$

Но, согласно формуле (8) п. 7 гл. 7,

$$\left(\nabla \frac{X}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right) = \frac{d}{dt} (X(t), \dot{\gamma}(t)) - \left(X(t), \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) \right),$$

так что

$$\begin{aligned} j(0) = \dot{t}_2(0) - \dot{t}_1(0) + (X(t_2), \dot{\gamma}(t_2)) - (X(t_1), \dot{\gamma}(t_1)) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \left(X(t), \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Другими словами (см. формулы (1)),

$$j(0) = (\dot{\varphi}_q(0), \dot{\gamma}_q) - (\dot{\varphi}_p(0), \dot{\gamma}_p) - \int_{t_1}^{t_2} \left(X(t), \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) \right) dt, \quad (2)$$

где $\dot{\gamma}_q = \dot{\gamma}(t_2)$ и $\dot{\gamma}_p = \dot{\gamma}(t_1)$ — касательные векторы кривой γ в точках q и p . В частности,

для любой вариации φ с закрепленными концами

$$\dot{J}(0) = - \int_{t_1}^{t_2} \left(X(t), \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) \right) dt. \quad (3)$$

Число $\dot{J}(0)$ называется *первой вариацией длины дуги* кривой γ , соответствующей данной вариации φ кривой γ . Если для любой вариации φ с закрепленными концами оно равно нулю, то кривая γ накрывается *кривой стационарной длины*. Из формулы (3) непосредственно следует, что

любая геодезическая $\gamma(t)$ является кривой стационарной длины.

З а м е ч а н и е. Обратное утверждение также верно, т. е. *любая кривая стационарной длины (параметром на которой является длина дуги) является геодезической.*

Действительно, в силу так называемой основной леммы вариационного исчисления (для применения которой скалярное произведение $\left(X(t), \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) \right)$ в каждой точке $t \in [t_1, t_2]$ следует выразить через локальные координаты) из условия $\dot{J}(0) = 0$ вытекает (ввиду того, что при $t_1 < t < t_2$ вектор $X(t)$ может быть выбран совершенно произвольно), что $\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$, т. е. что кривая $\gamma(t)$ является геодезической.

Для произвольной вариации φ геодезической γ из формулы (2) вытекает, что

$$\dot{J}(0) = (\dot{\varphi}_q(0), \dot{\gamma}_q) - (\dot{\varphi}_p(0), \dot{\gamma}_p). \quad (4)$$

Этой важной формулой мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Рассмотрим, например, функцию $\rho = \rho(p, q)$ на многообразии $M \times M$. Как мы знаем (см. п. 11 гл. 7), функция ρ гладка в точке $(p, q) \in M \times M$, если точки p и q различны, но достаточно близки (содержатся в одной нормальной выпуклой окрестности V). Поэтому для любого вектора $C \in (M \times M)_{(p, q)}$ определено число C_ρ .

Пусть $C = (C_1, C_2)$, где $C_1 \in M_p$, $C_2 \in M_q$ (см. п. 6 гл. 4). Рассмотрим в многообразии $M \times M$ произвольную кривую

$\varphi(\tau)$, $|\tau| < \tau_0$, для которой

$$\varphi(0) = (p, q), \quad \dot{\varphi}(0) = C.$$

Пусть $\varphi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$, где $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau) \in M$. Тогда

$$\varphi_1(0) = p, \quad \dot{\varphi}_1(0) = C_1,$$

$$\varphi_2(0) = q, \quad \dot{\varphi}_2(0) = C_2.$$

Определим числовую функцию $\rho(\tau)$, полагая

$$\rho(\tau) = \rho(\varphi(\tau)) = \rho(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)).$$

Согласно замечанию, сделанному в п. 3 гл. 5, число $C\rho$ равно значению $\dot{\rho}(0)$ производной $\rho(\tau)$ этой функции при $\tau = 0$:

$$C\rho = \dot{\rho}(0).$$

Чтобы вычислить эту производную, мы заметим, что при достаточно малом $\tau_0 > 0$ все точки кривых $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ принадлежат окрестности V , содержащей точки p и q , и потому при любом $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$ точки $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ можно соединить в M единственной кратчайшей $\gamma_\tau(t)$. Приняв за параметр t на этой кратчайшей длину дуги, отсчитываемую от точки $\varphi_1(\tau)$, мы немедленно получим, что формула

$$\varphi(t, \tau) = \gamma_\tau(t), \quad |\tau| < \tau_0, \quad 0 \leq t \leq \rho(\tau),$$

определяет некоторую вариацию $\varphi(t, \tau)$ кратчайшей геодезической $\gamma = \gamma_0$, соединяющей точки p и q . Концевыми кривыми $\varphi_p(\tau)$ и $\varphi_q(\tau)$ этой вариации служат, очевидно, кривые $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, а соответствующая ей функция $J(\tau)$ совпадает с функцией $\rho(\tau)$. Поэтому, согласно формуле (4),

$$\dot{\rho}(0) = (\dot{\varphi}_2(0), \dot{\gamma}_q) - (\dot{\varphi}_1(0), \dot{\gamma}_p) = (C_2, \dot{\gamma}_q) - (C_1, \dot{\gamma}_p).$$

Тем самым мы доказали, что

если точки p и $q \neq p$ риманова пространства M достаточно близки, то для любого вектора $C = (C_1, C_2) \in \in (M \times M)_{(p, q)}$, $C_1 \in M_p$, $C_2 \in M_q$, имеет место равенство

$$C\rho = (C_2, \dot{\gamma}_q) - (C_1, \dot{\gamma}_p), \quad (5)$$

где $\dot{\gamma}_p$ и $\dot{\gamma}_q$ — единичные касательные векторы в точках p и q кратчайшей геодезической γ , соединяющей эти точки.

В дальнейшем формулу (4) нам придется использовать и без предположения, что параметр t на геодезической γ является длиной дуги. Ясно, что в этом случае она приобретает следующий вид:

$$\dot{J}(0) = \frac{(\dot{\varphi}_q(0), \dot{\gamma}_q) - (\dot{\varphi}_p(0), \dot{\gamma}_p)}{l}, \quad (6)$$

где $l = |\dot{\gamma}(t)|$ (как мы знаем, это число не зависит от t), а $\dot{\gamma}_p$ и $\dot{\gamma}_q$ — как и выше, касательные векторы $\dot{\gamma}(t_1)$ и $\dot{\gamma}(t_2)$ геодезической γ в точках p и q соответственно.

2. Вторая вариация длины дуги геодезической

В дальнейшем нам понадобится также *вторая вариация* $\ddot{J}(0)$ длины дуги кривой $\gamma(t)$, однако лишь для случая, когда кривая $\gamma(t)$ является геодезической. Мы вычислим эту вариацию в дополнительном предположении (вполне достаточном для наших целей), что

(а) для любой точки $(t, \tau) \in G$ длина

$$k(\tau) = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right|$$

вектора $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) = \dot{\varphi}_\tau(t)$ отлична от нуля и зависит только от τ (но не зависит от t).

Это предположение означает, что каждая кривая $\varphi_\tau(t)$ регулярна и что параметр t на ней пропорционален длине дуги с коэффициентом пропорциональности $k(\tau) > 0$, зависящим только от τ .

Ввиду этого предположения

$$J(\tau) = k(\tau)(t_2(\tau) - t_1(\tau)),$$

и потому

$$\begin{aligned} \ddot{J}(\tau) = & \ddot{k}(\tau)(t_2(\tau) - t_1(\tau)) + 2\dot{k}(\tau)(\dot{t}_2(\tau) - \dot{t}_1(\tau)) + \\ & + k(\tau)(\ddot{t}_2(\tau) - \ddot{t}_1(\tau)), \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \ddot{J}(0) = & \ddot{k}(0)(t_2(0) - t_1(0)) + 2\dot{k}(0)(\dot{t}_2(0) - \dot{t}_1(0)) + \\ & + k(0)(\ddot{t}_2(0) - \ddot{t}_1(0)). \end{aligned}$$

Но, как мы уже видели (см. формулу для $\frac{d}{dt} |\dot{\varphi}_\tau(t)|$ в п. 1),

$$\dot{k}(\tau) = \frac{1}{k(\tau)} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \ddot{k}(\tau) = & \frac{1}{k(\tau)} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right) + \\ & + \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau), \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right) - \frac{1}{k(\tau)^3} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{k}(0) = \frac{1}{k(0)} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) \right),$$

$$\begin{aligned} \ddot{k}(0) = & \frac{1}{k(0)} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) \right) + \\ & + \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0), \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) \right) - \frac{1}{k(0)^3} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) \right)^2. \end{aligned}$$

Но, согласно формулам (2) и (3) п. 2 гл. 7,

$$\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau),$$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) = & \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau) + \\ & + R_{\varphi(t, \tau)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau) \end{aligned}$$

и потому

$$\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) = \frac{\nabla X}{dt}(t),$$

$$\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0) + R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) X(t).$$

Таким образом,

$$\dot{k}(0) = \frac{1}{k(0)} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right) \quad (1)$$

(эту формулу мы выше уже один раз, по существу, вывели) и

$$\begin{aligned} \ddot{k}(0) = & \frac{1}{k(0)} \left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0), \dot{\gamma}(t) \right) + \\ & + R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), X(t), \dot{\gamma}(t)) + \\ & + \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) - \frac{1}{k(0)^3} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right)^2. \end{aligned}$$

Так как $\ddot{k}(0)$ не зависит от t и $t_2(0) = t_2$, $t_1(0) = t_1$, то

$$\ddot{k}(0)(t_2(0) - t_1(0)) = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{k}(0) dt.$$

С другой стороны, так как кривая $\gamma(t)$ является геодезической (здесь мы впервые используем это предположение), то $\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$ и потому

$$\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0), \dot{\gamma}(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0), \dot{\gamma}(t) \right).$$

Следовательно, переставляя аргументы риманова тензора, мы получим, что

$$\begin{aligned} & \ddot{k}(0)(t_2(0) - t_1(0)) = \\ & = \frac{1}{k(0)} \left[\left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_2, 0), \dot{\gamma}(t_2) \right) - \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1, 0), \dot{\gamma}(t_1) \right) \right] + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{k(0)} \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{k^3(0)} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right)^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Введем теперь в рассмотрение концевые кривые $\varphi_p(\tau)$ и $\varphi_q(\tau)$ вариации φ . Так как

$$\dot{\varphi}_p(\tau) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1(\tau), \tau) \dot{t}_1(\tau) + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1(\tau), \tau),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \dot{\varphi}_p}{d\tau}(\tau) &= \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1(\tau), \tau) [\dot{t}_1(\tau)]^2 + 2 \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1(\tau), \tau) \dot{t}_1(\tau) + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1(\tau), \tau) \ddot{t}_1(\tau) + \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1(\tau), \tau) \end{aligned}$$

и потому

$$\frac{\nabla \dot{\varphi}_p}{d\tau}(0) = 2 \frac{\nabla X}{dt}(t_1) \dot{t}_1(0) + \dot{\gamma}(t_1) \ddot{t}_1(0) + \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1, 0),$$

ибо $\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} (t_1, 0), \dot{\gamma}(t_1) \right) &= \left(\frac{\nabla \dot{\varphi}_p}{d\tau}(0), \dot{\gamma}(t_1) \right) - \\ &- 2 \left(\frac{\nabla X}{dt}(t_1), \dot{\gamma}(t_1) \right) \dot{t}_1(0) - (\dot{\gamma}(t_1), \dot{\gamma}(t_1)) \ddot{t}_1(0) = \\ &= \left(\frac{\nabla \dot{\varphi}_p}{d\tau}(0), \dot{\gamma}(t_1) \right) - 2k(0)k(0)\dot{t}_1(0) - k(0)^2 \ddot{t}_1(0); \end{aligned}$$

в последнем преобразовании мы использовали тот факт, что числа $k(0)$ и $\dot{k}(0)$ не зависят от t , так что

$$k(0) = |\dot{\gamma}(t_1)| \quad \text{и} \quad \dot{k}(0) = \frac{1}{k(0)} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t_1), \dot{\gamma}(t_1) \right).$$

Ясно, что аналогичная формула имеет место и для $\left(\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} (t_2, 0), \dot{\gamma}(t_2) \right)$. Подставляя эти выражения в формулу для $\ddot{k}(0)(t_2(0) - t_1(0))$, мы немедленно получим, что

вторая вариация $\ddot{J}(0)$ длины дуги геодезической $\gamma(t)$ для любой вариации φ , удовлетворяющей предположению (α), выражается формулой

$$\begin{aligned} \ddot{J}(0) &= \frac{1}{k(0)} \left[\left(\frac{\nabla \dot{\varphi}_q}{d\tau}(0), \dot{\gamma}_q \right) - \left(\frac{\nabla \dot{\varphi}_p}{d\tau}(0), \dot{\gamma}_p \right) \right] + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{k(0)} \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k(0)^3} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right)^2 \right\} dt. \quad (2) \end{aligned}$$

3. Якобиевы вариации и поля Якоби

Предполагая для простоты риманово пространство M полным, рассмотрим его произвольную максимальную невырожденную геодезическую $\gamma: R \rightarrow M$. Вариацию

$$\varphi: R \times I \rightarrow M$$

геодезической γ , определенную в полосе $R \times I \subset R^2$, где I — некоторый интервал вида $(-\tau_0, \tau_0)$, мы будем называть *якобиевой вариацией*, если для любого $\tau \in I$ кривая

$$\varphi_\tau(t) = \varphi(t, \tau), \quad t \in R,$$

является геодезической.

Для каждого фиксированного $t_0 \in R$ якобиева вариация φ определяет гладкую (но, вообще говоря, не регулярную) кривую

$$\alpha(\tau) = \varphi(t_0, \tau), \quad \tau \in I,$$

и векторное поле

$$A(\tau) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, \tau), \quad \tau \in I,$$

на кривой $\alpha(\tau)$. Так как

$$A(\tau) = \dot{\varphi}_\tau(t_0),$$

то для любого $t \in I$ вектор $A(\tau)$ однозначно определяет геодезическую $\varphi_\tau(t)$. Это означает, что

кривая $\alpha(\tau)$ и векторное поле $A(\tau)$ однозначно определяют якобиеву вариацию φ .

Кривая $\alpha(\tau)$ и поле $A(\tau)$ связаны с геодезической $\gamma(t)$ соотношениями

$$\alpha(0) = \gamma(t_0), \quad A(0) = \dot{\gamma}(t_0). \quad (1)$$

Ясно, что эти условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы кривая $\alpha(\tau)$ и поле $A(\tau)$ определяли некоторую якобиеву вариацию φ геодезической γ , т. е.

для любой гладкой кривой $\alpha(\tau)$ пространства M и любого векторного поля $A(\tau)$ на кривой $\alpha(\tau)$, связанных с геодезической $\gamma(t)$ соотношениями (1), существует якобиева вариация φ геодезической γ , для которой

$$\alpha(\tau) = \varphi(t_0, \tau), \quad A(\tau) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, \tau).$$

Эта вариация определяется формулой

$$\varphi(t, \tau) = \gamma_{\alpha(\tau), A(\tau)}(t),$$

где $\gamma_{\alpha(\tau), A(\tau)}(t)$ — максимальная геодезическая, проходящая (при $t = t_0$) через точку $\alpha(\tau)$ и имеющая в этой точке касательной вектор $A(\tau)$.

Векторное поле $X(t)$ на геодезической $\gamma(t)$ мы будем называть *полем Якоби*, если существует такая якобиева вариация φ геодезической γ , что

$$X(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0) \quad \text{для любого } t \in R,$$

т. е. если поле $X(t)$ ассоциировано (в смысле п. 1) с вариацией φ . Согласно сказанному выше

любое поле Якоби $X(t)$ на геодезической $\gamma(t)$ однозначно определяется заданием кривой $\alpha(\tau)$ и векторного поля $A(\tau)$, удовлетворяющих соотношениям (1).

Следовательно,

для любых двух векторов $A, B \in M_{\gamma(t_0)}$ существует на геодезической $\gamma(t)$ поле Якоби $X(t)$, обладающее тем свойством, что

$$X(t_0) = A, \quad \frac{\nabla X}{dt}(t_0) = B. \quad (2)$$

Для построения этого поля достаточно построить такую кривую $\alpha(\tau)$, что

$$\alpha(0) = \gamma(t_0), \quad \dot{\alpha}(0) = A,$$

и на этой кривой такое векторное поле $A(\tau)$, что

$$A(0) = \dot{\gamma}(t_0), \quad \frac{\nabla A}{dt}(0) = B.$$

Покажем теперь, что

любое поле Якоби $X(t)$ на геодезической $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t) + R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) = 0. \quad (3)$$

Действительно, пусть $\varphi(t, \tau)$ — яковиева вариация, с которой ассоциировано поле $X(t)$. Применяя к векторному полю $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau)$ на поверхности φ формулу (3) п. 2 гл. 7 и вспоминая, что, согласно формуле (2) п. 2 гл. 7,

$$\frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau),$$

мы получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) - \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau) = \\ = R_{\varphi(t, \tau)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \tau). \end{aligned}$$

Полагая здесь $\tau = 0$ и учитывая равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) = \dot{\gamma}(t),$$

мы немедленно получим уравнение (3) (ибо $\frac{\nabla \dot{\gamma}}{\partial t}(t) = 0$, так как кривая $\gamma(t)$ является геодезической).

Предположим теперь, что на геодезической $\gamma(t)$ задано *поле реперов*, т. е. система m векторных полей $A_1(t), \dots, A_m(t)$, обладающих тем свойством, что для любого $t \in R$ векторы $A_1(t), \dots, A_m(t) \in M_{\gamma(t)}$ образуют базис пространства $M_{\gamma(t)}$ (такую систему можно, например, построить, взяв произвольный базис пространства $M_{\gamma(t_0)}$ и параллельно перенеся его во все точки кривой $\gamma(t)$). Введя в рассмотрение компоненты $X^i(t)$ вектора $X(t)$ в базисе $A_1(t), \dots, A_m(t)$, мы можем уравнение (3) переписать в виде системы m обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных функций $X^1(t), \dots, X^m(t)$. Поэтому, в силу теоремы единственности для решений системы дифференциальных уравнений, каждое решение $X(t)$ уравнения (3) (и, в частности, каждое поле Якоби) однозначно определяется значениями при $t = t_0$ его компонент $X^i(t)$ и их первых производных $\frac{dX^i}{dt}(t)$. Но ясно, что эти значения однозначно определяются условиями (2). Поэтому, несмотря на произвол, существующий в построении кривой $\alpha(\tau)$ и поля $A(\tau)$:

построенное выше по векторам A и B поле Якоби $X(t)$ определяется этими векторами однозначно.

Кроме того,
любое решение уравнения (3) является полем Якоби, ибо каждое такое решение $X(t)$ однозначно определяется векторами $A = X(t_0)$, $B = \frac{\nabla X}{dt}(t_0)$ и потому совпадает с полем Якоби, построенным для этих векторов.

Поскольку уравнение (3) линейно, отсюда вытекает, что множество J_γ всех полей Якоби на геодезической является $2m$ -мерным линейным пространством.

Скалярно умножив уравнение (3) на произвольное поле Якоби $Y(t)$, мы получим равенство

$$\left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t) \right) + R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), Y(t)) = 0.$$

Аналогично

$$\left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} Y(t), X(t)\right) + R_{\gamma(t)}(Y(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) = 0.$$

Но, в силу формулы (3) п. 8 гл. 7,

$$R_{\gamma(t)}(Y(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) = R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), Y(t)).$$

Следовательно,

для любых двух полей Якоби $X(t)$ и $Y(t)$ имеет место равенство

$$\left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t)\right) = \left(X(t), \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} Y(t)\right). \quad (4)$$

Особое значение для нас будут иметь поля Якоби $X(t)$, для которых

$$X(t_0) = 0.$$

Очевидно, что множество $\Lambda_{\gamma}(t_0)$ всех таких полей является линейным подпространством пространства J_{γ} , причем отображение

$$X(t) \rightarrow \frac{\nabla X}{dt}(t_0)$$

представляет собой изоморфизм пространства $\Lambda_{\gamma}(t_0)$ на пространство $M_{\gamma}(t_0)$.

В частности мы видим, что

размерность пространства $\Lambda_{\gamma}(t_0)$ равна m .

Из формулы (4) и формулы (8) п. 7 гл. 7 легко вытекает, что для любых двух полей Якоби $X(t)$ и $Y(t)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t) \right) - \left(X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t) \right) \right] = 0,$$

т. е. равенство

$$\left(\frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t) \right) - \left(X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t) \right) = \text{const}.$$

Если, в частности, $X(t), Y(t) \in \Lambda_{\gamma}(t_0)$, то это выражение равно нулю при $t = t_0$, а потому равно нулю и при любом t . Тем самым доказано, что

для любых полей $X(t), Y(t) \in \Lambda_\gamma(t_0)$ имеет место равенство

$$\left(\frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t)\right) = \left(X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t)\right). \quad (5)$$

Умножим теперь скалярно уравнение (3) на поле $\dot{\gamma}(t)$. Тогда, учитывая свойства симметрии риманова тензора (формула (2) п. 8 гл. 7), мы получим соотношение

$$\left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t), \dot{\gamma}(t)\right) = 0,$$

т. е. соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} (X(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Следовательно,

$$(X(t), \dot{\gamma}(t)) = at + b,$$

где a и b — некоторые постоянные.

Если теперь $X(t) \in \Lambda_\gamma(t_0) \cap \Lambda_\gamma(t_1)$, где $t_0 \neq t_1$, то

$$at_0 + b = at_1 + b = 0,$$

что возможно лишь при $a = b = 0$. Таким образом,

для любого поля $X(t) \in \Lambda_\gamma(t_0) \cap \Lambda_\gamma(t_1)$ имеет место равенство

$$(X(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad (6)$$

т. е. любое такое поле «ортогонально» геодезической $\gamma(t)$.

4. Сопряженные точки

Точки $p_0 = \gamma(t_0)$ и $p_1 = \gamma(t_1)$ геодезической γ (или соответствующие им точки t_0 и t_1 оси R) называются *сопряженными* (на геодезической γ или *относительно* геодезической γ), если на геодезической $\gamma(t)$ существует отличное от нуля поле Якоби $X(t)$, равное нулю в этих точках:

$$X(t_0) = X(t_1) = 0,$$

т. е. если подпространство $\Lambda_\gamma(t_0) \cap \Lambda_\gamma(t_1)$ пространства J_γ отлично от нуля. Размерность

$$\lambda_{t_0}(t_1) = \dim(\Lambda_\gamma(t_0) \cap \Lambda_\gamma(t_1))$$

этого подпространства мы будем называть *индексом* точки $p_1 = \gamma(t_1)$ (или точки t_1) по отношению к точке $p_0 = \gamma(t_0)$ (точке t_0). Таким образом,

точка t_1 тогда и только тогда сопряжена с точкой t_0 , когда ее индекс $\lambda_{t_0}(t_1)$ отличен от нуля.

Значение понятия сопряженных точек обуславливается в первую очередь тем, что

если точки t_0 и t_1 не сопряжены, то для любых векторов $A \in M_{\gamma(t_0)}$ и $B \in M_{\gamma(t_1)}$ существует одно и только одно поле $X(t) \in J_{\gamma}$, для которого

$$X(t_0) = A, \quad X(t_1) = B.$$

Для доказательства этого утверждения мы рассмотрим линейное отображение $\Lambda_{\gamma}(t_1) \rightarrow M_{\gamma(t_0)}$, сопоставляющее каждому полю $X(t) \in \Lambda_{\gamma}(t_1)$ вектор $X(t_0) \in M_{\gamma(t_0)}$. Тот факт, что точки t_0 и t_1 не сопряжены, означает, что это отображение мономорфно и потому изоморфно (ибо размерности пространств $\Lambda_{\gamma}(t_1)$ и $M_{\gamma(t_0)}$ одинаковы). Следовательно, для любого вектора $C \in M_{\gamma(t_0)}$ существует одно и только одно поле $Y(t) \in \Lambda_{\gamma}(t_1)$, для которого $Y(t_0) = C$.

Пусть теперь $X_0(t)$ — произвольное поле из J_{γ} , для которого $X_0(t_1) = B$. Тогда любое другое поле $X(t) \in J_{\gamma}$, обладающее этим свойством, определяется формулой

$$X(t) = X_0(t) + Y(t),$$

где $Y(t)$ — некоторое (однозначно определенное) поле из $\Lambda_{\gamma}(t_1)$. Выбрав теперь поле $Y(t)$ так, чтобы $Y(t_0) = A - X_0(t_0)$, мы, очевидно, и получим искомое поле $X(t)$.

Для того чтобы изучить свойства сопряженных точек, заметим, что при построении полей из $\Lambda_{\gamma}(t_0)$ с помощью якобиевых вариаций мы, пользуясь произволом в выборе кривой $\alpha(\tau)$, можем, очевидно, считать, что кривая $\alpha(\tau)$ вырождена. Таким образом,

каждое поле $X(t) \in \Lambda_{\gamma}(t_0)$ ассоциировано с такой якобиевой вариацией $\varphi(t, \tau)$, что

$$\varphi(t_0, \tau) = \gamma(t_0) \quad \text{для всех } \tau.$$

Якобиевы вариации, обладающие этим свойством, можно, например, задавать формулой

$$\varphi(t, \tau) = \text{Exp}((t - t_0)(\dot{\gamma}(t_0) + \tau A)), \quad (1)$$

где

$$\text{Exp} : M_{p_0} \rightarrow M$$

— экспоненциальное отображение в точке $p_0 = \gamma(t_0)$ (в силу полноты пространства M это отображение определено на всем пространстве M_{p_0}), а A — произвольный вектор пространства M_{p_0} . Действительно, для любого τ кривая $\varphi_\tau(t) = \varphi(t, \tau)$ является геодезической, проходящей при $t = t_0$ через точку p_0 (и имеющей в этой точке касательный вектор $\dot{\gamma}(t_0) + \tau A$).

Из формулы (3) п. 1 гл. 5 непосредственно вытекает, что для каждой такой вариации имеет место соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, \tau) = d \text{Exp}_{A(t, \tau)}((t - t_0) A),$$

где $A(t, \tau) = (t - t_0) \dot{\gamma}(t_0) + \tau A \in M_p$ и где вектор $(t - t_0) A \in M_{p_0}$ рассматривается как касательный вектор линейного пространства M_{p_0} в точке $A(t, \tau)$. Следовательно, ассоциированное с этой вариацией поле Якоби $X(t) \in \Lambda_\gamma(t_0)$ определяется формулой

$$X(t) = d \text{Exp}_{(t - t_0) \dot{\gamma}(t_0)}((t - t_0) A). \quad (2)$$

Пусть $x^1, \dots, x^m$ — нормальные координаты в точке p_0 (относительно некоторого базиса $A_1, \dots, A_m$ пространства M_{p_0}), определенные в нормальной окрестности $V = V(p_0)$ точки p_0 . В этих координатах геодезическая

$$\gamma(t) = \text{Exp}((t - t_0) \dot{\gamma}(t_0))$$

задается функциями

$$x^i(t) = \dot{x}^i(0)(t - t_0), \quad i = 1, \dots, m,$$

а вариация $\varphi(t, \tau)$ — функциями

$$x^i(t, \tau) = (\dot{x}^i(0) + \tau A^i)(t - t_0), \quad i = 1, \dots, m,$$

где $A^i, i = 1, \dots, m$, — координаты вектора A в базисе $A_1, \dots, A_m$. Для компонент $X^i(t)$ поля $X(t)$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\gamma(t)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\gamma(t)}$ отсюда немедленно получается, что

$$X^i(t) = A^i(t - t_0), \quad i = 1, \dots, m.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}\right)^i(t) = A^i + \Gamma_{jk}^i(t) \dot{x}^j(0) A^k(t - t_0), \quad i = 1, \dots, m.$$

В частности,

$$\left(\frac{\nabla X^i}{dt}\right)^i(t_0) = A^i, \quad i = 1, \dots, m,$$

т. е.

$$\frac{\nabla X}{dt}(t_0) = A.$$

Поскольку произвольное поле $X(t) \in \Lambda_\gamma(t_0)$ однозначно определяется вектором $\frac{\nabla X}{dt}(t_0)$, мы получаем отсюда, что

каждое поле Якоби $X(t) \in \Lambda_\gamma(t_0)$ ассоциировано с некоторой вариацией вида (1).

Именно, с вариацией $\varphi(t, \tau)$, для которой $A = \frac{\nabla X}{dt}(t_0)$.

Из этого предложения и формулы (2) непосредственно следует, что

точки $p_0 = \gamma(t_0)$ и $p_1 = \gamma(t_1)$ тогда и только тогда сопряжены (по отношению к геодезической $\gamma(t)$), когда существует такой отличный от нуля вектор $A \in M_{p_0}$, что

$$d \operatorname{Exp}_{(t_1 - t_0) \dot{\gamma}(t_0)}(A) = 0,$$

т. е. когда вектор $(t_1 - t_0) \dot{\gamma}(t_0) \in M_{p_0}$ является критической точкой отображения

$$\operatorname{Exp} : M_{p_0} \rightarrow M.$$

В частности,

точки $p_0, p_1 \in M$ тогда и только тогда сопряжены хотя бы на одной соединяющей их геодезической, когда точка p_1 является образом при экспоненциальном отображении

$$\operatorname{Exp} : M_{p_0} \rightarrow M$$

некоторой критической точки этого отображения.

Применяя теорему Сарда (п. 6 гл. 5), мы немедленно получаем отсюда, что

для любой точки $p_0 \in M$ на многообразии M существуют точки, не сопряженные с точкой p_0 ни на какой соединяющей их геодезической.

С другой стороны, для любой геодезической $\gamma(t)$ (проходящей при $t = t_0$ через точку p_0) при t_1 , достаточно близком к t_0 , вектор $(t_1 - t_0) \dot{\gamma}(t)$ принадлежит нормальной окре-

стности точки 0 пространства M_{p_0} и потому не является критической точкой отображения Exp . Следовательно,

для любой геодезической γ и любой точки $t_0 \in R$ все точки t_1 некоторой окрестности точки t_0 не сопряжены (по отношению к данной геодезической γ) с точкой t_0 .

Именно, этим свойством обладают все точки t_1 , для которых точка $p_1 = \gamma(t_1) = \text{Exp}((t_1 - t_0) \dot{\gamma}(t_0))$ принадлежит некоторой нормальной окрестности точки p_0 . Поскольку любая точка пространства M обладает окрестностью, являющейся нормальной окрестностью каждой своей точки, мы получаем, следовательно, что

каждая точка числовой оси R обладает окрестностью, любые две точки которой не сопряжены (по отношению к данной геодезической γ).

Известным образом отсюда вытекает, что

для любого конечного отрезка $[a, b]$ оси R существует такое число $d > 0$, что при $|t_0 - t| < d$ точки t_0 и t_1 отрезка $[a, b]$ не сопряжены (по отношению к данной геодезической γ).

Мы знаем (см. п. 10 гл. 7), что для любого компактного множества $C \subset M$ существует такое число $d > 0$, что любые две точки $p, q \in C$, для которых $\rho(p, q) < d$, принадлежат одной и той же нормальной выпуклой окрестности и потому их можно соединить единственной кратчайшей γ_{pq} . Согласно сказанному выше,

точки p и q не сопряжены на кратчайшей γ_{pq} .

Найдем теперь все точки t_1 , сопряженные (по отношению к данной геодезической γ) с некоторой фиксированной точкой $t_0 \in R$.

Пусть $X_1(t), \dots, X_m(t)$ — произвольный базис пространства $\Lambda_\gamma(t_0)$. Выбрав на геодезической $\gamma(t)$ поле реперов $A_1(t), \dots, A_m(t)$ (см. выше, п. 3), мы можем написать

$$X_i(t) = X_i^j(t) A_j(t), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

где $X_i^j(t)$ — некоторые гладкие функции.

По определению, точка t_1 тогда и только тогда сопряжена с точкой t_0 , когда существует нетривиальная линейная комбинация полей $X_1(t), \dots, X_m(t)$ с постоянными коэффициентами, равная нулю в точке t_1 . Поэтому

точка t_1 тогда и только тогда сопряжена с точкой t_0 , когда определитель

$$D(t) = \det |X_i^j(t)|$$

равен нулю при $t = t_1$.

Ясно, что (с точностью до постоянного, отличного от нуля множителя) определитель $D(t)$ не зависит от выбора базиса $X_1(t), \dots, X_m(t)$. Пользуясь этим (и предполагая, что точки t_0 и t_1 сопряжены), мы выберем этот базис так, чтобы первые $\lambda = \lambda_{t_0}(t_1)$ его полей составляли базис пространства $\Lambda_\gamma(t_0) \cap \Lambda_\gamma(t_1)$. Тогда $X_i^j(t_1)$ при $1 \leq i \leq \lambda$, $1 \leq j \leq m$, и потому вблизи точки t_1 (т. е. на некотором интервале с центром в этой точке) имеют место равенства

$$X_i^j(t) = (t - t_1) \varphi_i^j(t), \quad 1 \leq i \leq \lambda, \quad 1 \leq j \leq m,$$

где $\varphi_i^j(t)$ — непрерывные функции. Отсюда вытекает, что вблизи точки t_1 имеет место равенство

$$D(t) = (t - t_1)^\lambda \Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — некоторая непрерывная функция.

При этом легко видеть, что

$$\Phi(t_1) \neq 0. \quad (3)$$

Действительно, так как

$$\varphi_i^j(t_1) = \frac{dX_i^j}{dt}(t_1) = \frac{\nabla X_i^j}{dt}(t_1),$$

где $\frac{\nabla X_i^j}{dt}(t_1)$ — j -я компонента вектора $\frac{\nabla X_i}{dt}(t_1)$, то

$$\Phi(t_1) = \begin{vmatrix} \frac{\nabla X_1^1}{dt}(t_1) & \dots & \frac{\nabla X_1^m}{dt}(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\nabla X_\lambda^1}{dt}(t_1) & \dots & \frac{\nabla X_\lambda^m}{dt}(t_1) \\ X_{\lambda+1}^1(t_1) & \dots & X_{\lambda+1}^m(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_m^1(t_1) & \dots & X_m^m(t_1) \end{vmatrix}.$$

Поэтому если $\Phi(t_1) = 0$, то существуют такие, не все равные нулю, числа $c^1, \dots, c^m$, что для полей

$$U(t) = c^1 X_1(t) + \dots + c^\lambda X_\lambda(t),$$

$$V(t) = c^{\lambda+1} X_{\lambda+1}(t) + \dots + c^m X_m(t)$$

(если $\lambda = m$, то $V(t) = 0$) имеет место равенство

$$\frac{\nabla U}{dt}(t_1) = V(t_1).$$

Так как $U(t), V(t) \in \Lambda_\gamma(t_0)$, то, согласно формуле (5) п. 3,

$$\left(\frac{\nabla U}{dt}(t), V(t) \right) = \left(U(t), \frac{\nabla V}{dt}(t) \right),$$

и потому

$$(V(t_1), V(t_1)) = \left(\frac{\nabla U}{dt}(t_1), V(t_1) \right) = \left(U(t_1), \frac{\nabla V}{dt}(t_1) \right) = 0,$$

ибо, по построению, $U(t) \in \Lambda_\gamma(t_1)$. Следовательно, $V(t_1) = 0$, т. е. $V(t) \in \Lambda_\gamma(t_1)$, что возможно, лишь когда поле $V(t)$ тождественно равно нулю. Таким образом,

$$c^{\lambda+1} = \dots = c^m = 0.$$

Кроме того, $\frac{\nabla U}{dt}(t_1) = V(t_1) = 0$, откуда ввиду включения $U(t) \in \Lambda_\gamma(t_1)$ следует, что $U(t)$ тождественно равно нулю, т. е.

$$c^1 = \dots = c^\lambda = 0.$$

Таким образом, вопреки предположению, все числа $c^1, \dots, c^m$ равны нулю. Полученное противоречие доказывает соотношение (3).

Из соотношения (3) ввиду непрерывности функции $\Phi(t)$ непосредственно вытекает, что

вблизи точки t_1 определитель $D(t)$ обращается в нуль только в точке t_1 ,

т. е. что

вблизи точки t_1 нет точек $t \neq t_1$, сопряженных с точкой t_0 .

Поскольку это утверждение справедливо, как мы показали выше, и при $t_1 = t_0$, отсюда следует, что

точки, сопряженные с точкой t_0 , расположены на оси K изолированно, т. е. их множество не имеет в R предельных точек.

Поэтому

на каждом конечном (открытом или замкнутом) интервале I оси R существует лишь конечное число точек, сопряженных с точкой t_0 .

Сумму индексов этих точек мы будем называть индексом интервала I и будем обозначать ее символом $\lambda_{t_0}(I)$.

Замечание. Тот факт, что вблизи точки t_0 нет точек, сопряженных с точкой t_0 , можно доказать и не пользуясь якобиевыми вариациями. Действительно, легко видеть, что вблизи точки t_0 имеет место равенство

$$D(t) = (t - t_0)^m \Psi(t),$$

причем

$$\Psi(t_0) = \det \left| \frac{\nabla X_i^j}{dt}(t_0) \right| \neq 0.$$

Докажем в заключение, что

индекс $\lambda_{t_0}(t_1)$ любой точки $t_1 \neq t_0$ (по отношению к произвольной геодезической γ) не превосходит числа $m - 1$.

Для доказательства этого важного утверждения, очевидно, достаточно доказать, что

для любого числа $t_0 \in R$ на геодезической γ существует поле Якоби $X(t) \in \Lambda_\gamma(t_0)$, не обращающееся в нуль ни в одной точке $t_1 \neq t_0$.

Таким полем является, например, поле

$$X(t) = (t - t_0) \dot{\gamma}(t). \quad (4)$$

Действительно, это поле равно нулю только при $t = t_0$. Кроме того, поскольку кривая γ является геодезической, то

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t) = \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) = 0,$$

и, с другой стороны, в силу свойств симметрии оператора R ,

$$R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) = (t - t_0) R_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Следовательно, поле $X(t)$ удовлетворяет уравнению (3) п. 3, т. е. является полем Якоби.

В дальнейшем поле (4) мы будем называть особым полем Якоби на геодезической γ .

5. Кусочно гладкие и разрывные векторные поля

Для более глубокого изучения полей Якоби и сопряженных точек нам будет удобно несколько обобщить понятие векторного поля на кривой.

Пусть $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, — произвольная регулярная кривая (точнее, отрезок такой кривой; в приложениях развиваемой ниже общей теории кривая γ будет геодезической). Функцию $X(t)$, определенную на отрезке $[a, b]$, значения которой для каждого $t \in [a, b]$ принадлежат пространству $M_{\gamma(t)}$, мы будем называть *кусочно гладким векторным полем на кривой $\gamma(t)$* , если существует такое разбиение

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$$

отрезка $[a, b]$, что на каждом частичном отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ функция $X(t)$ является гладким векторным полем. Каждое такое поле представляет собой не что иное, как кусочно гладкую кривую многообразия M_* , проектирующуюся на данную кривую γ . Поле $X(t)$ на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ мы будем обозначать символом $X_i(t)$. Точки $a_1, \dots, a_n$ мы будем называть *точками излома поля $X(t)$* . Подчеркнем, что эти точки, вообще говоря, зависят от поля $X(t)$ (в частности, их число n может меняться от поля к полю).

Ясно, что в множество всех кусочно гладких полей на кривой $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, естественным образом вносится строение линейного пространства. Мы будем это пространство обозначать символом $\mathfrak{M}_{\gamma}$, или просто $\mathfrak{M}$.

Наряду с пространством $\mathfrak{M}$ нам будет нужно также пространство $\mathfrak{M}'$, состоящее из *разрывных полей $X(t)$* , т. е. функций $X(t) \in M_{\gamma(t)}$, определенных всюду на отрезке $[a, b]$, за исключением конечного числа *точек разрыва* $a_1 < \dots < a_n$ и вне этих точек, удовлетворяющих условию гладкости. Каждое такое поле $X(t)$ можно рассматривать как набор гладких полей $X_i(t)$, заданных соответственно на отрезках $[a_i, a_{i+1}]$. Мы положим

$$X(a_i - 0) = X_{i-1}(a_i), \quad X(a_i + 0) = X_i(a_i).$$

Если $X(a_i - 0) = X(a_i + 0)$, то мы будем считать поле $X(t)$ определенным и в точке a_i согласно формуле

$$X(a_i) = X(a_i - 0) = X(a_i + 0).$$

Ввиду этого соглашения пространство $\mathfrak{M}$ будет, очевидно, подпространством пространства $\mathfrak{M}'$.

Для каждого поля $X(t) \in \mathfrak{M}$ (и даже для каждого поля $X(t) \in \mathfrak{M}'$) векторы $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ при $t \neq a_1, \dots, a_n$ составляют некоторое поле $\frac{\nabla X}{dt}(t) \in \mathfrak{M}'$. Если это поле принадлежит пространству $\mathfrak{M}$, т. е. если для любого $i = 1, \dots, n$ имеет место равенство

$$\frac{\nabla X}{dt}(a_i - 0) = \frac{\nabla X}{dt}(a_i + 0),$$

то поле $X(t) \in \mathfrak{M}$ мы будем называть *дифференцируемым*. Аналогично дифференцируемое поле $X(t)$, для которого поле $\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t)$ принадлежит пространству $\mathfrak{M}$, мы будем называть *дважды дифференцируемым* и т. д.

Вообще говоря, дважды дифференцируемые поля гладкими полями не являются. Однако

если дважды дифференцируемое поле $X(t)$ удовлетворяет уравнению (3) п. 3, то оно гладко, т. е. является полем Якоби.

Действительно (см. в п. 4 гл. 7 аналогичное рассуждение для геодезических), ковариантно дифференцируя уравнение (3) п. 3, мы можем последовательно выразить через поля $X(t)$, $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ и $\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t)$ все высшие ковариантные производные поля $X(t)$. Следовательно, для этого поля существуют все высшие ковариантные производные, откуда непосредственно вытекает, что это поле гладко.

Кусочно гладкое поле $Y(t) \in \mathfrak{M}$ мы будем называть *ковариантным интегралом* поля $X(t) \in \mathfrak{M}'$, если

$$\frac{\nabla Y}{dt}(t) = X(t)$$

для всех t , для которых поле $X(t)$ определено.

Ясно, что если поле $X(t)$ кусочно гладко, то поле $Y(t)$ дифференцируемо.

Далее, легко видеть, что

для любого поля $X(t) \in \mathfrak{M}'$ и любого вектора $A \in M_{\gamma(a)}$ существует одно и только одно поле $Y(t) \in \mathfrak{M}$, являю-

щееся ковариантным интегралом поля $X(t)$ и такое, что $Y(a) = A$.

Построение этого поля на каждом отрезке кривой $\gamma(t)$, не содержащем точек разрыва поля $X(t)$, очевидным образом сводится к решению некоторой неоднородной системы дифференциальных уравнений первого порядка. В точках разрыва эти решения должны быть припасованы друг к другу.

Доказать существование ковариантного интеграла $Y(t)$ можно и без использования дифференциальных уравнений. Действительно, прежде всего ясно, что достаточно доказать существование ковариантного интеграла $Y_0(t)$, равного нулю в точке a , ибо, как легко видеть, ковариантный интеграл $Y(t)$, для которого $Y(a) = A$, выражается через интеграл $Y_0(t)$ согласно формуле

$$Y(t) = Y_0(t) + \tau_t^a A,$$

где $\tau_t^a: M_{\gamma(a)} \rightarrow M_{\gamma(t)}$ — параллельный перенос вдоль рассматриваемой кривой γ .

Рассмотрим теперь произвольное разбиение

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$$

отрезка $[a, t]$ и отнесем ему «интегральную сумму»

$$\sum_{i=0}^n \tau_t^{t_i} X(t_i) (t_{i+1} - t_i),$$

где $\tau_t^{t_i}: M_{\gamma(t_i)} \rightarrow M_{\gamma(t)}$ — параллельный перенос вдоль кривой γ .

Предел интегральных сумм такого рода $\text{гр} : \max_i |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$

(который, очевидно, существует) аналогичен известному из

элементов анализа «определенному интегралу $\int_a^t f(t) dt$ с пере-

менным верхним пределом». Дословно повторяя известные из анализа рассуждения, мы немедленно получим, что этот предел и представляет собой ковариантный интеграл $Y_0(t)$.

Ясно, что свойства ковариантного интеграла $Y_0(t)$ аналогичны свойствам обычного интеграла $\int_a^t f(t) dt$. Не перечисляя

всех этих свойств (поскольку они нам не понадобятся), мы отметим лишь следующее свойство (которое мы будем иметь случай использовать):

при каждом $t \in [a, b]$ для любого поля $X(t) \in \mathfrak{M}$ и любого вектора $B_t \in M_{\gamma(t)}$ имеет место формула

$$(B_t, Y_0(t)) = \int_0^t (B_t, \tau_t^\theta X(\theta)) d\theta, \quad (1)$$

где $Y_0(t)$ — ковариантный интеграл поля $X(t)$, равный нулю в точке a , а $\tau_t^\theta: M_{\gamma(\theta)} \rightarrow M_{\gamma(t)}$ — параллельный перенос вдоль кривой γ .

Для доказательства этой формулы достаточно заметить, что, по определению, левая и правая ее части являются пределами одной и той же суммы

$$\left(B_t, \sum_{i=0}^n \tau_t^{t_i} X(t_i) (t_{i+1} - t_i) \right) = \sum_{i=0}^n (B_t, \tau_t^{t_i} X(t_i)) (t_{i+1} - t_i).$$

Рассмотрим в заключение произвольное семейство $X_\theta(t)$ полей из $\mathfrak{M}'$, зависящих от параметра $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$, где θ_0 — некоторое положительное число.

Мы будем говорить, что поля этого семейства *гладко зависят от параметра θ* , если для любого $t \in [a, b]$, для которого вектор $X_\theta(t)$ определен, его компоненты $X_\theta^i(t)$ в некоторой системе локальных координат $x^1, \dots, x^m$ в точке $\gamma(t)$ являются гладкими функциями параметра θ . Ясно, что это условие не зависит от выбора локальных координат.

Пусть $\frac{\partial X_\theta^i(t)}{\partial \theta}$ — частные производные компонент $X_\theta^i(t)$ по параметру θ . Легко видеть, что производная

$$\frac{\partial X_\theta(t)}{\partial \theta} = \frac{\partial X_\theta^i(t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)}$$

не зависит от выбора координат $x^1, \dots, x^m$ и однозначно определяется полем $X_\theta(t)$. Полученное поле $\frac{\partial X_\theta(t)}{\partial \theta}$ также принадлежит пространству $\mathfrak{M}'$ и гладко зависит от параметра θ . Если поля $X_\theta(t)$ кусочно гладки (принадлежат пространству $\mathfrak{M}$), то поле $\frac{\partial X_\theta(t)}{\partial \theta}$ также принадлежит пространству $\mathfrak{M}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее простое предложение, детальное доказательство которого мы оставляем читателю:

для любых полей $X(t)$, $A(t) \in \mathfrak{M}$ существует такое семейство $X_\theta(t) \in \mathfrak{M}$, гладко зависящее от параметра θ , что

$$X_\theta(t) = X(t), \quad \left. \frac{\partial X_\theta(t)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = A(t).$$

При этом,

если поле $A(t)$ равно нулю в точках a и b , то семейство $X_\theta(t)$ можно построить так, чтобы $X_\theta(a) = X(a)$, $X_\theta(b) = X(b)$ для любого θ .

6. Минимальные векторные поля

Рассмотрим функционал

$$I_a^b(X(t)) = \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) \right] dt,$$

определенный на пространстве $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\gamma$ (тот факт, что в отдельных точках отрезка $[a, b]$ подынтегральное выражение не определено, не мешает, как известно, существованию интеграла). Кривую $\gamma(t)$, на которой рассматриваются поля $X(t) \in \mathfrak{M}$, мы будем предполагать геодезической.

Поле $X(t) \in \mathfrak{M}$ мы будем называть *минимальным*, если

$$I_a^b(X(t)) \leq I_a^b(Y(t))$$

для любого поля $Y(t) \in \mathfrak{M}$, совпадающего на концах отрезка $[a, b]$ с полем $X(t)$, т. е. такого, что

$$Y(a) = X(a), \quad Y(b) = X(b).$$

Предполагая, что минимальные поля существуют, рассмотрим произвольное такое поле $X(t)$. Как мы знаем (см. конец п. 5), для любого кусочно гладкого поля $A(t)$ на геодезической $\gamma(t)$, равного нулю в точках a и b , существует такое семейство $X_\theta(t)$ кусочно гладких полей, гладко зависящих от параметра $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$, что

$$X_\theta(t) = X(t), \quad X_\theta(a) = X(a), \quad X_\theta(b) = X(b),$$

$$\left. \frac{\partial X_\theta(t)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = A(t).$$

Рассмотрим функцию

$$I(\theta) = I_a^b(X_\theta(t)).$$

Дифференцируя эту функцию по θ , мы, как легко видеть, получим (использовав, в частности, свойства симметрии риманова тензора), что

$$I'(\theta) = 2 \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla X_\theta}{dt}(t), \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\nabla X_\theta}{dt}(t) \right) - \right. \\ \left. - R_{\gamma(t)}(X_\theta(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \frac{\partial X_\theta(t)}{\partial t}) \right] dt$$

и, следовательно, что

$$I'(0) = 2 \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla A}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), A(t)) \right] dt.$$

Пусть $Y_0(t)$ — ковариантный интеграл поля

$$- R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t),$$

равный нулю в точке a . Согласно формуле (8) п. 7 гл. 7 (справедливой, очевидно, и для кусочно гладких полей вне их точек излома) имеет место равенство

$$\begin{aligned} - R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), A(t)) &= \\ &= (- R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), A(t)) = \left(\frac{\nabla Y_0}{dt}(t), A(t) \right) = \\ &= \frac{d}{dt}(Y_0(t), A(t)) - \left(Y_0(t), \frac{\nabla A}{dt}(t) \right). \end{aligned}$$

Поскольку, по условию,

$$A(a) = 0 \text{ и } A(b) = 0,$$

отсюда вытекает, что

$$I'(0) = 2 \int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t), \frac{\nabla A}{dt}(t) \right) dt. \quad (1)$$

Но, в силу минимальности поля $X(t)$, функция $I(\theta)$ для любого семейства $X_\theta(t)$ имеет в точке $\theta = 0$ минимум и потому $I'(0) = 0$. Тем самым доказано, что

если поле $X(t)$ минимально, то для любого поля $A(t) \in \mathfrak{M}$, равного нулю в точках a и b , имеет место равенство

$$\int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t), \frac{\nabla A}{dt}(t) \right) dt = 0,$$

где $Y_0(t)$ — ковариантный интеграл поля

$$- R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t),$$

равный нулю в точке a .

Пусть $Z_0(t)$ — ковариантный интеграл поля $\frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t)$, равный нулю в точке a , и пусть $B(t)$ — векторное поле на геодезической $\gamma(t)$, полученное параллельным перенесением вдоль кривой $\gamma(t)$ вектора $\frac{Z_0(b)}{b-a}$. Рассмотрим поле

$$A(t) = Z_0(t) - (t - a) B(t).$$

Ясно, что $A(a) = 0$, $A(b) = 0$, и потому

$$\int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t), \frac{\nabla A}{dt}(t) \right) dt = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\nabla A}{dt}(t) &= \frac{\nabla Z_0}{dt}(t) - B(t) - (t - a) \frac{\nabla B}{dt}(t) = \\ &= \frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t) - B(t), \end{aligned}$$

ибо $\frac{\nabla B}{dt}(t) = 0$. Следовательно,

$$\int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t) - B(t) \right) dt = 0,$$

и потому

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t) - B(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t) - B(t) \right) dt &= \\ &= - \int_a^b \left(B(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t) - B(t) \right) dt = \\ &= - \int_a^b \left(B(t), \frac{\nabla Z_0}{dt}(t) - B(t) \right) dt = \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} (B(t), Z_0(t)) dt + \int_a^b (B(t), B(t)) dt = \\ &= - (B(b), Z_0(b)) + (B(b), B(b))(b - a) = 0 \end{aligned}$$

(мы здесь воспользовались тем, что скалярное произведение $(B(t), B(t))$ не зависит от t и, в частности, равно $(B(b), B(b))$). Этим доказано, что

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) - Y_0(t) - B(t) = 0,$$

т. е. что

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = Y_0(t) + B(t). \quad (2)$$

Поскольку поля $Y_0(t)$ и $B(t)$ дифференцируемы, причем

$$\frac{\nabla Y_0}{dt}(t) = -R(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) \quad \text{и} \quad \frac{\nabla B}{dt}(t) = 0,$$

отсюда непосредственно вытекает, что поле $X(t)$ дважды дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (3) п. 3. Следовательно, это поле гладко и, значит, является полем Якоби. Другими словами, мы доказали, что

любое минимальное поле является полем Якоби.

7. Существование минимальных полей

Доказанные в предыдущем пункте результаты носят условный характер, поскольку вопрос о существовании минимальных полей остается пока открытым. В этом пункте мы покажем, что

если на отрезке $[a, b]$ нет точек, сопряженных с точкой b , то для любого поля $Y(t) \in \mathfrak{M}$ имеет место неравенство

$$I_a^b(X(t)) \leq I_a^b(Y(t)), \quad (1)$$

где $X(t)$ — поле Якоби, принимающее в концах отрезка $[a, b]$ те же значения, что и поле $Y(t)$:

$$X(a) = Y(a), \quad X(b) = Y(b);$$

при этом равенство в формуле (1) имеет место только при $Y(t) = X(t)$.

Другими словами,

при указанном ограничении на отрезок $[a, b]$ любое поле Якоби $X(t)$ минимально.

Эта теорема полностью решает вопрос о существовании (и единственности) минимальных полей, поскольку, как мы знаем, при a , не сопряженном с b , для любых векторов $A \in M_{\gamma(a)}$ и $B \in M_{\gamma(b)}$ существует единственное поле Якоби $X(t)$, для которого

$$X(a) = A, \quad X(b) = B.$$

Пусть $X_1(t), \dots, X_m(t)$ — произвольный базис пространства $\Lambda_{\gamma(b)}$. Сопоставив любой точке $z = (z^i)$ пространства $\mathbf{R}^m$ поле $X_z(t) \in J_{\gamma}$, определенное формулой

$$X_z(t) = X(t) + z^i X_i(t),$$

мы рассмотрим в полосе $[a, b] \times \mathbf{R}^m$ пространства $\mathbf{R}^{m+1}$ криволинейный интеграл (так называемый интеграл Гильберта)

$$G = \int_C \left\{ \left[\left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), \frac{\nabla X_z}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X_z(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X_z(t)) \right] dt + 2 \left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), X_i(t) \right) dz^i \right\},$$

где C — произвольная кривая, принадлежащая этой полосе.

Оказывается, что

интеграл G между двумя любыми точками полосы $[a, b] \times \mathbf{R}^m$ не зависит от пути интегрирования, т. е. его подынтегральное выражение является полным дифференциалом.

Действительно, для любого $i = 1, \dots, m$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^i} \left[\left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), \frac{\nabla X_z}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X_z(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X_z(t)) \right] &= \\ &= 2 \left[\left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), \frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\nabla X_z}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X_z(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \frac{\partial X_z}{\partial z^i}(t)) \right] = \\ &= 2 \left[\left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), \frac{\nabla X_i}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X_z(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X_i(t)) \right] = \\ &= 2 \left[\left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), \frac{\nabla X_i}{dt}(t) \right) + \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X_z(t), X_i(t) \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[2 \left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), X_i(t) \right) \right], \end{aligned}$$

и для любых $i, j = 1, \dots, m$ выражение

$$\frac{\partial}{\partial z^j} \left[2 \left(\frac{\nabla X_z}{dt}(t), X_i(t) \right) \right] = 2 \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \frac{\nabla X_z}{dt}(t), X_i(t) \right) = 2 \left(\frac{\nabla X_j}{dt}(t), X_i(t) \right),$$

в силу формулы (5) п. 3, симметрично по i и j .

Рассмотрим, в частности, в полосе $[a, b] \times \mathbf{R}^m$ кривую C с параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} t &= t, \\ z^i &= z^i(t), \end{aligned} \quad i = 1, \dots, m,$$

где $z^i(t)$ — произвольные кусочно гладкие функции на $[a, b]$, равные нулю в точках a и b . Согласно доказанному, интеграл G принимает на всех таких кривых одно и то же значение G_0 .

С другой стороны, каждая такая кривая определяет на $\gamma(t)$ кусочно гладкое поле

$$Y(t) = X(t) + z^i(t) X_i(t),$$

для которого $Y(a) = A$, $Y(b) = B$. При этом, так как

$$\frac{\nabla Y(t)}{dt} = \frac{\nabla X_z(t)}{dt} \Big|_{z^i = z^i(t)} + z^i(t) X_i(t),$$

то

$$\begin{aligned} G_0 &= \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla X_z(t)}{dz}, \frac{\nabla X_z(t)}{dt} \right) \Big|_{z^i = z^i(t)} - \right. \\ &\quad \left. - R_{\gamma(t)}(Y(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), Y(t)) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\nabla X_z(t)}{dt} \Big|_{z^i = z^i(t)}, \frac{\nabla Y}{dt}(t) - \frac{\nabla X_z(t)}{dt} \Big|_{z^i = z^i(t)} \right) \right] dt \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} I_a^b(Y(t)) - G_0 &= \\ &= \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla Y}{dt}(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t) \right) + \left(\frac{\nabla X_z(t)}{dt}(t), \frac{\nabla X_z(t)}{dt}(t) \right) \Big|_{z^i = z^i(t)} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\nabla X_z(t)}{dt} \Big|_{z^i = z^i(t)}, \frac{\nabla Y}{dt}(t) \right) \right] dt = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\nabla Y}{dt}(t) - \frac{\nabla X_z(t)}{dt} \Big|_{z^i = z^i(t)}, \frac{\nabla Y}{dt}(t) - \frac{\nabla X_z(t)}{dt} \Big|_{z^i = z^i(t)} \right) dt \geq 0, \end{aligned}$$

причем равенство имеет место лишь при

$$\frac{\nabla Y}{dt}(t) = \frac{\nabla X_z(t)}{dt} \Big|_{z^i = z^i(t)},$$

т. е. при $z^i(t) \equiv 0$ (так что, в частности, $G_0 = I_a^b(X(t))$). Тем самым доказано, что для любого поля $Y(t)$ вида $X(t) + z^i(t) X_i(t)$ имеет место неравенство

$$I_a^b(X(t)) \leq I_a^b(Y(t)),$$

причем равенство имеет место лишь при $Y(t) = X(t)$.

Для завершения доказательства остается заметить, что в виде $X(t) + z^i(t) X_i(t)$ можно представить (и притом единственным образом) любое поле $Y(t) \in \mathfrak{M}$, принимающее в точках a и b значения A и B соответственно, ибо для любой точки $t \in (a, b)$ векторы $X_1(t), \dots, X_m(t)$ составляют базис пространства $M_{\gamma(t)}$ (в противном случае некоторая их нетривиальная линейная комбинация была бы равна нулю и потому точка t была бы, вопреки предположению, сопряжена с точкой b).

Поскольку при a , не сопряженной с b , единственным полем Якоби, равным нулю в точках a и b , является поле $X(t) \equiv 0$, из доказанного утверждения вытекает, что

если на отрезке $[a, b]$ нет точек, сопряженных с точкой b , то для любого отличного от нуля поля $X(t) \in \mathfrak{M}$, равного нулю в точках a и b , имеет место неравенство

$$I_a^b(X(t)) > 0. \quad (2)$$

В связи с результатами этого и предыдущего пунктов естественно возникает вопрос о вычислении функционала I_a^b на произвольном поле Якоби. Мы покажем, что

для любого поля Якоби $X(t)$ имеет место равенство

$$I_a^b(X(t)) = \left(\frac{\nabla X}{dt}(b), X(b) \right) - \left(\frac{\nabla X}{dt}(a), X(a) \right). \quad (3)$$

Действительно, умножая уравнение (3) п. 3 на $X(t)$ и интегрируя по t от a до b , мы получим, что

$$\int_a^b \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t), X(t) \right) dt = - \int_a^b R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_a^b(X(t)) &= \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) + \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t), X(t) \right) \right] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), X(t) \right) dt = \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), X(t) \right) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

8. Ломанные поля Якоби

Пусть $\bar{p}$ и $\bar{q}$ — две произвольные точки на геодезической $\gamma(t)$. Для упрощения формул предположим, что параметр t на геодезической $\gamma(t)$ выбран так, чтобы

$$\bar{p} = \gamma(0), \quad \bar{q} = \gamma(1).$$

Пусть, далее,

$$0 \leq \theta < 1$$

и пусть

$$\theta = t_0 < t_1 < \dots < t_s < t_{s+1} = 1. \quad (1)$$

Кусочно гладкое поле $X(t)$, заданное на отрезке $\gamma|_{[0,1]}$ геодезической γ , мы будем называть *ломаным полем Якоби* (с изломами в точках $t_1, \dots, t_s$), если каждое поле

$$X_i(t) = X(t)|_{[t_i, t_{i+1}]}, \quad i = 0, \dots, s,$$

является полем Якоби на отрезке $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$.

Пусть Θ — множество всех ломаных полей Якоби $X(t)$ на отрезке $\gamma|_{[0,1]}$, равных нулю в концах этого отрезка:

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

имеющих изломы в данных точках $t_1, \dots, t_s$ и ортогональных геодезической $\gamma(t)$, т. е. таких, что

$$(X(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1.$$

Ясно, что это множество естественным образом определяется как линейное пространство.

В этом пункте мы опишем некоторую конструкцию, позволяющую построить все поля из Θ и, в частности, найти размерность пространства Θ . При этом мы будем предполагать,

что числа (1) расположены на отрезке $[0, 1]$ достаточно «густо», а именно так, что для любого $i = 0, \dots, s$ точки

$$p_i = \gamma(t_i), \quad p_{i+1} = \gamma(t_{i+1})$$

геодезической $\gamma(t)$ принадлежат некоторой нормальной выпуклой окрестности $V_i \subset M$. В силу этого предположения (см. п. 4)

для любого $i = 0, \dots, s$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ нет точек, сопряженных с точкой t_{i+1} ; в частности, точки t_i и t_{i+1} не сопряжены.

Кроме того,

существует такое число $\delta > 0$, что любые две точки $p, q \in M$, удовлетворяющие при некотором $i = 0, 1, \dots, s$ соотношениям

$$\rho(p_i, p) < \delta, \quad \rho(p_{i+1}, q) < \delta,$$

можно соединить в M единственной кратчайшей.

Действительно, ясно, что любое $\delta > 0$, обладающее тем свойством, что для каждого $j = 0, 1, \dots, s+1$ сферическая δ -окрестность точки p_j содержится в пересечении $V_{j-1} \cap V_j$ окрестностей V_{j-1} и V_j (при $j = 0$ — в окрестности V_0 , а при $j = s+1$ — в окрестности V_s), удовлетворяет этому условию.

В дальнейшем мы будем считать, что такое число $\delta > 0$ раз навсегда выбрано и притом так, что ни для одного $i = 0, 1, \dots, s$ сферические δ -окрестности точек p_i и p_{i+1} не пересекаются.

Предположим теперь, что для любого $i = 1, \dots, s$ в многообразии M выбрано некоторое $m-1$ -мерное подмногообразие P_i , содержащееся в δ -окрестности точки p_i , проходящее через точку p_i и обладающее тем свойством, что геодезическая γ не касается его в точке p_i (т. е. ее касательный вектор $\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}(t_i)$ в этой точке не касается этого подмногообразия). Таким подмногообразием является, например, содержащаяся в δ -окрестности точки p_i часть поверхности уровня $[f=0]$ любой гладкой функции f , для которой $f(p_i) = 0$ и $(df)_{p_i}(\dot{\gamma}_i) \neq 0$ (скажем, каждой локальной координаты x^j , для которой $\dot{\gamma}_i x^j \neq 0$). Мы будем предполагать подмногообразия

$$P_1, \dots, P_s \quad (2)$$

раз навсегда фиксированными.

Число $\delta > 0$ мы будем дополнительно считать столь малым, чтобы на каждом многообразии P_i , существовала система локальных координат

$$z_i^1, \dots, z_i^{m-1}, \quad (3)$$

координатной окрестностью которой является все многообразие P_i . Мы будем считать, что координаты (3) равны нулю в точке p_i , и будем считать их также раз навсегда выбранными.

Пусть U_i — открытое множество пространства R^{m-1} , являющееся образом многообразия P_i при координатном гомеоморфизме, определенном координатами (3), и пусть

$$U = U_1 \times \dots \times U_s$$

— прямое произведение множеств $U_1, \dots, U_s$. Множество U представляет собой открытое подмножество $s(m-1)$ -мерного арифметического пространства $R^{s(m-1)}$ и каждая его точка $z = (z_i^k)$, $i = 1, \dots, s$; $k = 1, \dots, m-1$, определяет s точек $q_i \in P_i$, $i = 1, \dots, s$, связанных с точкой z соотношениями

$$z_i^k(q_i) = z_i^k, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

Точки q_i , рассматриваемые как точки пространства M , обладают тем свойством, что

$$\rho(p_i, q_i) < \delta, \quad i = 1, \dots, s,$$

и потому для любого $i = 1, \dots, s-1$ точки q_i и q_{i+1} можно соединить в M единственной кратчайшей. Кроме того, точку $p_0 = \gamma(\theta)$ можно соединить единственной кратчайшей с точкой q_1 , а точку q_s — с точкой $\bar{q} = \gamma(1)$. Все эти кратчайшие составляют некоторую кусочно гладкую кривую — *геодезическую ломаную*, соединяющую точку p_0 с точкой $\bar{q}$. Мы будем обозначать эту ломаную символом u^z , а ее длину — символом $J(z)$. Параметр t на кривой u^z мы выберем пропорциональным длине $s^z(t)$ дуги кривой u^z от точки p_0 до точки $u^z(t)$, а именно так, чтобы

$$s^z(t) = \frac{J(z)}{1-\theta} (t - \theta).$$

При таком выборе параметра

$$u^z(\theta) = p_0, \quad u^z(1) = \bar{q}.$$

Значение параметра t , соответствующее точке q_i , мы будем обозначать символом $t_i(z)$, $i = 1, \dots, s$, так что

$$u^z(t_j(z)) = q_i.$$

Мы введем также функции $t_0(z)$ и $t_{s+1}(z)$, считая, что $t_0(z) = 0$ и $t_{s+1}(z) = 1$ при любом $z \in U$. Ясно, что для каждого $j = 0, 1, \dots, s+1$ функции $t_i(z)$ являются гладкими функциями точки $z \in U$. Поскольку параметр t линейно выражается через длину дуги, каждый отрезок

$$u_i^z(u) = u^z(t) \big|_{[t_i(z), t_{i+1}(z)]}, \quad i = 0, 1, \dots, s,$$

ломаной u^z является геодезической.

Определим теперь для любой точки $z \in R^{s(m-1)}$ и любого $i = 0, 1, \dots, s$ вариацию φ_i^z геодезической $\gamma \big|_{[t_i, t_{i+1}]}$, полагая

$$\varphi_i^z(t, \tau) = u^{\tau z}(t), \quad |\tau| < \tau_0, \quad t_i(\tau z) \leq t \leq t_{i+1}(\tau z),$$

где τ_0 — такое достаточно малое положительное число, что $\tau z \in U$ при $|\tau| < \tau_0$ (такое число τ_0 существует, ибо множество U открыто в пространстве $R^{s(m-1)}$ и содержит точку 0). Поскольку кривая $u^{\tau z}(t)$ при $t_i(\tau z) \leq t \leq t_{i+1}(\tau z)$ является геодезической, вариация φ_i^z является якобиевой вариацией (точнее, ограничением некоторой якобиевой вариации на множестве точек (t, τ) , для которых $|\tau| < \tau_0$, $t_i(\tau z) \leq t \leq t_{i+1}(\tau z)$). Поэтому ассоциированное с ней векторное поле $X_i^z(t)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, является полем Якоби.

Пусть $t_i^z(\tau) = t_i(\tau z)$ и пусть

$$a_i^z(\tau) = u^{\tau z}(t_i^z(\tau)), \quad |\tau| < \tau_0,$$

— левая концевая кривая вариации φ_i^z . Тогда, как мы знаем (см. п. 1),

$$\dot{a}_i^z(0) = \dot{t}_i^z(0) \dot{\gamma}_i + X_i^z(t_i), \quad (4)$$

где $\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}(t_i)$. Но та же кривая служит (при $i > 0$) правой концевой кривой вариации φ_{i-1}^z , так что

$$\dot{a}_i^z(0) = \dot{t}_i^z(0) \dot{\gamma}_i + X_{i-1}^z(t_i).$$

Сравнивая эти выражения, мы получим, что для любого $i = 1, \dots, s$ имеет место равенство

$$X_{i-1}^z(t_i) = X_i^z(t_i),$$

показывающее, что поля $X_i^z(t)$ составляют на отрезке $[\theta, 1]$ некоторое ломаное поле Якоби $X^z(t)$. Ясно, что в точках $t = \theta$ и $t = 1$ это поле равно нулю:

$$X^z(\theta) = 0, \quad X^z(1) = 0.$$

Далее, ввиду нашего выбора параметра t на кривых u^z функция $k(\tau)$, соответствующая вариации φ_i^z (см. п. 2), выражается, очевидно, формулой

$$k(\tau) = \frac{J^z(\tau)}{1 - \theta}, \quad (5)$$

где

$$J^z(\tau) = J(\tau z).$$

В частности, эта функция не зависит от t (и от i). Таким образом, вариация φ_i^z удовлетворяет предположению (α) из п. 2 и потому для нее справедливы все результаты п. 2. В частности,

$$\dot{k}(0) = \frac{1}{k(0)} \left(\frac{\nabla X_i^z}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right)$$

(см. п. 2, формула (1)). Но согласно формуле (5)

$$\dot{k}(0) = \frac{j^z(0)}{1 - \theta},$$

так что

$$\left(\frac{\nabla X_i^z}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right) = \frac{k(0)}{1 - \theta} j^z(0)$$

для любого $i = 0, 1, \dots, s$.

С другой стороны,

$$J^z(\tau) = J_0^z(\tau) + \dots + J_s^z(\tau),$$

где

$$J_i^z(\tau), \quad i = 0, 1, \dots, s,$$

— длина кривой $u^z(t)$ при $t_i(\tau z) \leq t \leq t_{i+1}(\tau z)$. Поскольку, согласно формуле (4) п. 1,

$$j_i^z(0) = \frac{(\dot{a}_{i+1}(0), \dot{\gamma}_{i+1}) - (\dot{a}_i(0), \dot{\gamma}_i)}{k(0)}, \quad (6)$$

отсюда вытекает, что

$$j^z(0) = 0,$$

ибо $\dot{a}_0(0) = 0$, $\dot{a}_{s+1}(0) = 0$. Таким образом,

$$\left(\frac{\nabla X_i^z}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \right) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, s, \quad (7)$$

и потому

$$\frac{d}{dt} (X_i^z(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$$

$$\left(\text{ибо } \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \right), \text{ т. е.}$$

$$(X_i^z(t), \dot{\gamma}(t)) = a = \text{const.}$$

Но в силу равенства (4) константа a не зависит от i и, следовательно, равна нулю, так как, например, $X_0^z(\theta) = 0$. Тем самым доказано, что

$$(X^z(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$$

для любого $t \in [\theta, 1]$, т. е. что

для любой точки $z \in R^{s(m-1)}$ ломаное поле Якоби $X^z(t)$ принадлежит пространству Θ .

9. Теорема об изоморфизме

Описанная в п. 8 конструкция определяет некоторое отображение

$$R^{s(m-1)} \rightarrow \Theta, \quad (1)$$

сопоставляющее каждой точке $z \in R^{s(m-1)}$ поле $X^z(t) \in \Theta$. Оказывается, что

отображение (1) является изоморфизмом пространства $R^{s(m-1)}$ на пространство Θ .

Чтобы доказать это предложение, нам достаточно доказать следующие три утверждения:

- 1) отображение (1) линейно;
- 2) отображение (1) мономорфно, т. е. $X^z(t) = 0$ лишь при $z = 0$;

- 3) размерность пространства Θ не превосходит размерности $s(m-1)$ пространства $R^{s(m-1)}$.

С этой целью мы рассмотрим прямую сумму

$$L = M_{p_1} + \dots + M_{p_s}$$

касательных пространств $M_{p_1}, \dots, M_{p_s}$ многообразия M в точках $p_1 = \gamma(t_1), \dots, p_s = \gamma(t_s)$ соответственно и

естественное отображение

$$\Theta \rightarrow L, \quad (2)$$

сопоставляющее каждому полю $X(t) \in \Theta$ вектор

$$(X(t_1), \dots, X(t_s))$$

пространства L . Ясно, что это отображение линейно. Кроме того, оно мономорфно, ибо, поскольку точки t_i и t_{i+1} не сопряжены, каждое поле Якоби

$$X_i(t) = X(t)|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

однозначно определяется векторами $X(t_i)$ и $X(t_{i+1})$ (при $i=0$ — лишь вектором $X(t_1)$, ибо, по условию, $X(0)=0$, а при $i=s$ — лишь вектором $X(t_s)$, ибо, по условию, $X(1)=0$).

С другой стороны, мы можем построить некоторое отображение

$$R^{s(m-1)} \rightarrow L, \quad (3)$$

сопоставляя каждой точке $z \in R^{s(m-1)}$ касательные векторы

$$\dot{a}_i^z(0), \dots, \dot{a}_s^z(0)$$

концевых кривых $a_i^z(t)$ вариаций φ_i^z , $i=1, \dots, s$. (Заметим, что эти векторы касаются соответствующих подмногообразий $P_1, \dots, P_s$, ибо $a_i^z(\tau) \in P_i$ для любого τ и любого $i=1, \dots, s$). Пусть e_k^j , $j=1, \dots, s$; $k=1, \dots, m-1$, — единичные векторы пространства $R^{s(m-1)}$, т. е. векторы, все координаты которых равны нулю, за исключением координаты z_j^k , равной единице, и пусть

$$(A_{1k}^j, \dots, A_{sk}^j), \quad j=1, \dots, s; \quad k=1, \dots, m-1,$$

— векторы пространства L , соответствующие в силу отображения (3) векторам e_k^j . Так как $a_i^z(\tau) = f_i(\tau z)$, где $f_i(z) = u^z(t_i(z))$, то, согласно известным формальным правилам дифференцирования функций векторного аргумента, для любой точки $z = z_j^k e_k^j$ имеет место равенство

$$\dot{a}_i^z(0) = z_j^k A_{ik}^j$$

(напомним, что вектор A_{ik}^j пространства M_{P_i} представляет собой вектор $\dot{a}_i^z(0)$, соответствующий точке $z = e_k^j$). Следо-

вательно, отображение (3) линейно. Поскольку для любого $i = 1, \dots, s$ векторы $A_{i1}, \dots, A_{i, m-1}$ (суммирование по i не производится) линейно независимы (они составляют, очевидно, базис касательного пространства $(P_i)_{p_i}$), отображение (3) мономорфно.

Как мы знаем, для любой точки $z \in R^{s(m-1)}$ и любого $i = 1, \dots, s$ имеет место равенство

$$X^z(t_i) = \dot{a}_i^z(0) - \dot{t}_i^z(0) \dot{\gamma}_i$$

(см. формулу (4) п. 8). Скалярно умножая это равенство на $\dot{\gamma}_i$ и учитывая ортогональность векторов $X^z(t_i)$ и $\dot{\gamma}_i$, мы получаем, что

$$\dot{t}_i^z(0) = \frac{(\dot{a}_i^z(0), \dot{\gamma}_i)}{(\dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i)}.$$

Следовательно,

$$X^z(t_i) = \dot{a}_i^z(0) - \frac{(\dot{a}_i^z(0), \dot{\gamma}_i)}{(\dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i)} \dot{\gamma}_i.$$

Это показывает, что отображение

$$L \rightarrow L, \tag{4}$$

сопоставляющее каждому вектору $(A_1, \dots, A_s) \in L$ вектор $(B_1, \dots, B_s) \in L$, определенный формулой

$$B_i = A_i - \frac{(A_i, \dot{\gamma}_i)}{(\dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i)},$$

обладает тем свойством, что композиция этого отображения и отображения (3) совпадает с композицией отображений (1) и (2):

$$\begin{array}{ccc} R^{s(m-1)} & \xrightarrow{(1)} & \Theta \\ \downarrow (3) & & \downarrow (2) \\ L & \xrightarrow{(4)} & L \end{array}$$

Другими словами, если мономорфизмы (2) и (3) рассматривать как вложения, то отображение (1) будет ограничением отображения (4). Так как отображение (4), очевидно, линейно, то его ограничение (1) также линейно (утверждение 1)).

Ядро отображения (4) состоит из векторов $(A_1, \dots, A_s) \in L$, для которых при любом $i = 1, \dots, s$ вектор A_i пропорционален вектору $\dot{\gamma}_i$. С другой стороны, для любого

$i = 1, \dots, s$ вектор $\dot{a}_i^z(0)$, будучи касательным вектором подмногообразия P_i , пропорционален вектору $\dot{\gamma}_i$ лишь тогда, когда он равен нулю. Следовательно, ядро отображения (4) лишь по нулю пересекается с образом отображения (3), т. е. композиция отображений (3) и (4) является мономорфизмом. Поэтому мономорфизмом является и отображение (1) (утверждение 2)).

Наконец, так как $(X(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ для любого поля $X(t) \in \Theta$, то отображение (2) переводит пространство Θ в подпространство L_0 пространства L , состоящее из векторов $(A_1, \dots, A_s) \in L$, для которых

$$(A_i, \dot{\gamma}_i) = 0 \quad (5)$$

при любом $i = 1, \dots, s$. Поскольку подпространство L_0 , очевидно, $s(m-1)$ -мерно, а отображение (2) мономорфно, то размерность пространства Θ не превосходит $s(m-1)$ (утверждение 3)). Тем самым сформулированная выше теорема полностью доказана.

Замечание. Поскольку размерности пространств Θ и L_0 совпадают, мономорфизм

$$\Theta \rightarrow L_0$$

является изоморфизмом, т. е.

для любого набора векторов

$$A_1 \in M_{p_1}, \dots, A_s \in M_{p_s},$$

удовлетворяющих условию (5), существует одно и только одно поле $X(t) \in \Theta$, для которого

$$X(t_i) = A_i$$

при всех $i = 1, \dots, s$.

10. Квадратичная форма Морса

Сохраняя обозначения, введенные в последних двух пунктах, рассмотрим вторые производные

$$\frac{\partial^2 J(0)}{\partial z_{i_1}^{k_1} \partial z_{i_2}^{k_2}}, \quad \begin{matrix} i_1, i_2 = 1, \dots, s, \\ k_1, k_2 = 1, \dots, m-1, \end{matrix}$$

функции $J(z)$ в точке $z=0$ (так как $J^z(0) = \frac{\partial J(0)}{\partial z_i^k} z_i^k$ для всех z , то первые производные функции $J(z)$ при $z=0$ равны нулю). Полагая

$$Q_0(z) = \frac{\partial^2 J(0)}{\partial z_{i_1}^{k_1} \partial z_{i_2}^{k_2}} z_{i_1}^{k_1} z_{i_2}^{k_2},$$

мы получим на пространстве $R^{s(m-1)}$ некоторую квадратичную форму $Q_0(z)$ (так называемый гессиан функции $J(z)$ ср. п. 1 гл. 6). Мы будем называть эту форму *квадратичной формой Морса*. Она зависит от выбора точек (1), подмногообразий (2) и локальных координат (3) п. 8.

Так как для функции $J^z(\tau) = J(\tau z)$ имеет место формула

$$\frac{d^2 J^z(\tau)}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 J(\tau z)}{\partial z_{i_1}^{k_1} \partial z_{i_2}^{k_2}} z_{i_1}^{k_1} z_{i_2}^{k_2},$$

то

$$Q_0(z) = \ddot{J}^z(0),$$

и потому

$$Q_0(z) = \ddot{J}_0^z(0) + \dots + \ddot{J}_s^z(0),$$

где, как и в п. 8, $J_i^z(\tau)$, $i=0, 1, \dots, s$, — длина кривой $u^z(t)$ при $t_i(\tau z) \leq t \leq t_{i+1}(\tau z)$.

С другой стороны, число $\ddot{J}_i^z(0)$ является, очевидно, второй вариацией длины дуги геодезической $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$, соответствующей вариации φ_i^z . Поскольку вариация φ_i^z удовлетворяет, как мы знаем, предположению (α) п. 2, для числа $\ddot{J}_i^z(0)$ справедлива формула (2) п. 2. При этом ввиду соотношения (7) п. 8 подынтегральное выражение в этой формуле упрощается и интеграл превращается (с точностью до постоянного множителя $1/l$, где $l=k(0)$ — длина отрезка $\gamma|_{[0,1]}$ геодезической γ) в функционал $J_{t_i}^{t_{i+1}}$. Таким образом,

$$\ddot{J}_i^z(0) = \frac{\left(\frac{\nabla \dot{a}_{i+1}}{d\tau}(0), \dot{\gamma}_{i+1} \right) - \left(\frac{\nabla \dot{a}_i}{d\tau}(0), \dot{\gamma}_i \right)}{l} + \frac{1}{l} J_{t_i}^{t_{i+1}}(X_i^z(t)).$$

Суммируя по i и замечая, что

$$\frac{\nabla \dot{a}_0}{d\tau}(0) = 0, \quad \frac{\nabla \dot{a}_{s+1}}{d\tau}(0) = 0,$$

мы немедленно получаем отсюда, что

$$Q_0(z) = \frac{1}{l} l_0^1(X^z(t)). \quad (1)$$

Согласно теореме п. 9 поле $X^z(t)$ при $z \neq 0$ отлично от нуля. Поэтому, согласно неравенству (2) п. 7 (это неравенство применимо, так как $X^z(\theta) = 0$, $X^z(1) = 0$), из формулы (1) вытекает, что

при θ , достаточно близком к 1, форма Q_0 положительно определена.

В дальнейшем нас будут интересовать две числовые характеристики формы Q_0 , а именно ее коранг $c_0 = c(Q_0)$, т. е. размерность максимального подпространства $C_0 \subset R^{s(m-1)}$, на котором форма Q_0 тождественно равна нулю, и ее отрицательный индекс инерции $h_0 = h(Q_0)$, т. е. размерность максимального подпространства $H_0 \subset R^{s(m-1)}$, на котором форма Q_0 отрицательно определена. Оказывается, что

число c_0 и h_0 не зависят от произвола, имеющегося в построении формы Q_0 , и определяются исключительно числом θ (и геодезической γ).

Другими словами, как бы мы ни выбирали числа t_i , подмногообразия P_i и локальные координаты z_i^k (с сохранением, конечно, всех необходимых условий и, в частности, условия достаточной густоты точек $t_1, \dots, t_s$ на отрезке $[\theta, 1]$) числа c_0 и h_0 для соответствующих форм Q_0 будут иметь одни и те же значения.

Ясно, что это утверждение достаточно доказать лишь в следующем частном виде:

если к точкам t_i , определяющим форму Q_0 , добавить еще одну точку, скажем точку t^* из интервала (t_{i_0}, t_{i_0+1}) , и построить для так расширенной системы точек соответствующую форму Q_0^* (произвольно выбрав в точке $\gamma(t^*)$ подмногообразие P^* и локальные координаты z_*^k на этом подмногообразии), то числа $c_0^* = c(Q_0^*)$ и $h_0^* = h(Q_0^*)$ будут равны числам $c_0 = c(Q_0)$ и $h_0 = h(Q_0)$.

В первую очередь мы докажем это утверждение для числа h_0 . Пусть, как и выше, H_0 — максимальное подпространство пространства $R^{s(m-1)}$, на котором форма Q_0 отрицательно определена, и пусть аналогично H_0^* — максимальное

подпространство пространства $R^{(s+1)(m-1)}$, на котором отрицательно определена форма Q_θ^* . Пусть, кроме того, Θ — рассмотренное в пп. 8 — 9 пространство ломаных полей Якоби и Θ^* — аналогичное пространство, соответствующее расширенной системе точек t_i . Ясно, что

$$\Theta \subset \Theta^*, \quad (2)$$

и потому рассмотренный в п. 9 изоморфизм $R^{s(m-1)} \rightarrow \Theta$ и аналогичный изоморфизм $R^{(s+1)(m-1)} \rightarrow \Theta^*$ определяют некоторый мономорфизм

$$R^{s(m-1)} \rightarrow R^{(s+1)(m-1)}. \quad (3)$$

Из формулы (1) немедленно следует, что если точка z пространства $R^{s(m-1)}$ переходит при мономорфизме (3) в точку z^* пространства $R^{(s+1)(m-1)}$, то

$$Q_\theta(z) = Q_\theta^*(z^*)$$

(ибо каждое из этих чисел равно $\frac{1}{l} J_\theta^1(X^z(t))$). Поэтому мономорфизм (3) переводит подпространство H_θ в подпространство H_θ^* .

Рассмотрим теперь естественную проекцию

$$p: R^{(s+1)(m-1)} \rightarrow R^{s(m-1)}, \quad (4)$$

при которой отбрасываются координаты z_*^i , соответствующие добавленной точке t^* . Пусть $z^* \in R^{(s+1)(m-1)}$ и пусть $z \in R^{s(m-1)}$ — образ точки z^* при проекции (4). Ломаные поля Якоби $X^z(t)$ и $X^{z^*}(t)$, соответствующие точкам z и z^* , совпадают всюду на отрезке $[\theta, 1]$, за исключением, быть может, интервала (t_{i_0}, t_{i_0+1}) , причем на этом интервале поле $X^z(t)$ является гладким полем Якоби, а поле $X^{z^*}(t)$ может иметь излом (в точке t^*). Поэтому в силу свойства минимальности полей Якоби (см. п. 7)

$$I_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}}(X^z(t)) \leq I_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}}(X^{z^*}(t)),$$

и потому согласно формуле (1)

$$Q_\theta(z) \leq Q_\theta^*(z^*).$$

Это означает, в частности, что проекция (4) отображает подпространство H_θ^* в подпространство H_θ .

Пусть $z^* \in H_\theta^*$ — произвольная отличная от нуля точка ядра проекции (4), принадлежащая подпространству H_θ^* . Соответствующее поле $X^{z^*}(t)$ равно нулю всюду на отрезке $[\theta, 1]$, за исключением интервала (t_{i_0}, t_{i_0+1}) , причем, так как $z^* \in H_\theta^*$, то

$$I_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}}(X_{i_0}^{z^*}(t)) = I_\theta^1(X^{z^*}(t)) = lQ_\theta^*(z^*) < 0.$$

Но это невозможно, ибо согласно неравенству (2) п. 7

$$I_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}}(X_{i_0}^{z^*}(t)) > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что ядро проекции (4) лишь по нулю пересекается с подпространством H_θ^* , т. е. проекция (4) мономорфна на H_θ^* .

Поскольку композиция мономорфизма (3) и проекции (4) является, очевидно, тождественным отображением пространства $R^{s(m-1)}$, тем самым доказано, что отображения (3) и (4) определяют взаимно обратные изоморфизмы

$$H_\theta \rightleftharpoons H_\theta^*.$$

Следовательно, $h_\theta = h_\theta^*$.

Для числа c_θ доказательство проводится дословно так же.

11. Вычисление индекса точки с помощью формы Морса

Связь между формой Морса и понятием сопряженной точки устанавливается следующим предложением:

точка $t = \theta$ тогда и только тогда сопряжена с точкой $t = 1$, когда форма Q_θ вырождена.

«Степень сопряженности» точки $t = \theta$ оценивается ее индексом $\lambda_1(\theta)$, а «степень вырожденности» формы Q_θ — ее корангом c_θ . Оказывается, что

индекс $\lambda_1(\theta)$ равен корангу c_θ .

Для доказательства этих утверждений мы рассмотрим подпространство Θ_0 пространства Θ , состоящее из гладких полей Якоби. Ясно, что

$$\Theta_0 = \Lambda_\gamma(\theta) \cap \Lambda_\gamma(1)$$

(ибо, с одной стороны, все поля $X(t) \in \Theta_0$, по условию, равны нулю как при $t = \theta$, так и при $t = 1$, а с другой сто-

роны, любое поле $X(t) \in \Lambda_\gamma(\theta) \cap \Lambda_\gamma(1)$ обладает тем свойством, что $(X(t), \gamma(t)) = 0$; см. формулу (6) п. 3). Поэтому индекс $\lambda_1(\theta)$ равен размерности подпространства Θ_0 .

В то же время коранг c_θ равен, по определению, размерности максимального подпространства $C_\theta \subset R^{s(m-1)}$, на котором форма Q_θ тождественно равна нулю. Поэтому для доказательства высказанных утверждений достаточно доказать, что

рассмотренный в п. 9 изоморфизм $R^{s(m-1)} \rightarrow \Theta$ отображает подпространство C_θ на подпространство Θ_0 ; иными словами, поле $X^z(t)$, где $z \in R^{s(m-1)}$, тогда и только тогда принадлежит подпространству Θ_0 , когда $z \in C_\theta$.

Имея это в виду, преобразуем основную формулу (1) п. 10 для формы $Q_\theta(z)$ с помощью формулы (3) п. 7. Так как согласно последней формуле

$$\begin{aligned} I_{t_i}^{t_{i+1}}(X_i^z(t)) &= \left(\frac{\nabla X_i^z}{dt}(t_{i+1}), X_i^z(t_{i+1}) \right) - \left(\frac{\nabla X_i^z}{dt}(t_i), X_i^z(t_i) \right) = \\ &= \left(\frac{\nabla X^z}{dt}(t_{i+1} - 0), X^z(t_{i+1}) \right) - \left(\frac{\nabla X^z}{dt}(t_i + 0), X^z(t_i) \right), \end{aligned}$$

то

$$Q_\theta(z) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X^z}{dt}(t_i - 0) - \frac{\nabla X^z}{dt}(t_i + 0), X^z(t_i) \right),$$

ибо

$$X^z(t_0) = X^z(\theta) = 0, \quad X^z(t_{s+1}) = X^z(1) = 0.$$

Пусть $X_k^j(t)$ — базис пространства Θ , соответствующий в силу изоморфизма (1) п. 9 стандартному базису e_k^j пространства $R^{s(m-1)}$, $j = 1, \dots, s$; $k = 1, \dots, m-1$. Тогда для любой точки $z \in R^{s(m-1)}$ имеет место равенство

$$X^z(t) = z_j^k X_k^j(t).$$

Дифференцируя это равенство, мы получим соотношение

$$\frac{\nabla X^z}{dt}(t_i \pm 0) = z_j^k \frac{\nabla X_k^j}{dt}(t_i \pm 0), \quad i = 1, \dots, s.$$

Поэтому

$$Q_0(z) = \frac{1}{l} \left[\sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X_{k_1}^{j_1}}{dt} (t_i - 0) - \frac{\nabla X_{k_1}^{j_1}}{dt} (t_i + 0), X_k^j(t_i) \right) \right] z_{j_1}^{k_1} z_j^k.$$

Отсюда для частных производных

$$L_k^j(z) = \frac{\partial Q_0(z)}{\partial z_j^k}$$

формы $Q_0(z)$ мы получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} L_k^j(z) &= \frac{2}{l} \left[\sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X_{k_1}^{j_1}}{dt} (t_i - 0) - \frac{\nabla X_{k_1}^{j_1}}{dt} (t_i + 0), X_k^j(t_i) \right) \right] z_{j_1}^{k_1} = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X^z}{dt} (t_i - 0) - \frac{\nabla X^z}{dt} (t_i + 0), X_k^j(t_i) \right). \end{aligned}$$

Из элементов линейной алгебры известно, что точка z тогда и только тогда принадлежит подпространству C_0 , когда

$$L_k^j(z) = 0$$

для всех j и k . Следовательно, если $z \in C_0$, то

$$\sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X^z}{dt} (t_i - 0) - \frac{\nabla X^z}{dt} (t_i + 0), X_k^j(t_i) \right) = 0.$$

Но для любого $i = 1, \dots, s$ и любого $k = 1, \dots, m - 1$ векторы $X_k^j(t_i)$ при $j \neq i$, очевидно, равны нулю, так что

$$\left(\frac{\nabla X^z}{dt} (t_i - 0) - \frac{\nabla X^z}{dt} (t_i + 0), X_k^i(t_i) \right) = 0 \quad (1)$$

(суммирование по i не производится!). С другой стороны, для любого $i = 1, \dots, s$ векторы $X_k^i(t_i)$, $k = 1, \dots, m - 1$ (суммирование по i не производится!), вместе с вектором $\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}(t_i)$ составляют, как легко видеть, базис пространства M_{p_i} , причем согласно формуле (6) п. 8

$$\left(\frac{\nabla X^z}{dt} (t_i \pm 0), \dot{\gamma}_i \right) = 0$$

для любого $i = 1, \dots, s$. Поэтому равенство (1) возможно лишь при

$$\frac{\nabla X^z}{dt}(t_i - 0) = \frac{\nabla X^z}{dt}(t_i + 0), \quad i = 1, \dots, s,$$

т. е. когда поле $X^z(t)$ дифференцируемо. Но легко видеть, что

любое дифференцируемое ломаное поле Якоби является гладким полем,

ибо для любого ломаного поля Якоби $X(t)$ его односторонние вторые ковариантные производные $\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t_i \pm 0)$ в силу уравнения (3) п. 3 (рассматриваемого соответственно на отрезках $[t_{i-1}, t_i]$ и $[t_i, t_{i+1}]$) совпадают с одним и тем же вектором $-R_{\gamma(t_i)}(X(t_i), \dot{\gamma}_i) \gamma_i$ и потому равны. Следовательно, если поле $X(t)$ дифференцируемо, то оно и дважды дифференцируемо. Так как, кроме того, поле $X(t)$ всюду удовлетворяет уравнению (3) п. 3, то оно является гладким полем (см. п. 5).

Таким образом, поле $X^z(t)$ гладко, т. е. принадлежит подпространству Θ_0 .

Обратно, если $X^z(t) \in \Theta_0$, то

$$\frac{\nabla X^z}{dt}(t_i - 0) = \frac{\nabla X^z}{dt}(t_i + 0)$$

для любого $i = 1, \dots, s$, и потому $L_k^j(z) = 0$ для всех j и k , т. е. $z \in C_0$.

Тем самым сформулированные в начале этого пункта утверждения полностью доказаны.

12. Вычисление индекса интервала с помощью формы Морса

Форму Q_0 , вычисленную при $\theta = 0$, мы будем обозначать символом Q . Согласно доказанному в п. 11 утверждению

индекс $\lambda_1(0)$ точки $t = 0$ (по отношению к точке $t = 1$) равен корангу $s = s_0$ формы $Q = Q_0$.

Основная цель этого пункта состоит в доказательстве следующего предложения (известного как теорема Морса об индексе):

индекс $\lambda_1(0, 1)$ открытого интервала $(0, 1)$ (по отношению к точке $t=1$) равен отрицательному индексу инерции $h=h_0$ формы Q .

Вместе с предыдущим утверждением эта теорема позволяет вычислить индекс любого (открытого или замкнутого) интервала оси R , ибо каждый такой интервал можно представить как разность двух интервалов с общим концом.

В первую очередь мы докажем неравенство

$$h \leq \lambda_1(0, 1). \quad (1)$$

С этой целью мы снова вернемся к формам $Q_\theta(z)$ при произвольном $\theta \in [0, 1)$. По построению, эти формы зависят от выбора чисел

$$\theta < t_1 < \dots < t_s < 1$$

подмногообразий

$$P_1, \dots, P_s,$$

проходящих через точки $p_1 = \gamma(t_1), \dots, p_s = \gamma(t_s)$, и систем локальных координат

$$z_i^1, \dots, z_i^{m-1}, \quad i = 1, \dots, s,$$

на этих подмногообразиях. Мы специализируем теперь наше построение, выбрав эти данные при всех θ «линейно по θ ».

Именно, мы предположим, что эти объекты как-то выбраны при $\theta=0$. Пусть это будут числа

$$0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_s < 1,$$

подмногообразия

$$\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_s$$

и локальные координаты

$$\bar{z}_i^1, \dots, \bar{z}_i^{m-1}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Тогда для любого $\theta \in [0, 1)$ мы положим

$$t_i = \theta + \bar{t}_i - \theta \bar{t}_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

Ясно, что числа $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_s$ можно выбрать на отрезке $[0, 1]$ настолько густо (в смысле п. 8), чтобы для любого θ числа $t_1, \dots, t_s$ были расположены также достаточно густо (но уже на отрезке $[\theta, 1]$).

Пусть

$$\tau_i: M_{\bar{p}_i} \rightarrow M_{p_i}$$

-- параллельный перенос вдоль геодезической γ из точки $\bar{p}_i = \gamma(\bar{t}_i)$ в точку $p_i = \gamma(t_i)$. Для каждого $i = 1, \dots, s$ мы выберем подмногообразие P_i так, чтобы его касательное пространство получалось переносом τ_i из касательного пространства подмногообразия $\bar{P}_i$. Очевидно, что такой выбор подмногообразий P_i всегда можно осуществить (с сохранением всех прочих условий).

Наконец, локальные координаты

$$z_i^1, \dots, z_i^{m-1}$$

на подмногообразии P_i мы выберем так, чтобы соответствующие им векторные поля $\frac{\partial}{\partial z_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_i^{m-1}}$ получались переносом τ_i из полей $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i^{m-1}}$:

$$\frac{\partial}{\partial z_i^1} = \tau_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i^1} \right), \dots, \frac{\partial}{\partial z_i^{m-1}} = \tau_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i^{m-1}} \right).$$

При таком согласованном выборе данных, необходимых для построения формы $Q_\theta(z)$, очевидно, что

коэффициенты формы Q_θ являются непрерывными функциями параметра θ .

Поэтому при непрерывном изменении параметра θ отрицательный индекс инерции h_θ формы Q_θ может претерпевать изменение лишь тогда, когда параметр проходит через значение θ_0 , при котором форма Q_θ вырождена, причем изменение индекса не может превосходить коранга формы Q_{θ_0} . Отсюда ввиду результатов предыдущего пункта непосредственно следует, что общее изменение индекса формы Q_θ при непрерывном изменении параметра от некоторого близкого к единице значения θ_0 до нуля не превосходит индекса $\lambda_1(0, 1)$ интервала $(0, 1)$. С другой стороны, мы знаем, что при θ_0 , близком к единице, форма Q_{θ_0} положительно определена (см. п. 10) и потому $h_{\theta_0} = 0$. Следовательно, изменение индекса h_θ при непрерывном изменении числа θ от θ_0 до нуля равно индексу $h = h_0$ формы $Q = Q_0$. Тем самым неравенство (1) полностью доказано.

Таким образом, нам осталось доказать лишь обратное неравенство

$$h \geq \lambda_1(0, 1). \quad (2)$$

Так как при $\lambda_1(0, 1) = 0$ это неравенство автоматически выполнено, то мы можем считать, что $\lambda_1(0, 1) > 0$, т. е. что на интервале $(0, 1)$ существуют точки, сопряженные с точкой $t = 1$. Пусть

$$0 < a_1 < \dots < a_r < 1$$

— все эти точки и пусть

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r$$

— их индексы. Пусть, далее,

$$A_{j1}(t), \dots, A_{j\lambda_j}(t), \quad j = 1, \dots, r,$$

— произвольный базис пространства $\Lambda_\gamma(a_j) \cap \Lambda_\gamma(1)$. Как мы знаем (см. формулу (6) п. 3), для всех t и любых j и k имеет место равенство

$$(A_{jk}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0. \quad (3)$$

Мы будем считать, что на выбор точек t_i (см. п. 8), участвующих в построении формы Q , наложены следующие дополнительные условия:

1) для любого $j = 0, \dots, r$ между точками a_j и a_{j+1} (мы условно считаем, что $a_0 = 0$ и $a_{r+1} = 1$) содержится по крайней мере одна точка t_i ;

2) ни одна точка t_i , $i = 1, \dots, s$, не совпадает ни с одной точкой a_j , $j = 1, \dots, r$.

Ввиду доказанной в п. 10 независимости индекса h от выбора точек $t_1, \dots, t_s$ эти дополнительные условия не влияют на общность результата.

Приняв эти условия, мы рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ кусочно гладкое поле $X_{jk}(t)$, $j = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, \lambda_j$, определенное формулой

$$X_{jk}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq a_j, \\ A_{jk}(t), & \text{если } a_j \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Так как ввиду формулы (3) для любого $i = 1, \dots, s$ имеет место равенство

$$(X_{jk}(t_i), \dot{\gamma}_i) = 0,$$

то, согласно сделанному в конце п. 9 замечанию, существует одно и только одно ломаное поле Якоби

$$\bar{X}_{jk}(t) \in \Theta, \quad 0 = \theta \leq t \leq 1,$$

для которого

$$\bar{X}_{jk}(t_i) = X_{jk}(t_i).$$

Пусть z_{jk} — такая (однозначно определенная) точка пространства $R^{s(m-1)}$, что

$$\bar{X}_{jk}(t) = X_{jk}^{z_{jk}}(t).$$

Покажем, что

точки z_{jk} , $j = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, \lambda_j$, линейно независимы.

Действительно, пусть a^{jk} — такие вещественные числа, что

$$a^{jk} z_{jk} = 0.$$

Тогда поле $a^{jk} \bar{X}_{jk}(t)$ тождественно равно нулю, и потому поле

$$X(t) = a^{jk} X_{jk}(t)$$

обладает тем свойством, что

$$X(t_i) = 0 \quad \text{для любого } i = 1, \dots, s.$$

Пусть l — наименьшее i , для которого $t_i > a_1$ (см. условие 1)). На отрезке $[a_1, t_l]$ поле $X(t)$ равно, очевидно, полю $a^{1k} A_{1k}(t)$ и потому, во-первых, является гладким полем Якоби и, во-вторых, равно нулю при $t = a_1$. Поскольку точки a_1 и t_l не сопряжены (ибо $a_1 \in [t_{l-1}, t_l]$), а поле $X(t)$ равно нулю и при $t = t_l$, отсюда следует, что на отрезке $[a_1, t_l]$ поле $X(t)$ тождественно равно нулю. Поэтому

$$a^{1k} = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, \lambda_1.$$

Повторяя то же рассуждение для a_2 , мы аналогично получим, что

$$a^{2k} = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, \lambda_2.$$

После r такого рода шагов мы окончательно получим, что $a^{jk} = 0$ для всех $j = 1, \dots, r$ и всех $k = 1, \dots, \lambda_j$. Следовательно, точки z_{jk} линейно независимы.

Пусть Z — подпространство пространства $R^{s(m-1)}$, порожденное точками z_{jk} . Согласно доказанному размерность этого подпространства равна общему числу точек z_{jk} , т. е. равна

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_r = \lambda_1(0, 1).$$

Поэтому для доказательства неравенства (2) достаточно доказать, что

на подпространстве Z форма Q отрицательно определена.

Пусть $z = a^{jk} z_{jk}$ — произвольная точка подпространства Z . Рассмотрим поле

$$X(t) = a^{jk} X_{jk}(t).$$

На каждом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, r$ (как и выше, мы считаем, что $a_0 = 0$ и $a_{r+1} = 1$), это поле является гладким полем Якоби и потому (см. формулу (3) п. 7)

$$I_{a_i}^{a_{i+1}}(X(t)) = \left(\frac{\nabla X}{dt}(a_{i+1} - 0), X(a_{i+1}) \right) - \left(\frac{\nabla X}{dt}(a_i + 0), X(a_i) \right).$$

Следовательно,

$$I_0^1(X(t)) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\nabla X}{dt}(a_i - 0) - \frac{\nabla X}{dt}(a_i + 0), X(a_i) \right),$$

ибо

$$X(a_0) = X(0) = 0, \quad X(a_{r+1}) = X(1) = 0.$$

Рассмотрим выражение

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}(a_i - 0) - \frac{\nabla X}{dt}(a_i + 0), X(a_i) \right), \quad i = 1, \dots, r. \quad (4)$$

Так как на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ поле $X(t)$ является линейной комбинацией полей $A_{jk}(t)$ с $j < i$, а на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ — полей $A_{jk}(t)$ с $j \leq i$ (с теми же коэффициентами при полях $A_{jk}(t)$, $j < i$), то вектор

$$\frac{\nabla X}{dt}(a_i - 0) - \frac{\nabla X}{dt}(a_i + 0)$$

является линейной комбинацией векторов

$$\frac{\nabla A_{il}}{dt}(a_i), \quad l = 1, \dots, \lambda_i.$$

С другой стороны, поскольку $A_{ik}(a_i) = 0$, вектор $X(a_i)$ при $i > 1$ является линейной комбинацией векторов

$$A_{jk}(a_i), \quad j = 1, \dots, i-1; \quad k = 1, \dots, \lambda_j,$$

а при $i = 1$ равен нулю. Следовательно, выражение (4) при $i = 1$ равно нулю, а при $i > 1$ является линейной комбинацией выражений вида

$$\left(\frac{\nabla A_{il}}{dt}(a_i), \quad A_{jk}(a_i) \right), \quad \begin{array}{l} l = 1, \dots, \lambda, \\ j = 1, \dots, i-1, \\ k = 1, \dots, \lambda_j. \end{array}$$

Но, по условию, все поля вида A_{jk} принадлежат пространству $\Lambda_\gamma(1)$, и потому согласно формуле (5) п. 3

$$\left(\frac{\nabla A_{il}}{dt}(a_i), \quad A_{jk}(a_i) \right) = \left(A_{il}(a_i), \quad \frac{\nabla A_{jk}}{dt}(a_i) \right) = 0,$$

ибо $A_{il}(a_i) = 0$. Таким образом, выражения (4) при любом i равны нулю. Следовательно,

$$I_0^1(X(t)) = 0.$$

С другой стороны, так как на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, s$, поле $X^z(t) \in \Theta$, соответствующее точке z , является гладким полем Якоби и $X^z(t_i) = X(t_i)$, $X^z(t_{i+1}) = X(t_{i+1})$, то согласно теореме п. 7 (условия применимости этой теоремы, по предположению, выполнены для любого $i = 0, 1, \dots, s$) имеет место неравенство

$$I_{t_i}^{t_{i+1}}(X^z(t)) \leq I_{t_i}^{t_{i+1}}(X(t)), \quad (5)$$

являющееся равенством лишь тогда, когда $X(t) = X^z(t)$ на $[t_i, t_{i+1}]$. Но при $z \neq 0$ равенство $X(t) = X^z(t)$ на $[t_i, t_{i+1}]$ для всех $i = 0, 1, \dots, s$ невозможно, ибо хотя бы в одной точке a_j поле $X(t)$ имеет излом, тогда как поле $X^z(t)$ в этой точке гладко (напомним, что, по условию, точки a_j отличны от точек t_i). Поэтому, суммируя неравенства (5), мы получим, что

$$I_0^1(X^z(t)) < I_0^1(X(t)),$$

т. е. согласно доказанному выше, что

$$I_0^1(X^z(t)) < 0.$$

Следовательно, согласно формуле (1) п. 10

$$Q(z) < 0, \quad z \neq 0.$$

Тем самым сформулированное выше утверждение, а вместе с ним и теорема Морса полностью доказаны.

13. Квадратичная форма Ботта.

Окончательная формулировка теорем об индексах

Построение формы Морса Q содержит значительный элемент произвола, заключающийся, в частности, в выборе подмногообразий $P_1, \dots, P_s$. Недавно Ботт предложил рассматривать для тех же целей другую квадратичную форму, построение которой содержит существенно меньший произвол.

Построение формы Ботта, аналогично изложенному выше построению формы Морса, начинается с выбора на отрезке $[0, 1]$ некоторой системы точек

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < t_{s+1} = 1.$$

Эти точки, как и для случая формы Морса, выбираются на отрезке $[0, 1]$ достаточно густо, а именно так, чтобы для каждого $i = 0, 1, \dots, s$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ не было точек, сопряженных с точкой t_{i+1} . Кроме того, по-прежнему предполагается, что существует такое $\delta > 0$, что любые точки $p, q \in M$, удовлетворяющие для некоторого $i = 0, 1, \dots, s$ соотношениям

$$\rho(p, p_i) < \delta, \quad \rho(q, p_{i+1}) < \delta,$$

где $p_j = \gamma(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, s+1$, можно соединить в M единственной кратчайшей (см. п. 8). Это число δ мы будем считать столь малым, чтобы для любого $i = 1, \dots, s$ сферическая δ -окрестность точки p_i являлась координатной окрестностью этой точки, т. е. чтобы в ней были определены некоторые локальные координаты

$$x_i^1, \dots, x_i^m \tag{1}$$

и чтобы ни для одного $i = 1, \dots, s$ сферические δ -окрестности соседних точек p_i и p_{i+1} не пересекались. Мы будем считать также, что локальные координаты (1) равны нулю в точке p_i .

Пусть $V_i \subset R^m$ — образ δ -окрестности точки p_i при координатном гомеоморфизме, соответствующем локальным координатам (1), и пусть

$$V = V_1 \times \dots \times V_s,$$

Множество V является открытым подмножеством пространства R^{sm} и каждая его точка $x = (x_i^k)$, $i = 1, \dots, s$; $k = 1, \dots, m$, определяет s точек $q_i \in U_\delta(p_i)$, $i = 1, \dots, s$, для которых

$$x_i^k(q_i) = x_i^k, \quad i = 1, \dots, s; \quad k = 1, \dots, m.$$

Так как для любого $i = 1, \dots, s$ точка q_i принадлежит δ -окрестности точки p_i , то ее можно соединить с точкой q_{i+1} единственной кратчайшей (мы считаем, что $q_{s+1} = p_{s+1} = \bar{q} = \gamma(1)$). Кроме того, точку $\bar{p} = p_0 = \gamma(0)$ можно соединить с точкой q_1 также единственной кратчайшей. Комбинируя эти кратчайшие, мы получим некоторую геодезическую ломаную u^x , соединяющую точки $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Параметр t на ломаной u^x мы выберем пропорционально длине дуги, а именно так, чтобы

$$u^x(0) = \bar{p}, \quad u^x(t) = \bar{q}.$$

Значение параметра t , соответствующее точке q_i , $i = 0, \dots, s+1$, мы будем обозначать символом $t_i(x)$, так что

$$u^x(t_i(x)) = q_i.$$

В частности, $t_0(x) = 0$, $t_{s+1}(x) = 1$.

Длину отрезка кривой $u^x(t)$ при $t_i(x) \leq t \leq t_{i+1}(x)$, т. е. расстояние $\rho(q_i, q_{i+1})$ между точками q_i и q_{i+1} , мы будем обозначать символом $J_i(x)$.

Это построение совершенно аналогично изложенному в п. 8 построению кривых u^z . Продолжая проводить эту аналогию далее, мы рассмотрим для любой точки $x \in R^{sm}$ вариацию φ_i^x , определенную формулой

$$\varphi_i^x(t, \tau) = u^{\tau x}(t), \quad |\tau| < \tau_0, \quad t_i(\tau x) \leq t \leq t_{i+1}(\tau x),$$

где τ_0 — такое положительное число, что $\tau x \in V$ при $|\tau| < \tau_0$. Дословно так же, как в п. 8, мы получим тогда, что для производной функции $J_i^x(\tau) = J_i(\tau x)$, выражающей длину кривой $u^{\tau x}(t)$ при $t_i(\tau x) \leq t \leq t_{i+1}(\tau x)$, имеет место следующая

формула, аналогичная формуле (6) п. 8:

$$\dot{J}_i^x(0) = \frac{1}{l}[(\dot{a}_{i+1}^x(0), \dot{\gamma}_{i+1}) - (\dot{a}_i^x(0), \dot{\gamma}_i)], \quad l = 0, 1, \dots, s, \quad (2)$$

где $l = k(0)$ — длина геодезической γ , а $j = 0, 1, \dots, s+1$ — касательный вектор к кривой излома

$$a_j^x(\tau) = u^{\tau x}(t_j(\tau x))$$

в точке $\tau = 0$. Далее, дословно так же, как в п. 10, мы получим формулу

$$\ddot{J}_i^x(0) = \frac{1}{l} \left[\left(\frac{\nabla \dot{a}_{i+1}^x}{dt}(0), \dot{\gamma}_{i+1} \right) - \left(\frac{\nabla \dot{a}_i^x}{dt}(0), \dot{\gamma}_i \right) \right] + \frac{1}{l} I_{t_i}^{t_{i+1}}(X_i^x(t)), \quad (3)$$

где $X_i^x(t)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, — векторное поле, ассоциированное с вариацией φ_i^x .

Отклоняясь теперь от проводимой до сих пор аналогии, мы введем в рассмотрение функцию

$$J_*(x) = [J_1(x)]^2 + \dots + [J_s(x)]^2$$

и ее гессиан

$$Q_*(x) = \frac{\partial^2 J_*(0)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2}} x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2}$$

в точке 0. Этот гессиан, представляющий собой квадратичную форму, определенную на пространстве R^{sm} , мы будем называть *квадратичной формой Ботта*. Аналогично форме Морса форма Ботта выражается формулой

$$Q_*(x) = \ddot{J}_*^x(0),$$

где

$$J_*^x(\tau) = J_*(\tau x) = [J_1^x(\tau)]^2 + \dots + [J_s^x(\tau)]^2.$$

Следовательно,

$$Q_*(x) = 2 \sum_{i=0}^s ([\dot{J}_i^x(0)]^2 + J_i^x(0) \ddot{J}_i^x(0)). \quad (4)$$

Сравним теперь форму Ботта $Q_*(x)$ с формой Морса $Q(z)$. С этой целью

мы, во-первых, предположим, что точки $t_1, \dots, t_s$, от которых зависит построение этих форм, выбраны на отрезке $[0, 1]$ равномерно, т. е. так, что

$$t_1 = \frac{1}{s+1}, \dots, t_i = \frac{i}{s+1}, \dots, t_s = \frac{s}{s+1},$$

где s — некоторое достаточно большое число.

Во-вторых, мы предположим, что подмногообразия $P_1, \dots, P_s$, от которых зависит построение формы Морса $Q(z)$, выбраны так, что для любого $i = 1, \dots, s$ геодезическая γ ортогональна подмногообразию P_i , т. е. так, что

$$(A_i, \dot{\gamma}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

для любого вектора $A_i \in M_{P_i}$, касающегося подмногообразия P_i .

В-третьих, мы предположим, что координаты (1), от которых зависит построение формы Ботта $Q_*(x)$, выбраны так, что для любого $i = 1, \dots, s$ подмногообразие P_i определяется уравнением $x_i^m = 0$, а ограничения

$$z_i^1 = x_i^1|_{P_i}, \dots, z_i^{m-1} = x_i^{m-1}|_{P_i} \quad (5)$$

на P_i координат $x_i^1, \dots, x_i^{m-1}$ составляют на P_i систему локальных координат. Мы будем считать, кроме того, в δ -окрестности точки p_i геодезическая γ определяется уравнениями

$$x_i^1 = 0, \dots, x_i^{m-1} = 0.$$

В-четвертых, за координаты $z_i^k, i = 1, \dots, s; k = 1, \dots, m-1$, участвующие в построении формы Морса $Q(z)$, мы примем координаты (5).

Наконец, в-пятых, пространство $R^{s(m-1)}$, на котором определена форма Морса $Q(z)$, мы будем считать подпространством

$$x_1^m = 0, \dots, x_s^m = 0$$

пространства R^{sm} , на котором определена форма Ботта $Q_*(x)$.

Оказывается, что

при этих предположениях форма Морса $Q(z)$ лишь постоянным множителем отличается от ограничения $Q_*(z)$ формы Ботта $Q_*(x)$ на подпространстве $R^{s(m-1)}$.

Действительно, так как для любого $i = 1, \dots, s$ вектор $\dot{a}_i^z(0)$, $z \in R^{s(m-1)}$, являясь касательным вектором подмногообразия P_i , ортогонален, по условию, вектору $\dot{\gamma}_i$, а векторы $\dot{a}_0^z(0)$ и $\dot{a}_{s+1}^z(0)$ равны нулю, то согласно формуле (6) п. 8

$$j_0^z(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

Кроме того, в силу равномерного распределения точек t_i на отрезке $[0, 1]$ для любого $i = 0, 1, \dots, s$ имеет место равенство

$$j_i^z(0) = \frac{1}{s+1} l.$$

Наконец, ясно, что при $x = z$ введенные выше функции $J_i^x(\tau)$ совпадают с функциями $J_i^z(\tau)$, рассмотренными в п. 10. Поскольку

$$Q(z) = \sum_{i=0}^s \ddot{j}_i^z(0),$$

отсюда и из формулы (4) следует, что

$$Q_*(z) = \frac{2l}{s+1} Q(z) \quad \text{для любой точки } x = z \in R^{s(m-1)}.$$

З а м е ч а н и е. Поскольку

$$j_*^x(0) = 2 \sum_{i=0}^s j_i^x(0) j_i^x(0) = \frac{2l}{s+1} \sum_{i=0}^s j_i^x(0), \quad x \in R^{sm},$$

из формулы (2) следует (ввиду равенств $\dot{a}_0^x(0) = 0$, $\dot{a}_{s+1}^x(0) = 0$), что

$$j_*^x(0) = 0$$

для любой точки $x \in R^{sm}$. Так как

$$j_*^x(0) = \left(\frac{\partial J_*(x)}{\partial x_i^k} \right)_{x=0} x_i^k,$$

отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{\partial J_*(x)}{\partial x_i^k} \right)_{x=0} = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь форму $Q_*(x)$ на подпространстве R^m пространства R^{ms} , дополнительном к подпространству $R^{s(m-1)}$, т. е. состоящем из точек $x \in R^{sm}$, у которых могут быть отличны от нуля лишь координаты $x_1^m, \dots, x_s^m$. Для каждой точки $x \in R^s$ и любого $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$ кривая $u^{\tau x}(t)$ совпадает, очевидно, с геодезической $\gamma(t)$, так что

$$\dot{a}_i^x(\tau) = \dot{\gamma}(t_i^x(\tau)),$$

где $t_i^x(\tau) = t_i(\tau x)$, и потому

$$\dot{a}_i^x(0) = \dot{\gamma}_i \dot{t}_i^x(0),$$

$$\frac{\nabla \dot{a}_i^x}{d\tau}(0) = \dot{\gamma}_i \ddot{t}_i^x(0)$$

(ибо $\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$). Кроме того, поле $X_i^x(t)$ тождественно равно нулю. Следовательно,

$$\dot{J}_i^x(0) = \dot{t}_{i+1}^x(0) - \dot{t}_i^x(0),$$

$$\ddot{J}_i^x(0) = \ddot{t}_{i+1}^x(0) - \ddot{t}_i^x(0)$$

(см. формулы (2) и (3); следует иметь в виду, что $(\dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i) = l$ для любого i). Поэтому, согласно формуле (4),

$$\begin{aligned} Q_*(x) &= 2 \sum_{i=0}^s (\dot{t}_{i+1}^x(0) - \dot{t}_i^x(0))^2 + \\ &+ \frac{2l}{s+1} \sum_{i=0}^s (\ddot{t}_{i+1}^x(0) - \ddot{t}_i^x(0)) = 2 \sum_{i=0}^s (\dot{t}_{i+1}^x(0) - \dot{t}_i^x(0))^2, \end{aligned}$$

ибо $\ddot{t}_0^x(0) = \ddot{t}_{s+1}^x(0) = 0$ (так как $t_0^x(\tau) = 0$ и $t_{s+1}^x(\tau) = 1$ при любом τ). Следовательно,

$$Q_*(x) \geq 0,$$

причем $Q_*(x) = 0$ лишь тогда, когда $\dot{t}_{i+1}^x(0) = \dot{t}_i^x(0)$ при любом $i = 0, 1, \dots, s$, т. е. лишь тогда, когда $\dot{t}_i^x(0) = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$ (ибо, например, $\dot{t}_0^x(0) = 0$ для всех x).

Но, по определению, число $t_i(x)$ соответствует на геодезической $\gamma(t)$ точке $q_i = \gamma(t_i(x))$, для которой $x_i^k(q_i) = x_i^k$. В частности, $x_i^m(\gamma(t_i(x))) = x_i^m$, т. е.

$$x_i^m(t_i(x)) = x_i^m,$$

где $x_i^m(t) = x_i^m(\gamma(t))$. Дифференцируя это равенство по x_i^m и полагая $x = 0$, мы получим соотношение

$$\dot{x}_i^m(t_l) \left(\frac{\partial t_i(x)}{\partial x_i^m} \right)_{x=0} = 1$$

(здесь и в следующих формулах суммирование по l не производится!). Следовательно,

$$\left(\frac{\partial t_i(x)}{\partial x_i^m} \right)_{x=0} \neq 0.$$

С другой стороны, дифференцируя функцию $t_i^x(\tau) = t_i(\tau x)$ по τ и полагая $\tau = 0$, мы получим, что

$$\dot{t}_i^x(0) = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial t_i(x)}{\partial x_j^m} \right)_{x=0} x_j^m = \left(\frac{\partial t_i(x)}{\partial x_i^m} \right)_{x=0} x_i^m,$$

ибо функция $t_i(x)$ зависит, очевидно, только от переменной x_i^m (напомним, что $x \in R^m$, и потому $x_j^k = 0$ при $k \neq m$). Таким образом,

$$\dot{t}_i^x(0) \neq 0, \text{ если } x_i^m \neq 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Другими словами, равенство $\dot{t}_i^x(0) = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$ возможно лишь при $x = 0$. Этим доказано, что

на подпространстве R^m пространства R^{sm} квадратичная форма $Q_*(x)$ положительно определена.

Покажем теперь, что пара $(R^m, R^{s(m-1)})$ осуществляет разложение формы $Q_*(x)$ в прямую сумму, т. е.

$$Q_*(x + z) = Q_*(x) + Q_*(z)$$

для любых точек $x \in R^m$ и $z \in R^{s(m-1)}$.

Действительно (ср. п. 9), легко видеть, что отображение

$$R^{sm} \rightarrow M_{p_i},$$

сопоставляющее каждой точке $x \in R^{sm}$ вектор $\dot{a}_i^x(0) \in M_{p_i}$ линейно. В частности,

$$\dot{a}_i^{x+z}(0) = \dot{a}_i^x(0) + \dot{a}_i^z(0)$$

для любых точек $x \in R^s$ и $z \in R^{s(m-1)}$. Поскольку, по условию, $(\dot{a}_i^z(0), \dot{\gamma}_i) = 0$, отсюда ввиду формулы (2) вытекает, что

$$J_i^{x+z}(0) = J_i^x(0)$$

для любых точек $x \in R^s$ и $z \in R^{s(m-1)}$.

По аналогичным соображениям отображение

$$R^{sm} \rightarrow R,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in R^{sm}$ число $\dot{t}_i^x(0)$ также линейно. Поэтому ввиду формул

$$X_i^x(t_i) = \dot{a}_i^x(0) - \dot{t}_i^x(0) \dot{\gamma}_i,$$

$$X_i^x(t_{i+1}) = \dot{a}_{i+1}^x(0) - \dot{t}_{i+1}^x(0) \dot{\gamma}_{i+1}$$

и того факта, что поле $X_i^x(t)$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ однозначно определяется векторами $X_i^x(t_i)$ и $X_i^x(t_{i+1})$ и линейно зависит от этих векторов, линейным является и отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in R^{sm}$ поле $X_i^x(t)$. В частности,

$$X_i^{x+z}(t) = X_i^z(t)$$

для любых точек $x \in R^s$ и $z \in R^{s(m-1)}$ (ибо, как мы знаем, поле $X_i^x(t)$ тождественно равно нулю). Следовательно (см. формулу (3)),

$$\begin{aligned} \ddot{J}_i^{x+z}(0) = \frac{1}{l} \left[\left(\frac{\nabla \dot{a}_{i+1}^{x+z}}{d\tau}(0), \dot{\gamma}_{i+1} \right) - \left(\frac{\nabla \dot{a}_i^{x+z}}{d\tau}(0), \dot{\gamma}_i \right) \right] + \\ + \frac{1}{l} I_{t_i}^{t_{i+1}}(X^z(t)), \end{aligned}$$

и потому

$$\sum_{i=0}^s \ddot{J}_i^{x+z}(0) = \frac{1}{l} I_0^1(X^z(t)) = Q(z),$$

ибо

$$\frac{\nabla \dot{a}_0^{x+z}}{d\tau}(0) = 0, \quad \frac{\nabla \dot{a}_{s+1}^{x+z}}{d\tau}(0) = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 Q_*(x+z) &= 2 \sum_{i=0}^s ([j_i^{x+z}(0)]^2 + j_i^{x+z}(0) \ddot{j}_i^{x+z}(0)) = \\
 &= 2 \sum_{i=0}^s (j_i^x(0))^2 + \frac{2l}{s+1} \sum_{i=0}^s \ddot{j}_i^{x+z}(0) = \\
 &= Q_*(x) + \frac{2l}{s+1} Q(z) = Q_*(x) + Q_*(z),
 \end{aligned}$$

как и утверждалось.

Из доказанных утверждений немедленно вытекает, что *коранг и отрицательный индекс инерции формы Ботта* $Q_*(x)$ *равны соответственно корангу и отрицательному индексу инерции формы Морса* $Q(z)$.

Следовательно, доказанные в пп. 11 и 12 теоремы об индексах, мы можем теперь сформулировать в следующей окончательной форме:

Индекс $\lambda_1(0)$ точки $t=0$ (по отношению к точке $t=1$) равен корангу формы Ботта Q_* , а индекс $\lambda_1(0, 1)$ интервала $(0, 1)$ равен ее отрицательному индексу инерции.

ФОКАЛЬНЫЕ ТОЧКИ

1. Вторая квадратичная форма подмногообразия

Все изложенные выше результаты относились к двум фиксированным точкам $\bar{p}$ и $\bar{q}$ пространства M и некоторой геодезической $\gamma(t)$, проходящей через эти точки. Мы обобщим теперь эти результаты на случай, когда точка $\bar{q}$ заменена некоторым подмногообразием $N \subset M$, а геодезическая $\gamma(t)$ (по-прежнему проходящая через точку $\bar{p}$) ортогональна подмногообразию N . Для этого мы должны будем предварительно перенести известное из элементарной дифференциальной геометрии понятие второй квадратичной формы поверхности в трехмерном евклидовом пространстве на случай любых подмногообразий произвольных римановых пространств.

Пусть M — риманово пространство, N — его подмногообразие, p — точка подмногообразия N и $N_p \subset M_p$ — касательное пространство подмногообразия N в точке p . Выбрав в пространстве N_p два вектора A и B , рассмотрим на подмногообразии N произвольную кривую $\gamma(t)$, для которой

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = A,$$

и на этой кривой такое поле $Y_*(t) \in N_{\gamma(t)}$, что

$$Y_*(0) = B.$$

(Чтобы построить это поле, можно, например, параллельно перенести вектор B в каждую точку кривой $\gamma(t)$, рассматриваемой как кривая в M , и затем ортогонально спроектировать получившиеся векторы $Y(t) \in M_{\gamma(t)}$ на подпространства $N_{\gamma(t)}$.) Ковариантно дифференцируя поле $Y_*(t)$ вдоль кривой $\gamma(t)$,

мы получим на этой кривой некоторое поле $\frac{\nabla Y_*}{dt}(t) \in M_{\gamma(t)}$.

В частности, при $t=0$ мы получим вектор $\frac{\nabla Y_*}{dt}(0) \in M_p$.

Пусть теперь C — произвольный вектор пространства M_p , ортогональный подмногообразию N (т. е. ортогональный подпространству N_p). Мы положим

$$\pi_C(A, B) = \left(C, \frac{\nabla Y_*}{dt}(0) \right).$$

Оказывается, что

число $\pi_C(A, B)$ не зависит от выбора кривой $\gamma(t)$ и поля $Y_*(t)$, т. е. определяется исключительно векторами $A, B \in N_p$ и вектором $C \perp N_p$.

Действительно, пусть

$$x^1, \dots, x^n$$

— произвольная система локальных координат многообразия N в точке p , равных нулю в этой точке, и пусть

$$\xi: U \rightarrow R^n, \quad U \subset N,$$

— соответствующий координатный диффеоморфизм. Обратный диффеоморфизм $\varphi = \xi^{-1}: U^0 \rightarrow N$, где $U^0 = \xi(U) \subset R^n$, рассматриваемый как отображение $U^0 \rightarrow M$, мы можем трактовать как n -мерную поверхность в M , определенную на открытом множестве U^0 . Базисные векторы $\frac{\partial \varphi}{\partial t^i}(t^1, \dots, t^n)$, $(t^1, \dots, t^n) \in U^0$, этой поверхности связаны с векторами $\frac{\partial}{\partial x^i}$ формулами

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^i}(x^1(q), \dots, x^n(q)) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q, \quad q \in U.$$

В частности,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^i}(0, \dots, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Кривая $\gamma(t)$ принадлежит поверхности φ и определяется на ней функциями $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$, т. е.

$$\varphi(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \gamma(t).$$

Следовательно, полагая

$$Y_*(t) = Y_*^j(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)} = Y_*^j(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t^j}(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

(суммирование по j проводится от 1 до n), мы получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\nabla Y_*^j}{dt}(t) &= \frac{dY_*^j(t)}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial t^j}(x^1(t), \dots, x^n(t)) + \\ &+ Y_*^j(t) \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t^j}(x^1(t), \dots, x^n(t)) \right) = \\ &= \frac{dY_*^j(t)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)} + Y_*^j(t) \dot{x}^i(t) \left(\frac{\nabla}{dt^i} \frac{\partial \varphi}{\partial t^j} \right)(x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{aligned}$$

(см. формулу (4) п. 2 гл. 7). В частности,

$$\frac{\nabla Y_*^j}{dt}(0) = \frac{dY_*^j}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p + A^i B^i \left(\frac{\nabla}{dt^i} \frac{\partial \varphi}{\partial t^j} \right)(0, \dots, 0),$$

где $A^i = \dot{x}^i(0)$ и $B^j = Y_*^j(0)$ — компоненты векторов A и B в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$.

Поскольку $C \perp N_p$ и, значит, $\left(C, \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, отсюда вытекает, что

$$\pi_C(A, B) = \left(C, \frac{\nabla}{dt^i} \frac{\partial \varphi}{\partial t^j}(0, \dots, 0) \right) A^i B^j.$$

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано, ибо правая часть этой формулы от выбора кривой $\gamma(t)$ и поля $Y_*(t)$ не зависит.

Из доказанной формулы и формулы (2) п. 2 гл. 7 вытекает, кроме того, что

функция $\pi_C(A, B)$ векторов $A, B \in N_p$ является симметрической билинейной формой на пространстве N_p .

Соответствующая квадратичная форма

$$\pi_C(A) = \pi_C(A, A)$$

является точным аналогом второй квадратичной формы поверхностей трехмерного евклидова пространства. Из сказанного выше непосредственно следует, что

$$\pi_C(A) = \left(\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(0), C \right),$$

где $\gamma(t)$ — произвольная кривая на подмногообразии N , для которой

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = A.$$

В дальнейшем нам будет удобнее вместо формы $\pi_C(A)$ рассматривать соответствующий самосопряженный оператор

$T_C: N_p \rightarrow N_p$. Чтобы получить прямое геометрическое определение этого оператора, мы рассмотрим на кривой $\gamma(t)$ поле параллельных векторов $Z(t)$, для которого

$$Z(0) = C.$$

Пусть $Z_*(t) \in N_{\gamma(t)}$ — ортогональная проекция вектора $Z(t) \in M_{\gamma(t)}$ на подпространство $N_{\gamma(t)}$. Мы положим

$$T_C(A) = \frac{\nabla Z_*}{dt}(0).$$

Покажем, что

вектор $T_C(A)$ принадлежит подпространству N_p и не зависит от выбора кривой $\gamma(t)$.

Действительно, полагая

$$Z_*(t) = Z_*^j(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)},$$

мы, как и выше, найдем, что

$$\frac{\nabla Z_*}{dt}(t) = \frac{dZ_*^j(t)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)} + Z_*^j(t) \dot{x}^i(t) \left(\frac{\nabla}{\partial t^i} \frac{\partial}{\partial t^j} \right) (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

С другой стороны, так как $C \perp N_p$, то $Z_*^j(0) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$\frac{\nabla Z_*}{dt}(0) = \frac{dZ_*^j(0)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)},$$

и потому $T_C(A) = \frac{\nabla Z_*}{dt}(0) \in N_p$.

Пусть теперь $Y(t)$ — произвольное поле параллельных векторов на кривой $\gamma(t)$ и пусть $Y_*(t)$ — ортогональная проекция вектора $Y(t)$ на подпространство $N_{\gamma(t)}$. Пусть, кроме того,

$$Y_0(t) = Y(t) - Y_*(t), \quad Z_0(t) = Z(t) - Z_*(t).$$

Так как $Y_0(t) \perp N_{\gamma(t)}$ и $Z_0(t) \perp N_{\gamma(t)}$, то

$$(Z_*(t), Y_0(t)) = 0, \quad (Z_0(t), Y_*(t)) = 0.$$

Дифференцируя эти соотношения по t , мы получим, что

$$\left(\frac{\nabla Z_*}{dt}(t), Y_0(t)\right) + \left(Z_*(t), \frac{\nabla Y_0}{dt}(t)\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\nabla Z_0}{dt}(t), Y_*(t)\right) + \left(Z_0(t), \frac{\nabla Y_*}{dt}(t)\right) = 0.$$

Но

$$\frac{\nabla Y_0}{dt}(t) = -\frac{\nabla Y_*}{dt}(t),$$

$$\frac{\nabla Z_0}{dt}(t) = -\frac{\nabla Z_*}{dt}(t),$$

ибо $\frac{\nabla Y}{dt}(t) = 0$, $\frac{\nabla Z}{dt}(t) = 0$. Следовательно,

$$\left(\frac{\nabla Z_*}{dt}(t), Y_0(t)\right) = \left(Z_*(t), \frac{\nabla Y_*}{dt}(t)\right),$$

$$\left(\frac{\nabla Z_*}{dt}(t), Y_*(t)\right) = \left(Z_0(t), \frac{\nabla Y_*}{dt}(t)\right).$$

Складывая эти равенства, мы получим равенство

$$\left(\frac{\nabla Z_*}{dt}(t), Y(t)\right) = \left(Z(t), \frac{\nabla Y_*}{dt}(t)\right).$$

Полагая в этом равенстве $t=0$, мы получим соотношение

$$(T_C A, B) = \pi_C(A, B), \quad (1)$$

где $B = Y(t)$. Поскольку $\pi_C(A, B)$ не зависит от выбора кривой $\gamma(t)$, это равенство показывает, что для любого вектора $B \in N_p$ скалярное произведение $(T_C A, B)$ также не зависит от выбора этой кривой. Так как $T_C A \in N_p$, то это возможно только тогда, когда вектор $T_C A$ не зависит от выбора кривой $\gamma(t)$. Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Кроме того, из формулы (1) вытекает, что отображение $T_C: N_p \rightarrow N_p$ линейно и самосопряжено, т. е. $T_C(\alpha A + \beta B) = \alpha T_C A + \beta T_C B$ и $(T_C A, B) = (A, T_C B)$ для любых векторов $A, B \in N_p$ и любых чисел α и β .

2. Фокальные точки

Пусть $\gamma(t)$ — такая геодезическая, что при некотором $t_1 \in \mathbb{R}$ имеют место соотношения

$$\gamma(t_1) \in N, \quad \dot{\gamma}(t_1) \perp N_{\gamma(t_1)}.$$

Мы рассмотрим подпространство $\Lambda_{\gamma}^N(t_1)$ пространства J_{γ} полей Якоби на геодезической $\gamma(t)$, состоящее из таких полей $X(t)$, что

$$\begin{aligned} X(t_1) &\in N_{\gamma(t_1)}, \\ \frac{\nabla X}{dt}(t_1) + T_{\dot{\gamma}(t_1)}X(t_1) &\perp N_{\gamma(t_1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения (1) линейны и накладывают на решения $X(t)$ уравнения (3) п. 3 гл. 8 точно m независимых условий. Следовательно,

размерность подпространства $\Lambda_{\gamma}^N(t_1)$ равна размерности m многообразия M .

Точку $p = \gamma(t_0)$ геодезической $\gamma(t)$ (или соответствующую точку $t_0 \in R$) мы будем называть *фокальной точкой* подмногообразия N , если существует такое отличное от нуля поле Якоби $X(t) \in \Lambda_{\gamma}^N(t_1)$, что

$$X(t_0) = 0,$$

т. е. если подпространство

$$\Lambda_{\gamma}(t_0) \cap \Lambda_{\gamma}^N(t_1)$$

пространства J_{γ} отлично от нуля. Размерность $\lambda_N(t_0)$ этого подпространства мы будем называть *индексом* точки p (или точки t_0) относительно подмногообразия N . Таким образом,

точка t_0 тогда и только тогда является фокальной точкой подмногообразия N , когда ее индекс $\lambda_N(t_0)$ отличен от нуля.

Определение фокальных точек совершенно аналогично определению сопряженных точек и получается из последнего заменой подпространства $\Lambda_{\gamma}(t_1)$ подпространством $\Lambda_{\gamma}^N(t_1)$. Проследим эту аналогию более внимательно.

Во-первых, легко видеть, что

для любых двух полей $X(t), Y(t) \in \Lambda_{\gamma}^N(t_1)$ имеет место равенство

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t) \right) = \left(X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t) \right), \quad (2)$$

аналогичное равенству (5) п. 3 гл. 8.

Действительно, как мы знаем (см. доказательство равенства (5) п. 3 гл. 8), для любых двух полей $X(t), Y(t) \in J_{\gamma}$

имеет место соотношение

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t)\right) - \left(X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t)\right) = \text{const.} \quad (2')$$

Но если $X(t), Y(t) \in \Lambda_\gamma^N(t_1)$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t_1), Y(t_1)\right) - \left(X(t_1), \frac{\nabla Y}{dt}(t_1)\right) = \\ = - (T_{\dot{\gamma}(t_1)} X(t_1), Y(t_1)) + (X(t_1), T_{\dot{\gamma}(t_1)} Y(t_1)) = 0, \end{aligned}$$

ибо оператор $T_{\dot{\gamma}(t_1)}$ самосопряжен. Следовательно, константа в формуле (2') равна нулю.

Аналогично формула (6) п. 3 гл. 8 также сохраняется, т. е. для любого поля $X(t) \in \Lambda_\gamma(t_0) \cap \Lambda_\gamma^N(t_1)$ имеет место равенство

$$(X(t), \dot{\gamma}(t)) = 0. \quad (3)$$

Доказательство формулы (3) дословно совпадает с доказательством формулы (6) п. 3 гл. 8 (следует только принять во внимание, что, по условию, $\dot{\gamma}(t_1) \perp X(t_1)$).

Построение полей из $\Lambda_\gamma^N(t_1)$ с помощью якобиевых вариаций описывается следующим предложением:

поле Якоби $X(t)$ на геодезической $\gamma(t)$ тогда и только тогда принадлежит подпространству $\Lambda_\gamma^N(t_1)$, когда оно ассоциировано с такой якобиевой вариацией $\varphi(t, \tau)$ геодезической $\gamma(t)$, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t_1, \tau) &\in N && \text{для всех } \tau, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1, \tau) &\perp N_{\varphi(t, \tau)} && \text{для всех } \tau. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Действительно, пусть $\varphi(t, \tau)$ удовлетворяет условиям (4). Эти условия означают, в частности, что кривая

$$\alpha(\tau) = \varphi(t_1, \tau)$$

принадлежит подмногообразию N . Поэтому

$$\dot{\alpha}(\tau) \in N_{\alpha(\tau)}$$

и, в частности,

$$X(t_1) = \dot{\alpha}(0) \in N_{\gamma(t_1)}.$$

Далее, условия (4) означают также, что векторное поле

$$A(\tau) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1, \tau)$$

на кривой $\alpha(\tau)$ ортогонально подмногообразию N .

Пусть A — произвольный вектор пространства $N_{\gamma(t_1)}$. Параллельно перенося вектор A вдоль кривой $\alpha(\tau)$ и ортогонально проецируя получившиеся векторы на подпространства $N_{\alpha(\tau)}$, мы получим на кривой $\alpha(\tau)$ некоторое векторное поле $A_*(\tau)$. Так как $A(\tau) \perp N_{\alpha(\tau)}$, то

$$(A(\tau), A_*(\tau)) = 0 \quad \text{для всех } \tau.$$

Дифференцируя это равенство по τ и полагая $\tau = 0$, мы, в силу соотношения

$$\frac{\nabla A}{\partial \tau}(0) = \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1, 0) = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1, 0) = \frac{\nabla X}{\partial t}(t_1),$$

получим, что

$$\left(\frac{\nabla X}{\partial t}(t_1), A \right) + \left(\dot{\gamma}(t_1), \frac{\nabla A_*}{\partial \tau}(0) \right) = 0.$$

Поскольку $\dot{\gamma}(t_1) \perp N_{\gamma(t_1)}$, а $\dot{\alpha}(0) = X(t_1)$, второй член этого выражения равен

$$\pi_{\dot{\gamma}(t_1)}(X(t_1), A) = (T_{\dot{\gamma}(t_1)} X(t_1), A).$$

Поэтому

$$\left(\frac{\nabla X}{\partial t}(t_1) + T_{\dot{\gamma}(t_1)} X(t_1), A \right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\nabla X}{\partial t}(t_1) + T_{\dot{\gamma}(t_1)} X(t_1) \perp N_{\gamma(t_1)}.$$

Таким образом, $X(t) \in \Lambda_{\gamma}^N(t_1)$.

Обратно, пусть $X(t)$ — произвольное поле Якоби, принадлежащее подпространству $\Lambda_{\gamma}^N(t_1)$. Поскольку $X(t_1) \in N_{\gamma(t_1)}$, на многообразии N существует такая кривая $\alpha(\tau)$, что

$$\alpha(0) = \gamma(t_1), \quad \dot{\alpha}(0) = X(t_1).$$

Построив на кривой $\alpha(\tau)$ произвольное поле $Y(\tau)$, для которого

$$Y(0) = \dot{\gamma}(t_1), \quad \frac{\nabla Y}{\partial t}(0) = \frac{\nabla X}{\partial t}(0),$$

мы положим

$$Y(\tau) = A(\tau) + B(\tau),$$

где $A(\tau) \perp N_{\alpha(\tau)}$, $B(\tau) \in N_{\alpha(\tau)}$. Так как $Y(0) \perp N_{\gamma(t_1)}$, то

$$A(0) = \dot{\gamma}(t_1),$$

и, следовательно, для кривой $\alpha(\tau)$ и поля $A(\tau)$ выполнены условия (1) п. 3 гл. 8 (с заменой t_0 на t_1). Поэтому существует такая якобиева вариация $\varphi(t, \tau)$ геодезической $\gamma(t)$, что

$$\varphi(t_1, \tau) = \alpha(\tau), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1, \tau) = A(\tau) \quad \text{для всех } \tau.$$

Так как эта вариация удовлетворяет условиям (4), то для завершения доказательства остается лишь доказать, что ассоциированное с ней поле Якоби

$$\bar{X}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t, 0)$$

совпадает с полем $X(t)$, для чего в свою очередь достаточно доказать, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}(t_1) &= X(t_1), \\ \frac{\nabla \bar{X}}{dt}(t_1) &= \frac{\nabla X}{dt}(t_1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Но, по построению,

$$\bar{X}(t_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1, 0) = \dot{\alpha}(0) = X(t_1),$$

аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \bar{X}}{dt}(t_1) &= \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t_1, 0) = \frac{\nabla}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1, 0) = \\ &= \frac{\nabla A}{d\tau}(0) = \frac{\nabla Y}{d\tau}(0) - \frac{\nabla B}{d\tau}(0) = \frac{\nabla X}{dt}(t_1) - \frac{\nabla B}{d\tau}(0). \end{aligned}$$

Таким образом, нам следует лишь доказать, что

$$\frac{\nabla B}{d\tau}(0) = 0.$$

Так как вариация $\varphi(t, \tau)$ удовлетворяет условиям (4), то, по уже доказанному,

$$\frac{\nabla \bar{X}}{dt}(t_1) + T_{\dot{\gamma}(t_1)} \bar{X}(t_1) \perp N_{\gamma(t_1)},$$

и потому

$$\frac{\nabla \bar{X}}{dt}(t_1) - \frac{\nabla X}{dt}(t_1) \perp N_{\gamma(t_1)}, \quad (6)$$

ибо $\bar{X}(t_1) = X(t_1)$ и, по условию,

$$\frac{\nabla X}{dt}(t_1) + T_{\dot{\gamma}(t_1)} X(t_1) \perp N_{\gamma(t_1)}.$$

Соотношение (6) означает, что $\frac{\nabla B}{d\tau}(0) \perp N_{\gamma(t_1)}$. Следовательно, нам достаточно доказать, что $\left(\frac{\nabla B}{d\tau}(0), C\right) = 0$ для любого вектора $C \perp N_{\gamma(t_1)}$.

Пусть $Z(\tau)$ — поле параллельных на кривой $\alpha(\tau)$ векторов, для которого

$$Z(0) = C,$$

и пусть

$$Z(\tau) = Z_*(\tau) + Z_0(\tau),$$

где $Z_*(\tau) \in N_{\alpha(\tau)}$, $Z_0(\tau) \perp N_{\alpha(\tau)}$. Дифференцируя равенство

$$(B(\tau), Z_0(\tau)) = 0$$

по τ и полагая $\tau = 0$, мы и получим, что

$$\left(\frac{\nabla B}{d\tau}(0), C\right) = 0,$$

ибо $Z_0(0) = C$ и $B(0) = 0$.

Тем самым наше предположение полностью доказано.

В п. 4 гл. 8 из соответствующего предложения, относившегося к пространству $\Lambda_{\gamma}(t_1)$, мы вывели, что сопряженные точки не могут быть слишком близки. Аналогично, мы могли бы теперь доказать, что точка p , достаточно близкая к подмногообразию N , не является фокальной точкой ни для какой геодезической γ , проходящей через эту точку. Однако этот факт нам не понадобится и мы оставим его без доказательства.

Другое важное свойство сопряженных точек, а именно их изолированность, также сохраняется для фокальных точек. Другими словами,

фокальные точки подмногообразия N (соответствующие данной геодезической $\gamma(t)$) расположены на оси R изолированно, так что в каждом (открытом или замкну-

том) интервале I оси R содержится лишь конечное число этих точек.

Доказательство этого предложения дословно повторяет (с учетом сделанного в конце п. 4 гл. 8 замечания) доказательство соответствующего предложения для сопряженных точек (следует только ссылку на формулу (5) п. 3 гл. 8 заменить ссылкой на формулу (2) этого пункта).

Аналогично случаю сопряженных точек, сумму $\lambda_N(Y)$ индексов фокальных точек, содержащихся в интервале I , мы будем называть *индексом* этого интервала (относительно подмногообразия N).

3. Вычисление индекса λ_N

Аналогия между сопряженными и фокальными точками позволяет перенести на случай фокальных точек результаты гл. 8, относящиеся к вычислению индексов точек и интервалов. Мы покажем сейчас, как этот перенос можно осуществить.

С этой целью мы в первую очередь перенесем результаты пп. 6 и 7 гл. 8, касающиеся функционала I_a^b , на случай более общего функционала

$$\bar{I}_a^b(X(t)) = (TX(b), X(b)) + I_a^b(X(t)), \quad X(t) \in \mathfrak{M},$$

где T — произвольный самосопряженный оператор $M_{\gamma(b)} \rightarrow M_{\gamma(b)}$.

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — два поля из $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\gamma$, принимающие в точках a и b одни и те же значения:

$$X(a) = Y(a), \quad X(b) = Y(b). \quad (1)$$

Ясно, что неравенство

$$\bar{I}_a^b(X(t)) \leq \bar{I}_a^b(Y(t)) \quad (2)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$I_a^b(X(t)) \leq I_a^b(Y(t)).$$

Следовательно,

минимальные в смысле п. 6 гл. 8 поля являются минимальными полями и по отношению к функционалу $\bar{I}_a^b$, т. е. для любого такого поля $X(t)$ и любого поля $Y(t) \in \mathfrak{M}_\gamma$

удовлетворяющего условиям (1), имеет место неравенство (2).

В частности (см. п. 6 гл. 8),
любое поле, минимальное по отношению к функционалу I_a^b является полем Якоби.

Кроме того (см. п. 7 гл. 8),
если на отрезке $[a, b]$ нет точек, сопряженных с точкой b , то для любого поля $Y(t) \in \mathfrak{M}$ имеет место неравенство

$$I_a^b(X(t)) \leq I_a^b(Y(t)), \quad (3)$$

где $X(t)$ — такое поле Якоби, что

$$X(a) = Y(a), \quad X(b) = Y(b).$$

Равенство в формуле (3) имеет место только при $Y(t) = X(t)$.

Аналог неравенства (2) п. 7 гл. 8 для функционала I_a^b также, конечно, имеет место. Однако, как будет ясно из дальнейшего, в рассматриваемом теперь случае этого неравенства недостаточно. Нам понадобится следующее более сильное утверждение:

если точка a достаточно близка к точке b , то для любого отличного от нуля поля $X(t) \in \mathfrak{M}$, равного нулю в точке a , имеет место неравенство

$$I_a^b(X(t)) > 0. \quad (4)$$

Усиление здесь состоит в том, что мы уже не требуем, чтобы $X(b) = 0$.

Чтобы не прерывать изложения, мы отложим доказательство этого неравенства до п. 4.

Перейдем теперь к построению ломаных полей Якоби. Так же как в п. 8 гл. 8, мы будем рассматривать геодезическую $\gamma(t)$, для которой

$$\gamma(0) = \bar{p}, \quad \gamma(1) = \bar{q},$$

но, кроме того, мы будем дополнительно предполагать, что точка $\bar{q}$ принадлежит подмногообразию N и что

$$\dot{\gamma}(1) \perp N_{\bar{q}}.$$

Пространство Θ мы определим, как прежде, заменив лишь условие $X(1)=0$ условием $X(1) \in N_{\bar{q}}$. От числа $\delta > 0$ мы дополнительно потребуем, чтобы δ -окрестность точки $\bar{q}$ на подмногообразии N была координатной окрестностью некоторой системы локальных координат, равных нулю в точке $\bar{q}$. Эти координаты мы будем обозначать символами

$$z_{s+1}^1, \dots, z_{s+1}^n \quad (5)$$

и будем считать их раз навсегда фиксированными (аналогично координатам $z_i^1, \dots, z_i^{m-1}$ на подмногообразиях P_i , $i=1, \dots, s$).

За множество U мы примем теперь открытое множество

$$U = U_1 \times \dots \times U_s \times U_{s+1}$$

пространства $R^{s(m-1)+n}$, где $U_1, \dots, U_s \subset R^{m-1}$ — те же множества, что и прежде, а $U_{s+1} \subset R^n$ — образ δ -окрестности точки $\bar{q}$ в многообразии N при координатном диффеоморфизме, соответствующем координатам (5).

Каждая точка $z \in U$ будет определять теперь $s+1$ точек

$$q_1 \in P_1, \dots, q_s \in P_s, q_{s+1} \in N$$

и, соответственно этому, за геодезическую ломаную $u^z(t)$ мы будем принимать теперь ломаную, состоящую из кратчайших геодезических, последовательно соединяющих точки

$$p_0 = \gamma(\theta) = q_0, q_1, \dots, q_s, q_{s+1}.$$

(Таким образом, единственное отличие от построения п. 8 гл. 8 состоит в том, что точка q_{s+1} не обязательно совпадает с фиксированной точкой $\bar{q}$.) Параметр t на кривой $u^z(t)$ мы выберем так же, как и прежде, т. е. пропорционально длине дуги и притом так, чтобы

$$u^z(0) = p_0, \quad u^z(1) = q_{s+1}.$$

Функции $t_i(z)$, вариации φ_i^z и поля $X^z(t)$ мы определим точно так же, как в п. 8 гл. 8. Вывод о том, что

$$X^z(t) \in \Theta,$$

сохранит при этом силу (нужно лишь заметить, что $X^z(1) = \dot{a}_{s+1}(0)$, и в доказательстве соотношения $J^z(0) = 0$ ссылку

на равенство $\dot{a}_{s+1}(0) = 0$ заменить ссылкой на соотношение $\dot{a}_{s+1}(0) \perp \dot{\gamma}(1)$, имеющее место в силу включения $\dot{a}_{s+1}(0) \in N_{\bar{q}}$.

Теорема п. 9 гл. 8 об изоморфизме, очевидно, полностью сохраняется (с заменой пространства $R^{s(m-1)}$ на пространство $R^{s(m-1)+n}$ и с аналогичной заменой пространства $L = M_{p_1} + \dots + M_{p_s}$ на пространство $L = M_{p_1} + \dots + M_{p_s} + N_{\bar{q}}$). В заключительном замечании п. 9 гл. 8 для полного определения поля $X(t)$ следует добавить еще произвольный вектор $X_{s+1} \in N_{\bar{q}}$.

Форма Морса $Q_0(z)$, $z \in R^{s(m-1)+n}$, определяется теперь дословно так же, как в п. 10 гл. 8. Однако вместо формулы (1) п. 10 гл. 8 мы получим теперь формулу

$$Q_0(z) = \frac{1}{l} \left[\left(\frac{\nabla \dot{a}_{s+1}^z}{d\tau}(0), \dot{\gamma}(1) \right) + I_{\theta}^1(X^z(t)) \right],$$

ибо теперь уже, вообще говоря, $\frac{\nabla \dot{a}_{s+1}^z}{d\tau}(0) \neq 0$.

Но кривая $a_{s+1}^z(\tau)$ представляет собой кривую на N , для которой

$$\dot{a}_{s+1}^z(0) = X^z(1),$$

и потому (см. п. 1)

$$\left(\frac{\nabla \dot{a}_{s+1}^z}{d\tau}(0), \dot{\gamma}(1) \right) = \pi_{\dot{\gamma}(1)}(X^z(1)) = (T_{\dot{\gamma}(1)} X^z(1), X^z(1)). \quad (6)$$

Таким образом,

$$Q_0(z) = \frac{1}{l} I_{\theta}^1(X^z(t)),$$

где I_{θ}^1 — функционал I_a^b , построенный для $a = \theta$, $b = 1$ и оператора $T: M_{\bar{p}} \rightarrow M_{\bar{q}}$, совпадающего с оператором $T_{\dot{\gamma}(1)}$ на подпространстве $N_{\bar{p}}$ и равного нулю на его ортогональном дополнении.

Так же как из формулы (1) п. 10 гл. 8, из этой формулы немедленно следует, что

при θ , достаточно близком к 1, форма $Q_0(z)$ положительно определена,

только вместо неравенства (2) п. 7 гл. 8 мы должны воспользоваться теперь (пока еще нами не доказанным) неравенством (4) (ибо, вообще говоря, $X^z(1) \neq 0$).

Доказательство независимости коранга c_θ и отрицательного индекса инерции h_θ формы Q_θ от выбора точек $t_1, \dots, t_s$ переносится на рассматриваемый теперь случай без каких-либо изменений (лишь ссылку на неравенство (2) п. 7 гл. 8 следует заменить ссылкой на неравенство (4)).

В доказательстве теоремы об индексе точки (см. п. 11 гл. 8) следует за подпространство Θ_0 принять подпространство пространства Θ , состоящее из гладких полей Якоби $X(t) \in \Theta$, для которых

$$\frac{\nabla X}{dt}(1) + T_{\dot{\gamma}(1)} X(1) \perp N_{\bar{q}}.$$

При таком выборе подпространства Θ_0 будет иметь место равенство

$$\Theta_0 = \Lambda_\gamma(\theta) \cap \Lambda_\gamma^N(1),$$

аналогичное равенству $\Theta_0 = \Lambda_\gamma(\theta) \cap \Lambda_\gamma(1)$ п. 11 гл. 8.

Далее, так же как в п. 11 гл. 8, мы, пользуясь формулой (3) п. 7 гл. 8, получим, что

$$Q_\theta(z) = \frac{1}{l} \left[\left(\frac{\nabla X^z}{dt}(1) + T_{\dot{\gamma}(1)} X^z(1), X^z(1) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X^z}{dt}(t_i - 0) - \frac{\nabla X^z}{dt}(t_i + 0), X^z(t_i) \right) \right],$$

и затем, что

$$Q_\theta(z) = \frac{1}{l} \left(\frac{\nabla X_\rho^{s+1}}{dt}(1) + T_{\dot{\gamma}(1)} X_\rho^{s+1}(1), X_\rho^{s+1}(1) \right) z_{s+1}^\rho z_{s+1}^\sigma + \\ + \left[\frac{1}{l} \sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X_{k_1}^{j_1}}{dt}(t_i - 0) - \frac{\nabla X_{k_1}^{j_1}}{dt}(t_i + 0), X_{k_1}^{j_1}(t) \right) \right] z_{j_1}^{k_1} z_j^k,$$

где по ρ и σ суммирование происходит от 1 до n , по j и j_1 — от 1 до s , а по k и k_1 — от 1 до $m-1$. (Здесь, как и в п. 11 гл. 8, $X_{k_1}^{j_1}(t)$, где $j=1, \dots, s+1$, а $k=1, \dots, m-1$ или n — поля $X^z(t)$, соответствующие векторам e_k стандартного базиса пространства $R^{s(m-1)+n}$.)

Отсюда, как и в п. 11 гл. 8, следует, что частные производные $L_k^j(z)$ формы Q_0 по z_j^k выражаются формулами

$$L_k^j(z) = \begin{cases} \frac{2}{l} \left(\frac{\nabla X^z}{dt}(1) + T_{\dot{\gamma}(1)} X^z(1), X_k^{s+1}(1) \right), & \text{если } j = s + 1, k = 1, \dots, n; \\ \frac{2}{l} \left[\sum_{i=1}^s \left(\frac{\nabla X^z}{dt}(t_i - 0) - \frac{\nabla X^z}{dt}(t_i + 0), X_k^j(t_i) \right) \right], & \text{если } j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, m - 1. \end{cases}$$

Из этих формул, так же как и в п. 11 гл. 8, непосредственно вытекает, что при $z \in C_0$ (где C_0 — максимальное подпространство пространства $R^{s(m-1)+m}$, на котором форма $Q_0(z)$ равна нулю) поле $X^z(t)$ гладко и удовлетворяет соотношению

$$\frac{\nabla X^z}{dt}(1) + T_{\dot{\gamma}(1)} X^z(1) \perp N_q^-.$$

Следовательно, если $z \in C_0$, то $X^z(t) \in \Theta_0$.

Обратно, если $X^z(t) \in \Theta_0$, то $L_k^j(z) = 0$ для всех j и k , и потому $z \in C_0$.

Тем самым полностью доказано, что

индекс $\lambda_N(\theta)$ точки θ равен корангу c_0 формы Q_0 .

Соответствующая теорема для индекса интервала:

индекс $\lambda_N(0, 1)$ интервала $(0, 1)$ равен отрицательному индексу инерции h формы $Q(z) = Q_0(z)$

доказывается теперь практически без каких-либо изменений. Более точно, доказательство неравенства

$$h \leq \lambda_N(0, 1)$$

проходит дословно так же, как доказательство соответствующего неравенства (1) п. 12 гл. 8, а в доказательстве обратного неравенства

$$h \geq \lambda_N(0, 1)$$

нужно считать поля $A_{jk}(t)$, $j = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, \lambda_j$, базисными полями пространства $\Lambda_\gamma(a_j) \cap \Lambda_\gamma^N(1)$ (а не пространства $\Lambda_\gamma(a_j) \cap \Lambda_\gamma(1)$, как в п. 12 гл. 8), пространство $R^{s(m-1)}$ заменить пространством $R^{s(m-1)+n}$ и наконец, при

доказательстве равенства $\bar{I}_0^1(X(t)) = 0$ (заменяющего теперь равенство $I_0^1(X(t)) = 0$) учесть, что дополнительный член

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}(1) + T_{\dot{\gamma}(1)} X(1), X(1) \right)$$

равен нулю, потому что поле $X(t)$ на отрезке $[a_r, 1]$ совпадает с некоторым полем из $\Lambda_{\dot{\gamma}}^N(1)$ и, следовательно, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\nabla X}{dt}(1) + T_{\dot{\gamma}(1)} X(1) \perp N_{\bar{q}}.$$

Построение формы Ботта $Q_*(x)$ осуществляется теперь так же, как в п. 13 гл. 8, только за множество V мы должны теперь принять множество

$$V = V_1 \times \dots \times V_s \times U_{s+1},$$

где $V_1, \dots, V_s \subset R^m$ — те же множества, что и в п. 13 гл. 8, а $U_{s+1} \subset R^n$ — как и выше, образ δ -окрестности точки $\bar{q}$ в подмногообразии N при соответствующем координатном диффеоморфизме. Новое множество V является открытым подмножеством пространства R^{sm+n} и каждая его точка x определяет $s+1$ точек

$$q_1 \in U_{\delta}(p_1), \dots, q_s \in U_{\delta}(p_s), q_{s+1} \in U_{\delta}(\bar{q}) \cap N.$$

Соответственно этому видоизменяется определение геодезической $u^x(t)$.

Поскольку изменения в определении формы $Q_*(x)$ согласованы с изменениями в определении формы $Q(z)$, мы (при тех же предположениях, что и в п. 13 гл. 8) получим, дословно повторяя рассуждения п. 13 гл. 8, что ограничение $Q_*(z)$ формы $Q_*(x)$ на подпространстве $R^{s(m-1)+n}$ пространства R^{sm+n} , определяемого уравнениями

$$x_1^m = 0, \dots, x_s^m = 0,$$

отличается от формы $Q(z)$ лишь множителем $\frac{2l}{s+1}$ (при этом в доказательстве равенства $\dot{J}_i(z) = 0$ следует при $i = s$ ссылку на равенство $\dot{a}_{s+1}^z(0) = 0$ заменить ссылкой на соотношение $\dot{a}_{s+1}^z(0) \perp \dot{\gamma}(1)$).

На пространстве R^s координат $x_1^m, \dots, x_s^m$ новая форма $Q_*(x)$ совпадает, очевидно, со старой формой $Q_*(x)$ и потому эта форма также положительно определена (на R^s).

Наконец, в доказательстве формулы

$$Q_*(x+z) = Q_*(x) + Q_*(z),$$

где теперь $z \in R^{s(m-1)+n}$ (тогда как по прежнему $x \in R^s$), необходимо лишь ссылку на равенство $\frac{\nabla \dot{a}_{s+1}^{x+z}}{d\tau}(0) = 0$ заменить ссылкой на формулу (6) и учесть, что

$$\frac{\nabla \dot{a}_{s+1}^{x+z}}{d\tau}(0) = \frac{\nabla \dot{a}_{s+1}^z}{d\tau}(0).$$

В остальном все рассуждения п. 13 гл. 8 не претерпевают никаких изменений.

Резюмируя, мы получаем, что

при указанных (в основном очевидных) изменениях все изложенные в гл. 8 результаты, касающиеся сопряженных точек и их индексов, имеют место также и для фокальных точек и их индексов.

Правда, это утверждение имеет пока условный характер, ибо неравенство (4) у нас еще не доказано.

4. Доказательство неравенства (4)

Чтобы доказать неравенство (4), мы произведем оценку снизу функционала

$$\begin{aligned} I_a^b(X(t)) = & (TX(b), X(b)) + \\ & + \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) - R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) \right] dt \end{aligned}$$

на множестве $\mathfrak{M}_0$ всех полей $X(t) \in \mathfrak{M}_\gamma$, для которых $X(a) = 0$.

Так как каждое поле $X(t) \in \mathfrak{M}_0$ является ковариантным интегралом поля $\frac{\nabla X}{dt}(t)$, равным нулю в точке a , то, согласно формуле (1) п. 5 гл. 8, при каждом $t \in [a, b]$ для любого

вектора $B_t \in M_\gamma(t)$ имеет место равенство

$$(B_t, X(t)) = \int_a^t \left(B_t, \tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right) d\theta, \quad (1)$$

где $\tau_t^\theta: M_{\gamma(\theta)} \rightarrow M_{\gamma(t)}$ — параллельный перенос вдоль кривой $\gamma(t)$. Полагая здесь $B_t = R_{\gamma(t)}(Y(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)$, где $Y(t)$ — произвольное поле из $\mathfrak{M}$, и учитывая, что, по определению,

$$(R_{\gamma(t)}(Y(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), X(t)) = R_{\gamma(t)}(Y(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)),$$

мы немедленно получим равенство

$$\begin{aligned} R_{\gamma(t)}(Y(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) &= \\ &= \int_a^t R_{\gamma(t)} \left(Y(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right) d\theta, \end{aligned}$$

справедливое для любого поля $Y(t) \in \mathfrak{M}$.

С другой стороны, так как в силу свойств симметрии риманова тензора

$$\begin{aligned} R_{\gamma(t)} \left(Y(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right) &= \\ &= \left(R_{\gamma(t)} \left(\tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \dot{\gamma}(t) \right) \dot{\gamma}(t), Y(t) \right), \end{aligned}$$

то, полагая здесь $Y(t) = X(t)$ и еще раз применяя формулу (1) (при $B_t = R_{\gamma(t)} \left(\tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \dot{\gamma}(t) \right) \dot{\gamma}(t)$), мы окончательно получим равенство

$$\begin{aligned} R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) &= \\ &= \int_a^t \int_a^t R_{\gamma(t)} \left(\tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \tau_t^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right) d\theta d\theta_1. \end{aligned}$$

Для любого $t \in [a, b]$ выражение

$$R_{\gamma(t)} \left(\tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \tau_t^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right)$$

представляет собой билинейную форму от векторов $\tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta)$ и $\tau_t^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1)$ и потому, согласно известной теореме линейной

алгебры, допускает оценку вида

$$\begin{aligned} \left| R_{\gamma(t)} \left(\tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \tau_{t_1}^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right) \right| &\leq \\ &\leq R(t) \left| \tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| \left| \tau_{t_1}^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right|, \end{aligned}$$

где $R(t)$ — некоторое положительное число. С другой стороны, ввиду изометричности параллельного переноса

$$\left| \tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| = \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right|$$

и

$$\left| \tau_{t_1}^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right| = \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t))| &\leq \\ &\leq \int_a^t \int_a^t \left| R_{\gamma(t)} \left(\tau_t^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), \tau_{t_1}^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right) \right| d\theta d\theta_1 \leq \\ &\leq \int_a^b \int_a^b R(t) \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right| d\theta d\theta_1 \leq R(t) \left[\int_a^b \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| d\theta \right]^2 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left| \int_a^b R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) dt \right| \leq R_0 \left[\int_a^b \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| d\theta \right]^2,$$

где $R_0 = \int_a^b R(t) dt$.

Найдем теперь аналогичную оценку для величины $(TX(b), X(b))$.

Применяя формулу (1) к числу $t=b$, мы получим, что для любого вектора $B \in M_{\gamma(b)}$ имеет место равенство

$$(B, X(b)) = \int_a^b \left(B, \tau_b^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right) d\theta. \quad (2)$$

В частности,

$$(TX(b), X(b)) = \int_a^b \left(TX(b), \tau_b^\theta \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right) d\theta.$$

Но в силу самосопряженности оператора T

$$\left(TX(b), \tau_b^0 \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right) = \left(T\tau_b^0 \frac{\nabla X}{dt}(\theta), X(b) \right).$$

Поэтому, применив еще раз формулу (2) (при $B = T\tau_b^0 \frac{\nabla X}{dt}(\theta)$), мы получим, что

$$(TX(b), X(b)) = \int_a^b \int_a^b \left(T\tau_b^0 \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \tau_b^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right) d\theta d\theta_1.$$

Оценивая подынтегральную билинейную форму, мы, как и выше, получим неравенство

$$\left| \left(T\tau_b^0 \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \tau_b^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right) \right| \leq T_0 \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right|,$$

где T_0 — некоторое положительное число.

Поэтому

$$\begin{aligned} |(TX(b), X(b))| &\leq \\ &\leq \int_a^b \int_a^b \left| \left(T\tau_b^0 \frac{\nabla X}{dt}(\theta), \tau_b^{\theta_1} \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right) \right| d\theta d\theta_1 \leq \\ &\leq \int_a^b \int_a^b T_0 \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta_1) \right| d\theta_1 d\theta = T_0 \left[\int_a^b \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| d\theta \right]^2. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что в силу интегрального неравенства Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right| d\theta \right]^2 &\leq \int_a^b \left| \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right|^2 d\theta \int_a^b 1 \cdot d\theta = \\ &= (b-a) \int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(\theta), \frac{\nabla X}{dt}(\theta) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), X(t)) dt \right| &\leq \\ &\leq R_0(b-a) \int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) dt, \\ |(TX(b), X(b))| &\leq T_0(b-a) \int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Для функционала I_a^b из этих оценок немедленно вытекает оценка

$$I_a^b(X(t)) \geq [1 - (T_0 + R_0)(b - a)] \int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) dt,$$

справедливая для любого поля $X(t) \in \mathfrak{M}_0$.

Заметим теперь, что при приближении a к b число T_0 не меняется, а число R_0 может только уменьшаться. Поэтому при a , достаточно близком к b , число $1 - (T_0 + R_0)(b - a)$ положительно. Так как интеграл $\int_a^b \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) dt$ для любого поля $X(t) \in \mathfrak{M}_0$, не равного тождественно нулю, очевидно, положителен, то тем самым неравенство (4) п. 3 полностью доказано.

Замечание. При $T=0$ мы получаем, в частности, новое доказательство неравенства (2) п. 7 гл. 8 в предположении, что точки a и b достаточно близки. Но когда это неравенство установлено для a и b достаточно близких, то, пользуясь элементарными соображениями непрерывности, его можно без труда доказать и для случая, когда на отрезке $[a, b]$ нет точек, сопряженных с точкой b (ибо если для точки a_0 существует отличное от нуля поле $X(t) \in \mathfrak{M}$, для которого $X(a_0)=0$, $X(b)=0$ и $I_{a_0}^b(X(t))=0$, а для любой точки $a \in (a_0, b)$ имеет место неравенство (2) п. 7 гл. 8, то, как можно легко показать, поле $X(t)$ является гладким полем Якоби, и потому точка a_0 сопряжена с точкой b). После этого, пользуясь некоторыми общими теоремами функционального анализа, можно доказать и фундаментальное неравенство (1) п. 7 гл. 8. Таким образом, все результаты п. 7 гл. 8 можно получить, не используя интеграла Гильберта. Детальное проведение этих соображений предоставляется читателю.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ПУТЕЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой главе излагаются основные теоремы теории Морса, касающиеся строения пространств путей на гладких многообразиях. Они получаются довольно простым синтезом результатов предыдущих глав. В последних двух пунктах главы приведены простейшие применения теории Морса к топологии и к геометрии римановых пространств.

В п. 1, имеющем чисто топологический характер, исследуется пространство всех путей данного линейно связного пространства X . Основной результат: гомотопический тип пространства путей, соединяющих две данные точки пространства X , не зависит от выбора этих точек.

В п. 2 для произвольного риманова пространства пространство кусочно гладких кривых сравнивается с пространством путей. Основной результат: пространство кусочно гладких кривых, соединяющих две данные точки риманова пространства, гомотопически эквивалентно соответствующему пространству путей.

В п. 3 на основе результатов гл. 8 доказывается фундаментальная теорема редукции, сводящая исследование пространства кривых к исследованию некоторых конечномерных многообразий.

В п. 5 общие результаты п. 4 применяются к исследованию пространства петель на сферах. В качестве приложения доказывается теорема Фрейденталя о гомотопических группах сфер.

В п. 6 доказываются неравенства Морса, связывающие числа геодезических данного индекса с числами Бетти пространства петель. В частности, доказывается теорема Морса о геодезических на многообразиях гомотопически эквивалентных сфере. В этом же пункте, в качестве принципиально нового приложения теории Морса, доказана теорема Картана об односвязных полных римановых пространствах неположительной кривизны.

1. Пространства путей

Пусть X — произвольное линейно связное пространство и пусть X^I совокупность всех путей пространства X , т. е. всех непрерывных отображений

$$u: I \rightarrow X$$

в пространство X единичного отрезка $I = [0, 1]$ (см. п. 5 гл. 1). Для каждого открытого множества $U \subset X$ и каждого компактного (т. е. замкнутого) множества $C \subset I$ символом $W(C, U)$ мы будем обозначать совокупность всех путей $u \in X^I$, для которых $u(C) \subset U$. Компактно-открытой топологией на множестве X^I мы будем называть топологию, предбазой открытых множеств которой является совокупность всевозможных множеств вида $W(C, U)$. Множество X^I , снабженное этой топологией, мы будем называть *пространством путей* пространства X . По определению, подмножество W пространства X^I тогда и только тогда открыто в нем, когда оно является объединением конечных пересечений множеств вида $W(C, U)$.

Из этой конструкции непосредственно вытекает, что определенное формулой

$$\omega(u, t) = u(t), \quad U \in X^I, \quad t \in I,$$

отображение по значениям

$$\omega: X^I \times I \rightarrow X$$

непрерывно (ибо для любого открытого множества $U \subset X$ имеет место равенство $\omega^{-1}(U) = W(I, U)$). Это означает, что точка $u(t) \in X$ непрерывно зависит от пути $u \in X^I$ и точки $t \in I$.

Любая непрерывная функция

$$\tau: I \rightarrow I$$

определяет по формуле

$$\theta_\tau(u) = u \circ \tau$$

некоторое отображение

$$\theta_\tau: X^I \rightarrow X^I$$

пространства X^I в себя. Ясно, что это отображение непрерывно. Оно является гомеоморфизмом пространства X^I на себя тогда и только тогда, когда функция τ представляет собой гомеоморфизм отрезка I на себя, т. е. строго монотонна и обладает тем свойством, что $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$. Мы будем называть отображение θ_τ *отображением перепараметризации*.

Полагая

$$\theta(u, \tau) = \theta_\tau(u), \quad u \in X^I, \quad \tau \in I,$$

мы получим некоторое отображение

$$\theta: X^I \times I^I \rightarrow X^I.$$

Ясно, что для любого компактного множества $C \subset I$, любого открытого множества $U \subset X$ и любой точки $(u_0, \tau_0) \in \theta^{-1}(W(C, U))$ имеет место включение

$$(u_0, \tau_0) \in W(\bar{V}, U) \times W(C, V) \subset \theta^{-1}(W(C, U)),$$

где V — такое открытое множество отрезка I , что $\tau_0(C) \subset V$ и $\bar{V} \subset u_0^{-1}(U)$. Таким образом, $(u_0, \tau_0) \in \text{Int } \theta^{-1}(W(C, U))$, т. е. множество $\theta^{-1}(W(C, U))$ открыто. Следовательно, отображение θ непрерывно. Это означает, что

путь $\theta_\tau(u)$ непрерывно зависит от пути $u \in X^I$ и функции $\tau \in I^I$.

Для нас особый интерес представляет случай, когда пространство X является метрическим пространством. Пусть ρ — метрика пространства X . Любым двум путям $u, v \in X^I$ мы отнесем число $\rho^I(u, v)$, определенное формулой

$$\rho^I(u, v) = \max_{0 \leq t \leq 1} \rho(u(t), v(t)).$$

Поскольку отрезок I компактен, этот максимум конечен и достигается в некоторой точке, т. е. для любых путей $u, v \in X^I$ существует такая точка $t_0 \in I$, что

$$\rho^I(u, v) = \rho(u(t_0), v(t_0)).$$

Из этого равенства немедленно вытекает, что функция ρ^I удовлетворяет неравенству треугольника

$$\rho^I(u, v) \leq \rho^I(u, w) + \rho^I(w, v)$$

(ибо $\rho(u(t_0), v(t_0)) \leq \rho(u(t_0), w(t_0)) + \rho(w(t_0), v(t_0)) \leq \rho^I(u, w) + \rho^I(w, v)$). Поскольку функция ρ^I , очевидно, невырождена ($\rho^I(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$) и симметрична, ($\rho(u, v) = \rho(v, u)$), тем самым доказано, что

функция ρ^I является метрикой на пространстве X^I .

Покажем теперь, что

метрика ρ^I согласована с компактно-открытой топологией пространства X^I , т. е. соответствующая этой метрике метрическая топология совпадает с компактно-открытой топологией.

Действительно, пусть $W(C, U)$ — произвольный элемент построенной выше псевдобазы компактно-открытой топологии пространства X^I . Для каждого пути $u_0 \in W(C, U)$ множество $u_0(C) \subset X$ компактно и содержится в открытом множестве U . Поэтому существует такое $\delta > 0$, что вся δ -окрестность множества $u_0(C)$ содержится в U . Но тогда ясно, что любой путь $u \in X^I$, для которого $\rho^I(u_0, u) < \delta$, обладает тем свойством, что $u(C) \subset U$ и потому принадлежит множеству $W(C, U)$. Таким образом, любая точка $u_0 \in W(C, U)$ обладает в метрике ρ^I сферической δ -окрестностью, принадлежащей множеству $W(C, U)$, т. е., другими словами, любая точка $u_0 \in W(C, U)$ является в метрической топологии внутренней точкой множества $W(C, U)$. Тем самым мы доказали, что любое множество $W(C, U)$, а потому и любое множество $W \subset X^I$, открытое в компактно-открытой топологии, открыто в метрической топологии.

Обратно, пусть V — произвольное подмножество пространства X^I , открытое в метрической топологии. Тогда для любой точки $u_0 \in V$ существует такое $\varepsilon > 0$, что ε -окрестность точки u_0 (в метрике ρ^I) содержится в множестве V . Поскольку путь $u_0: I \rightarrow X$ непрерывен, а отрезок I компактен, существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $t, \tau \in I$ из неравенства $|t - \tau| < \delta$ вытекает неравенство $\rho(u_0(t), u_0(\tau)) < \varepsilon/2$. Пусть $C_1, \dots, C_s$ — произвольная конечная система замкнутых отрезков длины $< \delta$, покрывающих отрезок I , и пусть $U_1, \dots, U_s$ — сферические $\varepsilon/2$ -окрестности (в пространстве X^I) множеств $u_0(C_1), \dots, u_0(C_s)$ соответственно. Рассмотрим в пространстве X^I множество

$$W = W(C_1, U_1) \cap \dots \cap W(C_s, U_s).$$

По определению, это множество открыто в компактно-открытой топологии и содержит путь u_0 . Пусть u — произвольный путь из множества W . По условию, для любого $t \in I$ существует такое $i = 1, \dots, s$, что $t \in C_i$. Так как $u \in W$, то $u \in W(C_i, U_i)$, и потому $u(t) \in U_i$. Следовательно, существует такое $\tau \in C_i$, что $\rho(u_0(\tau), u(t)) < \varepsilon/2$. С другой стороны, так как $|t - \tau| < \delta$, то $\rho(u_0(t), u_0(\tau)) < \varepsilon/2$. Поэтому $\rho(u_0(t), u(t)) < \varepsilon$. Поскольку $t \in I$ произвольно, тем самым доказано, что $\rho^I(u_0, u) < \varepsilon$ и, следовательно, что $u \in V$. Таким образом, $W \subset V$. Другими словами, мы доказали, что любая точка u_0 множества V является в компактно-открытой топологии его

внутренней точкой, т. е. что множество V в этой топологии открыто.

Тем самым совпадение метрической и компактно-открытой топологии полностью доказано.

Пусть теперь снова X — произвольное (линейно связное) топологическое пространство. Согласно п. 4 гл. 2 для любых путей $u, v \in X^I$, обладающих тем свойством, что $u(1) = v(0)$, определено их произведение $uv \in X^I$, задаваемое формулой

$$(uv)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2 \\ v(2t - 1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Полагая

$$\mu(u, v) = uv,$$

мы получим некоторое отображение

$$\mu : (X^I \times X^I)_0 \rightarrow X^I$$

в пространство X^I подмножества $(X^I \times X^I)_0$ произведения $X^I \times X^I$, состоящего из всех пар (u, v) , $u, v \in X^I$, для которых $u(1) = v(0)$. Легко видеть, что

отображение μ непрерывно.

Действительно, ясно, что для любого компактного множества $C \subset I$ и любого открытого множества $U \subset X$

$$\mu^{-1}W(C, U) = [W(C_1, U) \cap W(C_2, U)] \cap (X^I \times X^I)_0,$$

где C_1 — образ множества $C \cap [0, 1/2]$ при отображении $t \rightarrow 2t$, а C_2 — образ множества $C \cap [1/2, 1]$ при отображении $t \rightarrow 2t - 1$.

Допуская общепринятую вольность речи, мы тот факт, что отображение μ непрерывно, будем выражать, говоря, что *путь uv непрерывно зависит от путей u и v .*

Рассмотрим теперь отображения

$$\pi, \sigma : X^I \rightarrow X$$

пространства X^I в пространство X , определенные соответственно формулами

$$\pi(u) = u(0), \quad \sigma(u) = u(1), \quad u \in X^I.$$

Эти отображения непрерывны и обладают тем свойством, что

$$\pi(0_x) = \sigma(0_x) = x$$

для любой точки $x \in X$, где 0_x — вырожденный путь в точке x (постоянное отображение отрезка I в точку x).

Отображения π и σ мы распространим на произведения $X^I \times \dots \times X^I$ любого (конечного) числа n экземпляров пространства X^I , считая, что

$$\begin{aligned} \pi(u_1, \dots, u_n) &= \pi(u_1), \\ \sigma(u_1, \dots, u_n) &= \sigma(u_n), \end{aligned} \quad (u_1, \dots, u_n) \in X^I \times \dots \times X^I.$$

Непрерывное отображение

$$\alpha: X^I \rightarrow X^I$$

пространства X^I в себя мы будем называть *отображением над X* , если

$$\pi \circ \alpha = \pi, \quad \sigma \circ \alpha = \sigma,$$

т. е. если любой путь $u \in X^I$ оно переводит в путь, соединяющий те же точки $x_0 = u(0)$ и $x_1 = u(1)$, что и путь u , и если оно сохраняет вырожденные пути, т. е. если для любой точки $x \in X$ имеет место равенство

$$\alpha(0_x) = 0_x.$$

Соответственно этому гомотопию

$$\alpha_\tau: X^I \rightarrow X^I, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

мы будем называть *гомотопией над X* , если каждое отображение α_τ является отображением над X . Отображения над X , связанные гомотопией над X , мы будем называть *гомоторными над X* .

Аналогично определяются отображения и гомотопии над X для отображений любых произведений вида $X^I \times \dots \times X^I$. Например, отображение

$$\alpha: X^I \times X^I \times X^I \rightarrow X^I$$

является *отображением над X* , если

$$\pi \circ \alpha = \pi, \quad \sigma \circ \alpha = \sigma$$

и если

$$\alpha(0_x, 0_x, 0_x) = 0_x,$$

для любой точки $x \in X$.

Эти определения мы будем применять также и к частичным отображениям α , т. е. к отображениям, опреде-

ленным лишь на некоторых подмножествах пространства X^I (или пространств $X^I \times \dots \times X^I$). Частичным отображением над X пространства $X^I \times X^I$ в пространство X^I является, например, построенное выше отображение μ . Отображение перепараметризации $\theta_\tau: X^I \rightarrow X^I$ тогда и только тогда является отображением над X , когда $\tau(0) = 0$ и $\tau(1) = 1$.

Пусть $(X^I \times X^I \times X^I)_0$ — подмножество произведения $X^I \times X^I \times X^I$, состоящее из всех троек (u, v, w) , $u, v, w \in X^I$, обладающих тем свойством, что $u(1) = v(0)$ и $v(1) = w(0)$. На этом подмножестве определены два отображения:

$$\mu \circ (\mu \times 1), \quad \mu \circ (1 \times \mu): (X^I \times X^I \times X^I)_0 \rightarrow X^I,$$

первое из которых произвольную тройку $(u, v, w) \in (X^I \times X^I \times X^I)_0$ переводит в путь $(uv)w$, а второе — в путь $u(vw)$. Эти отображения являются отображениями над X и, как легко видеть,

отображения $\mu \circ (\mu \times 1)$ и $\mu \circ (1 \times \mu)$ гомотопны над X .

Действительно, формула

$$h_\tau(u, v, w) = \begin{cases} u\left(\frac{ut}{1+\tau}\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{4}, \\ v(4t - \tau - 1), & \text{если } \frac{1+\tau}{4} \leq t \leq \frac{2+\tau}{4}, \\ w\left(\frac{4t - \tau - 2}{2 - \tau}\right), & \text{если } \frac{2+\tau}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $\tau \in I$, определяет, очевидно, гомотопию

$$h_\tau: (X^I \times X^I \times X^I)_0 \rightarrow X^I$$

над X , связывающую отображения $\mu \circ (\mu \times 1)$ и $\mu \circ (1 \times \mu)$.

Гомотопность (над X) отображений $\mu \circ (\mu \times 1)$ и $\mu \circ (1 \times \mu)$ означает, что умножение μ гомотопически ассоциативно.

Пусть $(X^I)_x$ — совокупность всех путей $u \in X^I$, кончающихся в точке x , т. е. обладающих тем свойством, что

$$u(1) = x.$$

Ясно, что формула

$$\mu_x(u) = u0_x, \quad u \in (X^I)_x,$$

определяет некоторое непрерывное отображение

$$\mu_x : (X^I)_x \rightarrow (X^I)_x,$$

являющееся отображением над X .

Аналогично формула

$${}_x\mu(u) = 0_x u, \quad u \in {}_x(X^I),$$

определяет непрерывное отображение

$${}_x\mu : {}_x(X^I) \rightarrow {}_x(X^I)$$

над X , где ${}_x(X^I)$ — совокупность всех путей $u \in X^I$, начинающихся в точке x . Легко видеть, что

отображения μ_x и ${}_x\mu$ гомотопически тождественны над X , т. е. каждое из них гомотопно над X тождественному отображению соответствующего пространства.

Действительно, например, формула

$$k_\tau(u)(\tau) = \begin{cases} u\left(\frac{2t}{1+\tau}\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2}, \\ x, & \text{если } \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $\tau \in I$ определяет гомотопию над X , связывающую отображение μ_x с тождественным отображением пространства $(X^I)_x$.

Гомотопическая тождественность (над X) отображений μ_x и ${}_x\mu$ означает, что вырожденные пути 0_x представляют собой (двусторонние) гомотопические единицы.

Рассмотрим теперь отображение

$$\nu : X^I \rightarrow X^I$$

пространства X^I в себя, определенное формулой

$$\nu(u) = uu',$$

где u' — путь, обратный пути u , в смысле п. 4 гл. 2. В указанном пункте для любого пути $u \in X^I$ была построена некоторая гомотопия $v_\tau : I \rightarrow X$ относительно концов отрезка I , связывающая путь uu' с вырожденным путем $0_{u(0)}$. Легко видеть, что, полагая

$$l_\tau(u) = v_\tau, \quad u \in X^I,$$

мы получим некоторую гомотопию

$$l_\tau : X^I \rightarrow X^I, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

связывающую отображение ν с отображением

$$\sigma: X^I \rightarrow X^I,$$

определенным формулой

$$\sigma(u) = 0_{u(0)}.$$

Гомотопия l_τ обладает, очевидно, тем свойством, что

$$\pi \circ l_\tau = \pi, \quad l_\tau(0_x) = 0_x,$$

для всех $\tau \in I$. Однако она не является гомотопией над X , ибо вместо соотношения $\sigma \circ l_\tau = \sigma$ она удовлетворяет соотношению

$$\sigma \circ l_\tau = \pi.$$

О таких гомотопиях (или отображениях) мы будем говорить, что они являются гомотопиями (или соответственно отображениями) над X *слева*.

Аналогично доказывается, что отображение

$$\nu': X^I \rightarrow X^I,$$

определенное формулой

$$\nu'(u) = u'u,$$

гомотопно над X *справа* отображению

$$\sigma': X^I \rightarrow X^I,$$

определенному формулой $\sigma'(u) = 0_{u(1)}$.

Оба эти факта, по определению, означают, что умножение μ обладает гомотопически обратной операцией.

Особое значение для нас будут иметь подпространства $\Omega(x_0, x_1)$ пространства X^I , состоящие из всех путей $u \in X^I$, соединяющих данные точки $x_0, x_1 \in X$. Оказывается, что

с точностью до гомотопической эквивалентности пространство $\Omega(x_0, x_1)$ не зависит от точек $x_0, x_1 \in X$.

Действительно, пусть

$$\Omega = \Omega(x_0, x_1), \quad \Omega' = \Omega(x'_0, x'_1),$$

где x_0, x_1, x'_0, x'_1 — произвольные точки пространства X . Поскольку пространство X , по условию, линейно связно

(здесь мы впервые используем это предположение), в нем существуют пути u_0 и u_1 , соединяющие точки x_0 и x_1 с точками x'_0 и x'_1 соответственно. Выбрав и раз навсегда зафиксировав эти пути, мы построим отображения

$$\alpha: \Omega \rightarrow \Omega', \quad \beta: \Omega' \rightarrow \Omega,$$

положив

$$\alpha(u) = u'_0(uu_1), \quad u \in \Omega,$$

$$\beta(v) = u_0(vu'_1), \quad v \in \Omega'.$$

Ясно (в силу непрерывности умножения μ), что отображения α и β непрерывны.

Отображение

$$\beta \circ \alpha: \Omega \rightarrow \Omega$$

определяется формулой

$$(\beta \circ \alpha)u = u_0((u'_0(uu_1))u'_1), \quad u \in \Omega,$$

и потому (в силу гомотопической ассоциативности умножения μ) гомотопно отображению

$$u \rightarrow ((u_0u'_0)u)(u_1u'_1),$$

а следовательно (в силу существования для умножения μ гомотопически обратной операции), гомотопно тождественному отображению $\Omega \rightarrow \Omega$. Таким образом, отображение $\beta \circ \alpha$ гомотопически тождественно.

Аналогично доказывается, что отображение

$$\alpha \circ \beta: \Omega' \rightarrow \Omega'$$

также гомотопически тождественно. Следовательно, пространства Ω и Ω' гомотопически эквивалентны.

Таким образом, при изучении пространств $\Omega(x_0, x_1)$ мы можем по произволу выбирать точки x_0 и x_1 . Как мы увидим далее, применение методов вариационного исчисления к изучению этих пространств (в случае, когда пространство X является снабженным римановой метрикой гладким многообразием) особенно удобно при $x \neq x_1$. С другой стороны, топологическое изучение пространств $\Omega(x_0, x_1)$, напротив, особенно просто при $x_0 = x_1$. Доказанное утверждение обеспечивает, таким образом, применимость топологических мето-

дов к вариационным задачам и, наоборот, вариационных методов к топологическим задачам.

При $x_0 = x_1$ пространство $\Omega(x_0, x_1)$ мы будем обозначать символом $\Omega(x_0)$ и будем называть его *пространством петель пространства X в точке x_0* . Его точки, т. е. пути пространства X , начинающиеся и кончающиеся в точке x_0 , мы будем соответственно называть *петлями пространства X в точке x_0* . Петлей в точке x_0 является, в частности, вырожденный путь 0_{x_0} .

2. Пространства кусочно гладких кривых

В случае, когда пространство X является снабженным римановой метрикой гладким (и связным) многообразием M , вместо пространства X^I естественно рассматривать пространство Φ всех кусочно гладких кривых многообразия M , параметризованных числами отрезка $I = [0, 1]$ пропорционально (в случае невырожденности) длине дуги. Каждая такая кривая либо вырождена, либо представляет собой кусочно регулярную кривую.

Пусть ρ — риманова метрика на многообразии M и ρ^I — соответствующая метрика на пространстве M^I . Поскольку пространство Φ содержится, очевидно, в пространстве M^I , оно также является метрическим пространством с метрикой ρ^I . Однако метрика ρ^I для наших целей мало удобна, так как в соответствующей (т. е., по доказанному выше, компактно-открытой) топологии пространства Φ функция J , сопоставляющая каждой кривой из Φ ее длину, вообще говоря, разрывна. Поэтому вместо метрики ρ^I мы будем на пространстве Φ рассматривать метрику $\hat{\rho}$, определенную формулой

$$\hat{\rho}(\gamma_1, \gamma_2) = \rho^I(\gamma_1, \gamma_2) + |J(\gamma_2) - J(\gamma_1)|, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Phi.$$

Ясно, что в этой метрике функция J автоматически непрерывна. Топология пространства Φ , определенная метрикой $\hat{\rho}$, отличается, вообще говоря, от топологии, определенной метрикой ρ^I (т. е. от компактно-открытой топологии). Однако, поскольку $\rho^I \leq \hat{\rho}$, любое множество, открытое в компактно-открытой топологии, необходимо открыто и в топологии, определенной метрикой $\hat{\rho}$. Другими словами,

отображение вложения

$$i: \Phi \rightarrow M^I$$

является непрерывным отображением.

Свойства пространства Φ во многом аналогичны свойствам пространства M^I . Например,

для любой кривой $\gamma \in \Phi$ и любой точки $t \in I$ точка $\gamma(t) \in M$ непрерывно зависит от γ и t .

Это утверждение немедленно следует из соответствующего утверждения для пространства M^I , так как любое множество, открытое в компактно-открытой топологии, открыто и в топологии, определенной метрикой $\hat{\rho}$. Впрочем, его можно легко доказать и непосредственно, опираясь лишь на определение метрики $\hat{\rho}$. Действительно, так как отображение $\gamma: I \rightarrow M$ непрерывно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(\gamma(t), \gamma(t_1)) < \varepsilon/2$ при $|t - t_1| < \delta$. Поэтому, если $|t - t_1| < \delta$ и $\hat{\rho}(\gamma, \gamma_1) < \varepsilon/2$, где $\gamma_1 \in \Phi$, то

$$\begin{aligned} \rho(\gamma(t), \gamma_1(t_1)) &\leq \rho(\gamma(t), \gamma(t_1)) + \rho(\gamma(t_1), \gamma_1(t_1)) < \varepsilon/2 + \\ &+ \hat{\rho}(\gamma, \gamma_1) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Но это и означает, что точка $\gamma(t)$ непрерывно зависит от кривой γ и точки t .

Рассмотрим теперь в пространстве Φ отображения перепараметризации θ_τ . Так как, по определению, на кривых из Φ параметр однозначно фиксирован, то отображение θ_τ тогда и только тогда переводит пространство Φ в себя, когда соответствующая функция $\tau: I \rightarrow I$ представляет собой линейное отображение отрезка $I = [0, 1]$ на некоторый отрезок $[\theta_0, \theta_1] \subset [0, 1]$. При этом для каждой кривой $\gamma \in \Phi$ кривая $\theta_\tau \gamma$ является не чем иным, как соответствующим образом перепараметризованным отрезком $\gamma|_{[\theta_0, \theta_1]}$ кривой γ (а при $\theta_0 = \theta_1$ вырожденной кривой). Мы будем эту кривую обозначать символом $\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}$. Оказывается, что

кривая $\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}$ непрерывно зависит от кривой γ и чисел θ_0 и θ_1 .

В отличие от предыдущего предложения мы не можем теперь просто сослаться на соответствующее утверждение для путей и должны дать независимое доказательство.

Пусть γ' — такая кривая из Φ и θ'_0, θ'_1 — такие числа отрезка I , что

$$\hat{\rho}(\gamma, \gamma') < \varepsilon, \quad |\theta_0 - \theta'_1| < \varepsilon, \quad |\theta_1 - \theta'_1| < \varepsilon,$$

где ε — некоторое положительное число. Для доказательства непрерывной зависимости кривой $\gamma_{\theta_2}^{\theta_1}$ от кривой γ и чисел θ_0, θ_1 нам, очевидно, достаточно доказать, что

$$\hat{\rho}(\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}, \gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}) < C\varepsilon, \quad (1)$$

где C — некоторая постоянная (зависящая только от кривой γ).

С этой целью мы рассмотрим вспомогательную кривую $\gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}$.

Ясно, что точки кривых $\gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}$ и $\gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}$, отвечающие одному и тому же значению параметра, обладают этим свойством и тогда, когда мы рассматриваем их как точки кривых γ и γ' соответственно. Поэтому

$$\rho^I(\gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}, \gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}) \leq \rho^I(\gamma, \gamma').$$

Кроме того,

$$|J(\gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}) - J(\gamma_{\theta_0}^{\theta'_1})| = |\theta'_1 - \theta'_0| |J(\gamma) - J(\gamma')| \leq |J(\gamma) - J(\gamma')|.$$

Следовательно,

$$\hat{\rho}(\gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}, \gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}) \leq \rho(\gamma, \gamma') < \varepsilon.$$

С другой стороны, длина дуги кривой γ между точками $\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}(t)$ и $\gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}(t)$, а потому и расстояние $\rho(\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}(t), \gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}(t))$, не превышает большей из двух длин дуг: длины дуги между точками $\gamma(\theta_0)$ и $\gamma(\theta'_0)$ (равной $|\theta_0 - \theta'_0| J(\gamma)$ и потому меньшей, чем $\varepsilon J(\gamma)$) и длины дуги между точками $\gamma(\theta_1)$ и $\gamma(\theta'_1)$ (равной $|\theta_1 - \theta'_1| J(\gamma)$ и потому также меньшей, чем $\varepsilon J(\gamma)$). Следовательно,

$$\rho(\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}(t), \gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1}(t)) < \varepsilon J(\gamma)$$

для любого $t \in I$. Так как

$$|J(\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}) - J(\gamma_{\theta'_0}^{\theta'_1})| = |(\theta_1 - \theta_0) J(\gamma) - (\theta'_1 - \theta'_0) J(\gamma)| < 2\varepsilon J(\gamma),$$

то тем самым доказано, что

$$\hat{\rho}(\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}, \gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}) < 3\varepsilon J(\gamma).$$

Следовательно,

$$\hat{\rho}(\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}, \gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}) \leq \rho(\gamma_{\theta_0}^{\theta_1}, \gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}) + \rho(\gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}, \gamma_{\theta_0}^{\theta'_1}) < (1 + 3J(\gamma))\varepsilon.$$

Тем самым оценка (1) полностью доказана.

Произведение $\gamma_1\gamma_2$ двух кривых из Φ (обладающих тем свойством, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(1)$), вообще говоря, пространству Φ не принадлежит, так как параметр на (очевидно, кусочно гладкой) кривой $\gamma_1\gamma_2$, как правило, не пропорционален длине дуги. Мы получим кривую из Φ только после соответствующей перепараметризации кривой $\gamma_1\gamma_2$, т. е. после перехода к эквивалентной кривой, параметром на которой является длина дуги. Получающуюся таким образом кривую из Φ мы будем обозначать символом $\gamma_1*\gamma_2$ и называть *композицией* кривых γ_1 и γ_2 . Если хотя бы одна из кривых γ_1 и γ_2 невырождена, то кривая $\gamma = \gamma_1*\gamma_2$ также невырождена, имеет длину $J(\gamma)$, равную сумме $J(\gamma_1) + J(\gamma_2)$ длин кривых γ_1 и γ_2 , и задается формулой

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{J(\gamma)}{J(\gamma_1)}t\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{J(\gamma_1)}{J(\gamma)}, \\ \gamma_2\left(\frac{J(\gamma)t - J(\gamma_1)}{J(\gamma_2)}\right), & \text{если } \frac{J(\gamma_1)}{J(\gamma)} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Если же хотя бы одна из кривых γ_1 и γ_2 вырождена, то композиция $\gamma_1*\gamma_2$ совпадает со второй кривой. Это верно и когда обе кривые γ_1 и γ_2 вырождены (и, следовательно, композиция $\gamma_1*\gamma_2$ также вырождена).

Без труда проверяется, что, в отличие от операции умножения путей,

операция компонирования кривых ассоциативна.

Покажем теперь, что

кривая $\gamma_1*\gamma_2$ (когда она определена) непрерывно зависит от кривых γ_1 и γ_2 .

Здесь мы снова не можем сослаться на соответствующее утверждение для произведения путей и вынуждены дать независимое доказательство.

Пусть наряду с кривыми γ_1 и γ_2 нам заданы две другие кривые γ'_1 и γ'_2 , композиция $\gamma' = \gamma'_1*\gamma'_2$ которых также опре-

делена (т. е. которые обладают тем свойством, что $\gamma'_1(1) = \gamma'_2(0)$). Ясно, что для доказательства непрерывной зависимости кривой $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ от кривых γ_1 и γ_2 достаточно доказать, что имеет место оценка

$$\hat{\rho}(\gamma, \gamma') \leq C \max [\rho(\gamma_1, \gamma'_1), \rho(\gamma_2, \gamma'_2)],$$

где C — некоторая абсолютная постоянная. Другими словами, нам достаточно показать, что при

$$\hat{\rho}(\gamma_1, \gamma'_1) < \varepsilon, \quad \hat{\rho}(\gamma_2, \gamma'_2) < \varepsilon,$$

где ε — некоторое положительное число, имеет место неравенство

$$\hat{\rho}(\gamma, \gamma') < C\varepsilon. \quad (2)$$

Так как

$$|J(\gamma_1) - J(\gamma'_1)| < \varepsilon, \quad |J(\gamma_2) - J(\gamma'_2)| < \varepsilon,$$

то

$$\begin{aligned} |J(\gamma) - J(\gamma')| &= |J(\gamma_1) + J(\gamma_2) - J(\gamma'_1) - J(\gamma'_2)| \leq \\ &\leq |J(\gamma_1) - J(\gamma'_1)| + |J(\gamma_2) - J(\gamma'_2)| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

и потому для доказательства неравенства (2) достаточно доказать, что

$$\rho^I(\gamma, \gamma') < C_1\varepsilon,$$

где C_1 — некоторая абсолютная постоянная, т. е. что для всех $t \in I$ имеет место оценка

$$\rho(\gamma(t), \gamma'(t)) < C_1\varepsilon. \quad (3)$$

Пусть сначала кривая γ вырождена. Тогда $\rho(p_0, \gamma'_1(t)) < \varepsilon$ и $\rho(p_0, \gamma'_2(t)) < \varepsilon$, где $p_0 = \gamma(I)$, и потому $\rho(p_0, \gamma(t)) < \varepsilon$. Следовательно, в этом случае неравенство (3) имеет место даже при $C_1 = 1$.

Пусть теперь кривая γ невырождена и потому $J(\gamma) = J(\gamma_1) + J(\gamma_2) \neq 0$. Докажем, что

если $J(\gamma_1)J(\gamma') = J(\gamma'_1)J(\gamma)$, то

$$\rho(\gamma(t), \gamma'(t)) < \varepsilon \quad \text{для всех } t \in I.$$

Действительно, если $0 \leq t \leq \frac{J(\gamma_1)}{J(\gamma)}$, то

$$\gamma(t) = \gamma_1\left(\frac{J(\gamma)}{J(\gamma_1)}t\right), \quad \gamma'(t) = \gamma'_1\left(\frac{J(\gamma)}{J(\gamma_1)}t\right)$$

и, следовательно,

$$\rho(\gamma(t), \gamma'(t)) = \rho\left(\gamma_1\left(\frac{J(\gamma)}{J(\gamma_1)}t\right), \gamma'_1\left(\frac{J(\gamma)}{J(\gamma_1)}t\right)\right) < \varepsilon.$$

Аналогично, если $\frac{J(\gamma_1)}{J(\gamma)} \leq t \leq 1$, то

$$\gamma(t) = \gamma_2\left(\frac{J(\gamma)t - J(\gamma_1)}{J(\gamma_2)}\right), \quad \gamma'(t) = \gamma'_2\left(\frac{J(\gamma)t - J(\gamma_1)}{J(\gamma_2)}\right),$$

и потому снова

$$\rho(\gamma(t), \gamma'(t)) < \varepsilon.$$

В общем случае мы рассмотрим отрезки $\gamma'|_{[0, J(\gamma_1)/J(\gamma)]}$ и $\gamma'|_{[J(\gamma_1)/J(\gamma), 1]}$ кривой γ' . Соответствующим образом перепараметризовав эти отрезки, мы получим две кривые $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)} \in \Phi$, обладающие тем свойством, что, во-первых, $\gamma' = \gamma^{(1)} * \gamma^{(2)}$ и, во-вторых, $J(\gamma_1)J(\gamma') = J(\gamma^{(1)})J(\gamma)$. Оценим расстояние $\hat{\rho}(\gamma'_1, \gamma^{(1)})$.

Так как параметр t на всех рассматриваемых кривых (когда они невырождены) пропорционален длине дуги, то для любого t длина дуги кривой γ' между точками $\gamma^{(1)}(t)$ и $\gamma'_1(t)$ равна $t|J(\gamma^{(1)}) - J(\gamma'_1)|$. Но

$$\begin{aligned} |J(\gamma^{(1)}) - J(\gamma'_1)| &= \left| J(\gamma') \frac{J(\gamma_1)}{J(\gamma)} - J(\gamma'_1) \right| = \\ &= \left| \frac{J(\gamma_1)[J(\gamma_2) - J(\gamma_2)] + J(\gamma_2)[J(\gamma_1) - J(\gamma'_1)]}{J(\gamma)} \right| < \\ &< \frac{J(\gamma_1)\varepsilon + J(\gamma_2)\varepsilon}{J(\gamma)} = \varepsilon, \end{aligned}$$

и потому эта длина меньше εt , т. е. меньше ε . Следовательно, расстояние $\rho(\gamma^{(1)}(t), \gamma'_1(t))$ также меньше ε . Поскольку, как мы только что показали, $|J(\gamma^{(1)}) - J(\gamma'_1)| < \varepsilon$, тем самым доказано, что

$$\hat{\rho}(\gamma'_1, \gamma^{(1)}) < 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\hat{\rho}(\gamma_1, \gamma^{(1)}) \leq \hat{\rho}(\gamma_1, \gamma'_1) + \hat{\rho}(\gamma'_1, \gamma^{(1)}) < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Аналогично показывается, что

$$\hat{\rho}(\gamma_2, \gamma^{(2)}) < 3\varepsilon.$$

Поэтому согласно доказанному выше утверждению (примененному к кривым $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ и числу 3ε) $\rho(\gamma(t), \gamma'(t)) < 3\varepsilon$ для всех $t \in I$. Тем самым оценка (3), а значит, и оценка (2) полностью доказаны. При этом $C_1 = 3$ (а значит, $C = 5$).

Рассмотрим теперь одно свойство пространства Φ , не имеющее аналога в пространстве путей.

Как мы знаем (см. п. 10 гл. 7), если точки p и q риманова пространства M достаточно близки (содержатся в одной нормальной выпуклой окрестности), то их можно соединить в M одной и только одной кратчайшей геодезической, параметр на которой пропорционален длине дуги и меняется от 0 до 1, т. е. одной и только одной кратчайшей геодезической, являющейся точкой пространства Φ . Обозначая эту геодезическую символом $\gamma_{p,q}$, мы сейчас докажем, что

геодезическая $\gamma_{p,q} \in \Phi$ непрерывно зависит от точек p и q .

Действительно, согласно теореме о зависимости решений системы дифференциальных уравнений от начальных условий, локальные координаты точки $\gamma_{p,q}(t)$ непрерывно (и даже гладко) зависят от точки p . Поэтому сама точка $\gamma_{p,q}(t)$ также непрерывно зависит от точки p , и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\rho(p, p_1) < \delta$ имеет место неравенство

$$\rho(\gamma_{p,q}(t), \gamma_{p_1,q}(t)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поскольку отрезок $[0, 1]$ компактен, это число δ можно выбрать одним и тем же для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, при $\rho(p, p_1) < \delta$ будет иметь место неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\gamma_{p,q}(t), \gamma_{p_1,q}(t)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

С другой стороны, расстояние $\rho(p, q) = J(\gamma_{p,q})$ является как мы знаем, непрерывной (и при $p \neq q$ даже гладкой) функцией точек p и q . Поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ будет иметь место также и неравенство

$$|J(\gamma_{p,q}) - J(\gamma_{p_1,q})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, если $\delta > 0$ достаточно мало, то $\hat{\rho}(\gamma_{p,q}, \gamma_{p_1,q}) < \frac{\varepsilon}{2}$, когда $\rho(p, p_1) < \delta$. Аналогично, если $\rho(q, q_1) < \delta$, то $\hat{\rho}(\gamma_{p_1,q}, \gamma_{p_1,q_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $\hat{\rho}(\gamma_{p,q}, \gamma_{p_1,q_1}) < \varepsilon$, когда $\rho(p, p_1) < \delta$ и $\rho(q, q_1) < \varepsilon$. Но это и означает, что кривая $\gamma_{p,q}$ непрерывно зависит и от точек p и q .

Сравним теперь друг с другом пространства Φ и M^I . С этой целью мы заметим, что, поскольку $\Phi \subset M^I$, для отображений (вообще говоря, частичных) пространства Φ (или любых пространств вида $\Phi \times \dots \times \Phi$) в себя (или в другие пространства вида $\Phi \times \dots \times \Phi$) имеет смысл говорить об отображениях *над* M . Имея это в виду, мы сейчас покажем, что

для любого (связного) риманова пространства M пространства Φ и M^I гомотопически эквивалентны над M , т. е. существуют такие отображения

$$i: \Phi \rightarrow M^I, \quad j: M^I \rightarrow \Phi$$

над M , что композиции

$$j \circ i: \Phi \rightarrow \Phi, \quad i \circ j: M^I \rightarrow M^I$$

гомотопны над M соответствующим тождественным отображениям.

При этом за отображение i можно принять, как мы покажем, отображение вложения $\Phi \rightarrow M^I$ (которое, по доказанному выше, непрерывно и является, очевидно, отображением над M). Что же касается отображения $j: M^I \rightarrow \Phi$, то для его построения мы предварительно докажем, что

на пространстве M^I существует такая непрерывная функция $\tau(u)$, что для любых точек $t_1, t_2 \in I$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < 2\tau(u)$, точки $u(t_1)$ и $u(t_2)$ риманова пространства M можно соединить в M единственной кратчайшей геодезической.

С этой целью мы рассмотрим на пространстве M произвольную неотрицательную функцию f являющуюся отображением компактного характера пространства M в числовую ось $\mathbb{R}$ (существование такой функции доказано в п. 2 гл. 6). По определению, эта функция обладает тем свойством, что для любого

$a \geq 0$ множество $[f \leq a]$ компактно. Поэтому для любого $a \geq 0$ существует такое число d_a , что любые две точки $p, q \in [f \leq a]$, для которых $\rho(p, q) < d_a$, можно соединить в M единственной кратчайшей геодезической. Пусть $d(a)$ — верхняя грань всех таких чисел d_a (для любого данного $a \geq 0$). Ясно, что построенная таким образом функция $d(a)$ числа a монотонна и положительна. Поэтому существует такая непрерывная функция $\delta(a)$, что

$$0 < \delta(a) < d(a)$$

для любого $a \geq 0$.

Пусть теперь u — произвольный путь многообразия M . Определим на $[0, 1/2]$ числовую функцию $\chi_u(\tau)$, положив

$$\chi_u(\tau) = \max_{|t_1 - t_2| \leq 2\tau} \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) - (1 - 2\tau) \delta\left(\max_{0 \leq t \leq 1} f(\gamma(t))\right),$$

$$\tau \in [0, 1/2].$$

Ясно, что эта функция строго монотонна, непрерывна и обладает тем свойством, что

$$\chi_u(0) < 0 \leq \chi_u(1/2).$$

Следовательно, существует такое (единственное) значение $\tau(u)$ аргумента $\tau \in [0, 1/2]$, что

$$\chi_u(\tau(u)) = 0.$$

Ясно, что построенная таким образом функция $\tau: M^I \rightarrow I$ непрерывна и обладает требуемым свойством.

Рассмотрим теперь для каждого пути $u \in M^I$ точки

$$t_1 = \tau(u), t_2 = 2\tau(u), \dots, t_i = i\tau(u), \dots, t_n = n\tau(u)$$

отрезка I , где n — наибольшее целое число, для которого $n\tau(u) \leq 1$. Пусть $j(u)$ — ломаная из кратчайших геодезических, соединяющая точки $p_0 = u(0)$ и $p_{n+1} = u(1)$, имеющая вершины в точках

$$p_1 = u(t_1), \dots, p_n = u(t_n)$$

и параметризованная (пропорционально длине дуги) так, что $j(u)(0) = p_0$ и $j(u)(1) = p_{n+1}$. Во введенных выше обозначениях ломаная $j(u)$ может быть определена формулой

$$j(u) = \gamma_{p_0 p_1} * \gamma_{p_1 p_2} * \dots * \gamma_{p_i p_{i+1}} * \dots * \gamma_{p_n p_{n+1}}.$$

Ясно, что получающееся таким образом отображение

$$j: M^I \rightarrow \Phi$$

однозначно определено, непрерывно и является отображением над M .

Рассмотрим отображение

$$l \circ j: M^I \rightarrow M^I.$$

Это отображение каждому пути $u \in M^I$ сопоставляет геодезическую ломаную $j(u)$, рассматриваемую как путь из M^I . Пусть

$$\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n, \tau_{n+1} = 1$$

— значения параметра на ломаной $j(u)$, соответствующие точкам

$$p_0, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n, p_{n+1}.$$

Ясно, что эти значения определяются формулами

$$\tau_1 = \frac{\rho(p_1, p_0)}{\rho}, \dots, \tau_i = \frac{\sum_{j=1}^i \rho(p_j, p_{j-1})}{\rho}, \dots$$

$$\dots, \tau_n = \frac{\sum_{j=1}^n \rho(p_j, p_{j-1})}{\rho},$$

где

$$\rho = \sum_{j=1}^{n+1} \rho(p_j, p_{j-1})$$

— длина ломаной $j(u)$.

Для любого $\theta \in I$ и любого $i = 0, 1, \dots, n$ мы положим

$$t_i^\theta = (1 - \theta)t_i + \theta t_{i+1},$$

$$s_i^\theta = (1 - \theta)t_i + \theta \tau_i,$$

$$\bar{s}_i^\theta = (1 - \theta)t_i + \theta \tau_{i+1}.$$

Так как

$$t_i^\theta - t_i = \theta(t_{i+1} - t_i) < \tau_i(u),$$

то точки $p_i = u(t_i)$ и $p_i^\theta = u(t_i^\theta)$ можно соединить в M единственной кратчайшей геодезической. Обозначив эту геодези-

ческую, параметризованную числами отрезка $[s_i^\theta, \bar{s}_i^\theta]$, символом $\gamma_i^{(\theta)}$, мы определим отображение

$$D_\theta u: I \rightarrow M$$

формулой

$$(D_\theta u)(t) = \begin{cases} \gamma_i^\theta(t), & \text{если } s_i^\theta \leq t \leq \bar{s}_i^\theta, \\ u(t + \theta(t_{i+1} - \tau_{i+1})), & \text{если } \bar{s}_i^\theta \leq t \leq s_{i+1}^\theta. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение $D_\theta u$ непрерывно, т. е. представляет собой путь пространства M^θ (соединяющий, очевидно, точку $p_0 = u(0)$ с точкой $p_{n+1} = u(1)$), и что получающееся тем самым семейство отображений

$$D_\theta: M^I \rightarrow M^I$$

является гомотопией. Эта гомотопия связывает, очевидно, тождественное отображение пространства M^I с отображением $i \circ j$ и является гомотопией над M .

Рассмотрим теперь отображение

$$j \circ i: \Phi \rightarrow \Phi.$$

Это отображение каждой кривой $\gamma \in \Phi$, рассматриваемой как точка пространства M^I , сопоставляет геодезическую ломаную $j(\gamma)$. Ясно, что, применив к кривой γ (или, точнее, к пути $u = i(\gamma)$) отображение D_θ , мы получим некоторую кусочно гладкую кривую, соединяющую точки $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$. Перепараметризовав эту кривую пропорционально длине дуги, мы получим, следовательно, некоторую кривую, принадлежащую пространству Φ . Мы будем эту кривую обозначать символом $\hat{D}_\theta \gamma$. Во введенных выше обозначениях кривая $\hat{D}_\theta \gamma$ определяется, очевидно, формулой

$$\hat{D}_\theta \gamma = \gamma_{p_0 p_0}^{t_0} * \gamma_{t_0}^{t_i} * \dots * \gamma_{p_i p_i}^{t_i} * \gamma_{t_i}^{t_{i+1}} * \dots * \gamma_{p_n p_n}^{t_n} * \gamma_{t_n}^1. \quad (4)$$

(Заметим, что геодезические $\gamma_i^{(\theta)}$ и $\gamma_{p_i p_i}^\theta$ отличаются друг от друга только выбором параметра.) Ясно, что так построенное семейство отображений

$$\hat{D}_\theta: \Phi \rightarrow \Phi$$

представляет собой гомотопию над M , связывающую тождественное отображение пространства Φ с отображением $j \circ i$.

Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Подпространство пространства Φ , состоящее из всех кривых $\gamma \in \Phi$, соединяющих две данные точки $p, q \in M$, мы будем обозначать символом $\hat{\Omega}(p, q)$. Ясно, что отображение i переводит это подпространство в подпространство $\Omega(p, q)$ пространства M' , состоящее из всех путей, соединяющих точки p, q , а отображение j переводит подпространство $\Omega(p, q)$ в подпространство $\hat{\Omega}(p, q)$. Таким образом, эти отображения определяют некоторые отображения

$$i: \hat{\Omega}(p, q) \rightarrow \Omega(p, q), \quad j: \Omega(p, q) \rightarrow \hat{\Omega}(p, q),$$

которые мы будем обозначать теми же символами i и j , что и исходные отображения.

Аналогично гомотопии D_0 и $\hat{D}_0$ определяют некоторые гомотопии

$$D_0: \Omega(p, q) \rightarrow \Omega(p, q), \quad \hat{D}_0: \hat{\Omega}(p, q) \rightarrow \hat{\Omega}(p, q),$$

связывающие тождественные отображения соответствующих пространств с отображениями $i \circ j$ и $j \circ i$ соответственно. Следовательно,

для любых точек $p, q \in M$ пространство $\hat{\Omega}(p, q)$ гомотопически эквивалентно пространству $\Omega(p, q)$.

3. Теорема редукции

Мы изучим пространства $\hat{\Omega}(p, q)$ в предположении, что $p \neq q$. Согласно сказанному выше, это предположение, по существу, общности не ограничивает. С другой стороны, оно обеспечивает, что пространство $\hat{\Omega}(p, q)$ не содержит вырожденных кривых, т. е. что все его точки являются кусочно регулярными кривыми.

Кроме того, имея в виду применить к изучению пространства $\hat{\Omega}(p, q)$ результаты гл. 8, мы будем также предполагать, что рассматриваемое (связное) риманово пространство M полно. Как мы знаем, любые две точки такого пространства, и, в частности, данные точки p и q , можно соединить по крайней мере одной геодезической,

Для любой геодезической $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$ мы символом $\lambda^0(\gamma)$ будем обозначать индекс $\lambda_1(0)$ точки $t=0$ по отношению к точке $t=1$, а символом $\lambda^{0,1}(\gamma)$ — индекс $\lambda_1(0, 1)$ интервала $(0, 1)$ (также по отношению к точке $t=1$). Число $\lambda^0(\gamma)$ мы будем называть *корангом*, а число $\lambda^{0,1}(\gamma)$ — *индексом* геодезической γ .

Основной руководящей идеей дальнейших рассуждений будет определенная аналогия между пространством $\hat{\Omega}(p, q)$ и гладкими многообразиями. В частности, аналогично тому, что любое гладкое многообразие M можно исчерпать множествами вида $[f \leq a]$, где f — некоторая гладкая на M функция, пространство $\hat{\Omega}(p, q)$ можно исчерпать подпространствами $[J \leq a]$ состоящими из всех кривых $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$, длины $J(\gamma)$ которых не превосходят данного числа a . В этой аналогии критическим точкам функции f соответствуют стационарные точки функционала J , т. е. геодезические $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$, корангу и индексу критической точки соответствуют коранг и индекс геодезической и т. д.

З а м е ч а н и е. Под указанную аналогию можно подвести строгий базис, если ввести понятие «бесконечномерного многообразия». Оказывается, что пространство $\hat{\Omega}(p, q)$ является такого рода многообразием, функционал J является гладкой функцией на этом многообразии, геодезические являются критическими точками этой функции и т. д. Эта элегантная точка зрения требует, однако, полного пересмотра всей теории и не может служить основой для первоначального изучения предмета.

В этом пункте мы докажем, что

для любого полного риманова пространства M , любых двух его точек p, q и любого числа $a \geq r(p, q)$ существует такое гладкое многообразие $\hat{M}$, такая гладкая на $\hat{M}$ функция φ и такое число b , что подпространство $[J \leq a]$ пространства $\hat{\Omega}(p, q)$ гомотопически эквивалентно подпространству $[\varphi \leq b]$ многообразия $\hat{M}$. Более того, существует такая гомотопическая эквивалентность

$$\alpha: [J \leq a] \rightarrow [\varphi \leq b],$$

что кривая $\gamma \in [J \leq a]$ тогда и только тогда является

геодезической, когда точка $\alpha(\gamma) \in [\varphi \leq b]$ является критической точкой функции φ , причем

1) коранг $c(\alpha(\gamma))$ точки $\alpha(\gamma)$ равен корангу $\lambda^0(\gamma)$ геодезической γ ;

2) индекс $h(\alpha(\gamma))$ точки $\alpha(\gamma)$ равен корангу $\lambda^{0,1}(\gamma)$ геодезической γ .

Эта замечательная теорема редукции неявно содержалась уже в первоначальных работах Морса. В явном виде ее впервые сформулировал, по-видимому, Ботт.

Для доказательства теоремы редукции мы рассмотрим множество S всех точек $p_* \in M$, расстояние $\rho(p, p_*)$ которых от данной точки $p \in M$ не превосходит a . Это множество замкнуто и ограничено и потому компактно (см. п. 11 гл. 7). Следовательно, существует такое $d > 0$, что любые две точки $p_1, p_2 \in S$, для которых $\rho(p_1, p_2) < d$, могут быть соединены единственной кратчайшей, причем точки p_1 и p_2 на этой кратчайшей не сопряжены друг с другом (см. п. 10 гл. 7 и п. 4 гл. 8). Мы будем считать, что число d раз навсегда выбрано. По этому числу d мы выберем число s так, чтобы

$$\frac{a}{\sqrt{s+1}} < d.$$

За предусмотренное теоремой редукции многообразие $\hat{M}$ мы примем открытое подмногообразие произведения $M^s = M \times \dots \times M$ s экземпляров многообразия M , состоящее из таких точек $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s) \in M^s$, что

$$\rho(p, p_i) < a$$

для любого i . Функцию φ мы определим формулой

$$\varphi(\hat{p}) = \rho^2(p, p_1) + \dots + \rho^2(p_i, p_{i+1}) + \dots + \rho^2(p_s, q), \quad (1)$$

где $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s) \in \hat{M}$, число b — формулой

$$b = \frac{a^2}{(s+1)},$$

а отображение

$$\alpha: [J \leq a] \rightarrow [\varphi \leq b]$$

— формулой

$$\alpha(\gamma) = \left(\gamma\left(\frac{1}{s+1}\right), \dots, \gamma\left(\frac{i}{s+1}\right), \dots, \gamma\left(\frac{s}{s+1}\right) \right).$$

Кроме того, мы определим отображение

$$\beta: [\varphi \leq b] \rightarrow [J \leq a]$$

(которое окажется гомотопической эквивалентностью, обратной к эквивалентности α), принимая за кривую $\beta(\hat{p})$, соответствующую произвольной точке $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s) \in \hat{M}$, геодезическую ломаную, состоящую из кратчайших, последовательно соединяющих точки p_i и p_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, s$ (мы считаем, что $p_0 = p$ и $p_{s+1} = q$). Во введенных выше обозначениях отображение β определяется, следовательно, формулой

$$\beta(\hat{p}) = \gamma_{pp_1} * \dots * \gamma_{p_i p_{i+1}} * \dots * \gamma_{p_s q}$$

и потому однозначно определено.

Ясно, что

функция φ гладка на многообразии $\hat{M}$;

(немедленно следует из гладкости функции $\rho^2(p, q)$ для достаточно близких точек p и q ; см. п. 11 гл. 7);

отображение α непрерывно;

(немедленно следует из непрерывной зависимости точки $\gamma(t)$ от кривой γ ; см. п. 2);

отображение α переводит пространство $[J \leq a]$ в пространство $[\varphi \leq b]$;

(ибо для точек $p_i = \gamma\left(\frac{i}{s+1}\right)$ имеют место оценки

$$\rho(p_i, p_{i+1}) = \frac{J(\gamma)}{s+1} < \frac{a}{s+1} < d, \quad \rho(p, p_i) \leq i \frac{J(\gamma)}{s+1} \leq a$$

и

$$\varphi(\hat{p}) = \sum_{i=0}^s \left(\frac{J(\gamma)}{s+1} \right)^2 \leq \frac{a^2}{s+1} = b);$$

отображение β непрерывно;

(непосредственно следует из результатов п. 2);

отображение β переводит пространство $[\varphi \leq b]$ в пространство $[J \leq a]$

$$\begin{aligned} \left(\text{ибо } ^1) J^2(\beta(p_*)) = \left(\sum_{i=0}^s \rho(p_i, p_{i+1}) \right)^2 \leq (s+1) \sum_{i=0}^s \rho^2(p_i, p_{i+1}) \leq \right. \\ \left. \leq (s+1) b = a^2 \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Здесь мы пользуемся частным случаем неравенства Коши — Буняковского $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$.

Далее, ясно, что точки

$$t_1 = \frac{1}{s+1}, \dots, t_s = \frac{s}{s+1}$$

расположены на отрезке $[0, 1]$ достаточно густо (в смысле п. 8 гл. 8), так что их можно принять за точки $t_1, \dots, t_s$, лежащие в основе построения формы Ботта $Q_*(x)$. Сделав это, мы немедленно получим, что для любой геодезической $\gamma \in [J \leq a]$ функция φ в окрестности точки $\alpha(\gamma) = (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_s))$ является не чем иным, как рассмотренной в п. 13 гл. 8 функцией $J_*(x)$, т. е., более точно, координатный диффеоморфизм, определенный локальными координатами $\hat{x}_i^k$, $i = 1, \dots, s$; $k = 1, \dots, m$, в точке $\alpha(\gamma)$ многообразия $\hat{M}$, которые соответствуют выбранным в п. 13 гл. 8 локальным координатам x_k^i (см. п. 13 гл. 8), переводит функцию φ в функцию J_* . Это показывает, во-первых, что точка $\alpha(\gamma)$ является критической точкой функции φ (см. формулу (6) п. 13 гл. 8) и, во-вторых, что гессиан $H_{\alpha(\gamma)} \varphi$ функции φ в точке $\alpha(\gamma)$ совпадает с формой Ботта $Q_*(x)$ (после соответствующего отождествления пространства $(\hat{M})_p$ с пространством R^{sm}). Тем самым доказано, во-первых, что

для любой геодезической $\gamma \in [J \leq a]$ точка $\alpha(\gamma)$ является критической точкой функции φ
и, во-вторых (см. теоремы об индексах в гл. 8), что
утверждения 1) и 2) теоремы редукции справедливы.

Покажем теперь, что

для любой критической точки $\hat{p} \in [\varphi \leq b]$ функции φ существует такая геодезическая $\gamma \in [J \leq a]$, что

$$\alpha(\gamma) = \hat{p}.$$

С этой целью мы в точке $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s)$ многообразия $\hat{M}$ выберем произвольный вектор $C = (C_1, \dots, C_s)$, $C_1 \in M_{p_1}, \dots, C_s \in M_{p_s}$. Рассматривая квадрат ρ^2 метрики ρ как гладкую функцию вблизи диагонали произведения $M \times M$, мы ввиду формулы (1) немедленно получим, что $C\varphi = \sum_{i=0}^s C_{(i)}\rho^2$, где

$C_{(i)}$ — вектор (C_i, C_{i+1}) в точке (p_i, p_{i+1}) многообразия $M \times M$ (мы считаем, что $C_0 = 0$, $C_{s+1} = 0$).

Если $p_{i+1} \neq p_i$, то

$$C_{(i)}\rho^2 = 2\rho(p_i, p_{i+1})C_{(i)}\rho.$$

С другой стороны, согласно формуле (5) п. 1 гл. 8 (условия применимости этой формулы — достаточная близость точек p_i и p_{i+1} , — по условию, выполнены) имеет место равенство

$$C_{(i)}\rho = (C_{i+1}, \dot{\gamma}_i^+) - (C_i, \dot{\gamma}_i^-),$$

где $\dot{\gamma}_i^-$ и $\dot{\gamma}_i^+$ — единичные касательные векторы геодезической γ_i в точках p_i и p_{i+1} соответственно.

Следовательно,

$$C_{(i)}\rho^2 = 2\rho(p_i, p_{i+1})[(C_{i+1}, \dot{\gamma}_i^+) - (C_i, \dot{\gamma}_i^-)].$$

Ясно, что эта формула остается справедливой и при $p_{i+1} = p_i$ (когда обе ее части равны нулю). Поэтому

$$\begin{aligned} C\varphi &= 2 \sum_{i=0}^s \rho(p_i, p_{i+1})[(C_{i+1}, \dot{\gamma}_i^+) - (C_i, \dot{\gamma}_i^-)] = \\ &= 2 \sum_{i=1}^{s-1} (\rho(p_{i-1}, p_i) \dot{\gamma}_{i-1}^+ - \rho(p_i, p_{i+1}) \dot{\gamma}_i^-, C_i), \end{aligned} \quad (2)$$

ибо, по условию, $C_0 = 0$, $C_{s+1} = 0$.

Но так как, по предположению, точка $\hat{p}$ является критической точкой функции φ , то $C\varphi = 0$ для любого вектора $C \in \hat{M}_{\hat{p}}$. Следовательно, для любых векторов $C_i \in M_{p_i}$, $i = 1, \dots, s$, должно иметь место равенство

$$\sum_{i=1}^{s-1} (\rho(p_{i-1}, p_i) \dot{\gamma}_{i-1}^+ - \rho(p_i, p_{i+1}) \dot{\gamma}_i^-, C_i) = 0,$$

что возможно лишь тогда, когда

$$\rho(p_{i-1}, p_i) \dot{\gamma}_{i-1}^+ = \rho(p_i, p_{i+1}) \dot{\gamma}_i^- \quad \text{для любого } i = 1, \dots, s.$$

Поскольку векторы $\dot{\gamma}_i^-$ и $\dot{\gamma}_{i-1}^+$ единичны, из этого равенства прежде всего следует, что

$$\rho(p_{i-1}, p_i) = \rho(p_i, p_{i+1}),$$

и затем, что

$$\dot{\gamma}_{i-1}^+ = \dot{\gamma}_i^-$$

для любого $i = 1, \dots, s$. (Заметим, что отсюда, в частности, вытекает, что равенство $\rho(p_{i+1}, p_i) = 0$ ни для одного i невозможно, ибо тогда оно имело бы место для всех i и расстояние между точками $\bar{p}$ и $\bar{q}$ было бы равно нулю.)

Полученные равенства означают, что геодезическая ломаная γ , составленная из кратчайших γ_i , является на самом деле

гладкой геодезической, причем отображение α переводит эту геодезическую в точку $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s)$. Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы редукции нам осталось только показать, что

отображения α и β являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями.

Рассмотрим сначала отображение

$$\beta \circ \alpha: [J \leq a] \rightarrow [J \leq a].$$

Это отображение каждой кривой $\gamma \in [J \leq a]$ сопоставляет геодезическую ломаную $\beta(\alpha(\gamma))$, проходящую через точки

$$p_0 = \gamma(0) = p, \quad p_1 = \gamma\left(\frac{1}{s+1}\right), \quad \dots, \quad p_i = \gamma\left(\frac{i}{s+1}\right), \quad \dots$$

$$\dots, \quad p_s = \gamma\left(\frac{s}{s+1}\right), \quad p_{s+1} = \gamma(1) = q.$$

Мы видим, что отображение $\beta \circ \alpha$ весьма сходно с рассмотренным в п. 2 отображением $j \circ i$ (единственное отличие состоит в том, что в построении отображения $j \circ i$ роль числа $1/(s+1)$ играет число $\tau(\gamma)$). Следуя этому сходству, мы любому числу $\theta \in I$ и любой кривой $\gamma \in [J \leq a]$ отнесем кривую

$$\hat{D}_\theta \gamma = \gamma_{p_0 p_0^\theta} * \gamma_{t_0^\theta}^{t_1^\theta} * \dots * \gamma_{p_i p_i^\theta} * \gamma_{t_i^\theta}^{t_{i+1}^\theta} * \dots * \gamma_{p_s p_s^\theta} * \gamma_{t_s^\theta}^1$$

(ср. формулу (4) п. 2), где теперь

$$t_i = \frac{i}{s+1}, \quad t_i^\theta = \frac{i+\theta}{s+1}, \quad p_i^\theta = \gamma(t_i^\theta), \quad i = 0, 1, \dots, s,$$

в то время как $\gamma_{p_i p_i^\theta}$ — по-прежнему кратчайшая геодезическая, соединяющая точки p_i и p_i^θ (существование этой геодезической обеспечено теперь тем, что, как легко видеть, $\rho(p_i, p_i^\theta) < d$), а $\gamma_{t_i^\theta}^{t_{i+1}^\theta}$ — соответствующим образом перепараметризованный отрезок $\gamma|_{[t_i^\theta, t_{i+1}^\theta]}$ кривой γ . Ясно, что кривая

$\hat{D}_\theta \gamma$ принадлежит пространству $[J \leq a]$ (ибо $J(\hat{D}_\theta(\gamma)) \leq J(\gamma)$), непрерывно зависит от кривой γ и числа θ и обладает тем свойством, что $\hat{D}_0 \gamma = \gamma$, $\hat{D}_1 \gamma = \beta(\alpha(\gamma))$. Таким образом,

семейство отображений

$$\hat{D}_0: [J \leq a] \rightarrow [J \leq a]$$

представляет собой гомотопию, связывающую тождественное отображение пространства $[J \leq a]$ с отображением $\beta \circ \alpha$.

Перейдем теперь к отображению

$$\alpha \circ \beta: [\varphi \leq b] \rightarrow [\varphi \leq b].$$

Это отображение каждую точку $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s) \in [\varphi \leq b]$ переводит в точку

$$\left(\gamma\left(\frac{1}{s+1}\right), \dots, \gamma\left(\frac{s}{s+1}\right) \right) \in [\varphi \leq b],$$

где $\gamma = \beta(\hat{p})$ — геодезическая ломаная $\gamma_{pp_1} * \gamma_{p_1p_2} * \dots * \gamma_{p_s q}$ с вершинами $p_1, \dots, p_s$.

Пусть

$$0 < t_1 < \dots < t_s < 1$$

— значения параметра t на кривой $\gamma = \beta(\hat{p})$, соответствующие точкам $p_1, \dots, p_s$:

$$p_1 = \gamma(t_1), \dots, p_s = \gamma(t_s).$$

Для любого $\tau \in [0, 1]$ мы рассмотрим в многообразии $\hat{M}$ точку

$$\Delta_\tau(\hat{p}) = \left(\gamma\left(t_1(1 - \tau) + \frac{1}{s+1}\tau\right), \dots, \gamma\left(t_i(1 - \tau) + \frac{i}{s+1}\tau\right), \dots, \gamma\left(t_s(1 - \tau) + \frac{s}{s+1}\tau\right) \right).$$

Ясно, что точка $\Delta_\tau(\hat{p})$ непрерывно зависит от точки $\hat{p}$ и числа τ , причем

$$\Delta_0(\hat{p}) = \hat{p}, \quad \Delta_1(\hat{p}) = (\alpha \circ \beta)(\hat{p}).$$

Таким образом, чтобы доказать, что Δ_τ является гомотопией, связывающей тождественное отображение пространства $[\varphi \leq b]$ с отображением $\alpha \circ \beta$, нужно только доказать, что

$$\Delta_\tau: [\varphi \leq b] \rightarrow [\varphi \leq b],$$

т. е. что $\Delta_\tau(\hat{p}) \in [\varphi \leq b]$ для любых $\tau \in I$ и $\hat{p} \in [\varphi \leq b]$.

Пусть

$$p_i^{(\tau)} = \gamma\left(t_i(1 - \tau) + \frac{i}{s+1}\tau\right), \quad i = 1, \dots, s.$$

Пусть, кроме того,

$$p_0^{(\tau)} = \bar{p}, \quad p_{s+1}^{(\tau)} = \bar{q}$$

для любого $\tau \in I$. Ясно, что для каждого $i = 0, 1, \dots, s$ расстояние $\rho(p_i^{(\tau)}, p_{i+1}^{(\tau)})$ между точками $p_i^{(\tau)}$ и $p_{i+1}^{(\tau)}$ не превосходит длины дуги кривой $\gamma = \beta(p_*)$ между этими точками, т. е. не превосходит числа

$$\begin{aligned} J(\gamma) \left[t_{i+1}(1 - \tau) + \frac{i+1}{s+1} \tau - t_i(1 - \tau) - \frac{i}{s+1} \tau \right] = \\ = J(\gamma)(t_{i+1} - t_i)(1 - \tau) + \frac{J(\gamma)}{s+1} \tau = \rho(p_i, p_{i+1})(1 - \tau) + \frac{J(\gamma)}{s+1} \tau \end{aligned}$$

(напомним, что между точками p_i и p_{i+1} кривая γ является кратчайшей геодезической). Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta_\tau(\hat{p})) &= \\ &= \sum_{i=0}^s \rho^2(p_i^{(\tau)}, p_{i+1}^{(\tau)}) \leq \sum_{i=0}^s \left[\rho(p_i, p_{i+1})(1 - \tau) + \frac{J(\gamma)}{s+1} \tau \right]^2 = \\ &= (1 - \tau)^2 \sum_{i=0}^s \rho^2(p_i, p_{i+1}) + 2 \frac{(1 - \tau) \tau J(\gamma)}{s+1} \sum_{i=0}^s \rho(p_i, p_{i+1}) + \\ &+ \frac{J(\gamma)^2}{(s+1)^2} \tau^2 = (1 - \tau)^2 \varphi(\hat{p}) + 2 \frac{(1 - \tau) \tau J(\gamma)^2}{s+1} + \frac{J(\gamma)^2 \tau^2}{(s+1)^2} = \\ &= \varphi(\hat{p}) - 2\tau \left(\varphi(\hat{p}) - \frac{J(\gamma)^2}{s+1} \right) + \tau^2 \left(\varphi(\hat{p}) - \frac{2J(\gamma)^2}{s+1} + \frac{J(\gamma)^2}{(s+1)^2} \right) = \\ &= \varphi(\hat{p}) - 2\tau \left(\varphi(\hat{p}) - \frac{J(\gamma)^2}{s+1} \right) + \tau^2 \left(\varphi(\hat{p}) - \frac{J(\gamma)^2}{s+1} \right) - \\ &- \frac{\tau^2 J(\gamma)^2}{s+1} \left(1 - \frac{1}{s+1} \right) \leq \varphi(\hat{p}) - \tau(2 - \tau) \left(\varphi(\hat{p}) - \frac{J(\gamma)^2}{s+1} \right). \end{aligned}$$

Но согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\varphi(\hat{p}) - \frac{J(\gamma)^2}{s+1} = \sum_{i=0}^s \rho^2(p_i, p_{i+1}) - \frac{1}{s+1} \left(\sum_{i=0}^s \rho(p_i, p_{i+1}) \right)^2 \geq 0.$$

Поэтому

$$\varphi(\Delta_\tau(\hat{p})) \leq \varphi(\hat{p}) \quad \text{для любого } \tau \in I.$$

Следовательно, если $\hat{p} \in [\varphi \leq b]$, т. е. если $\varphi(\hat{p}) \leq b$, то $\varphi(\Delta_\tau(\hat{p})) \leq b$, и, следовательно, $\Delta_\tau(\hat{p}) \in [\varphi \leq b]$.

Тем самым теорема редукции полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть N — произвольное компактное подмногообразие пространства M , не содержащее данной точки $p \in M$. Рассмотрим подпространство $\hat{\Omega}(N)$ пространства Φ , состоящее из всех кривых $\gamma \in \Phi$, для которых

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma(1) \in N.$$

Для любого a мы будем символом $[J \leq a]_N$ обозначать подпространство пространства $\hat{\Omega}(p, N)$, состоящее из всех кривых $\gamma \in \hat{\Omega}(p, N)$, для которых $J(\gamma) \leq a$. Для каждой геодезической $\gamma \in \hat{\Omega}(N)$, ортогональной при $t = 1$ подмногообразию N , индексы точки $t = 0$ и интервала $(0, 1)$ относительно подмногообразия N (см. п. 2 Дополнения к гл. 8) мы будем обозначать символами $\lambda_N^0(\gamma)$ и $\lambda_N^{0,1}(\gamma)$ соответственно. Число $\lambda_N^0(\gamma)$ мы будем называть *корангом* геодезической γ , а число $\lambda_N^{0,1}(\gamma)$ — ее *индексом* (относительно подмногообразия N). Оказывается, что

для любого числа $a \geq \rho(p, N)$ существуют такое гладкое многообразие $\hat{M}$, такая гладкая на $\hat{M}$ функция φ и такое число b , что пространство $[J \leq a]_N$ гомотопически эквивалентно пространству $[\varphi \leq b]$. Более того, существует такая гомотопическая эквивалентность

$$\alpha: [J \leq a]_N \rightarrow [\varphi \leq b],$$

что кривая $\gamma \in [J \leq a]_N$ тогда и только тогда является геодезической, ортогональной при $t = 1$ подмногообразию N , когда точка $\alpha(\gamma) \in [\varphi \leq b]$ является критической точкой функции φ , причем

1) коранг $s(\alpha(\gamma))$ точки $\alpha(\gamma)$ равен корангу $\lambda_N^0(\gamma)$ геодезической γ относительно подмногообразия N ;

2) индекс $h(\alpha(\gamma))$ точки $\alpha(\gamma)$ равен индексу $\lambda_N^{0,1}(\gamma)$ геодезической γ относительно подмногообразия N .

Эта теорема редукции аналогична доказанной выше теореме редукции и переходит в нее, когда подмногообразие N сводится к точке. Ее доказательство вполне аналогично проведенному выше доказательству. Поэтому мы его подробно проводить не будем, а лишь отметим те места, в которых требуются те или иные изменения.

Прежде всего в определении многообразия $\hat{M}$ мы произведение $M \times \dots \times M$ должны заменить произведением

$$M \times M \times \dots \times M \times N$$

с экземпляров многообразия M и подмногообразия N , где s — то же число, что и выше. Число b мы определяем так же, как и раньше, т. е. формулой

$$b = \frac{a^2}{s+1},$$

а функцию φ — формулой

$$\varphi(\hat{p}) = \rho^2(p, p_1) + \dots + \rho^2(p_i, p_{i+1}) + \dots + \rho^2(p_s, q),$$

$$\hat{p} = (p_1, \dots, p_s, q) \in \hat{M}, \quad p_1, \dots, p_s \in M, \quad q \in N.$$

Далее, мы полагаем

$$\alpha(\gamma) = \left(\gamma\left(\frac{1}{s+1}\right), \dots, \gamma\left(\frac{s}{s+1}\right), \gamma(1) \right)$$

и

$$\beta(\gamma) = \gamma_{pp_1} * \dots * \gamma_{p_i p_{i+1}} * \dots * \gamma_{p_s q},$$

где по-прежнему $\gamma_{p_i p_{i+1}}$, $i = 0, 1, \dots, s$, — кратчайшие геодезические, соединяющие точки p_i и p_{i+1} (мы считаем, что $p_0 = p$, $p_{s+1} = q$).

Легко проверяется, что все изложенное выше доказательство остается в силе (только при доказательстве утверждений 1) и 2) следует ссылку на результаты гл. 8 заменить ссылкой на результаты Дополнения к гл. 8); в формуле (2) появится дополнительный член $2\rho(p_s, q)(C_{s+1}, \gamma_s^+)$ с $C_{s+1} \in N_q$, равенство нулю которого обеспечивается теперь ортогональностью к подмногообразию N геодезической γ в точке $t = 1$, и, наконец, в формуле, определяющей деформацию Δ_τ , нужно сделать очевидное изменение.

4. Гомотопический тип пространств $\hat{\Omega}(p, q)$

Построенную в предыдущем пункте функцию φ мы можем рассматривать не только на многообразии $\hat{M}$, но и на всем произведении M^s (хотя на этом произведении она не будет уже гладкой функцией). При этом легко видеть, что

для указанного выше числа b множества $[\varphi \leq b]$ в многообразиях $\hat{M}$ и M^s совпадают, т. е. если для точки $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s) \in M^s$ имеет место неравенство $\varphi(\hat{p}) \leq b$, то $\hat{p} \in \hat{M}$.

Действительно, для любого i

$$\rho^2(p, p_i) \leq (\rho(p, p_1) + \rho(p_1, p_2) + \dots + \rho(p_{i-1}, p_i))^2 \leq \quad (1)$$

$$\leq i(\rho^2(p, p_1) + \rho^2(p_1, p_2) + \dots + \rho^2(p_{i-1}, p_i)) \leq s\varphi(\hat{p}) \leq sb < a,$$

и

$$\rho^2(p_i, p_{i+1}) \leq \varphi(\hat{p}) \leq b = \left(\frac{a}{\sqrt{s+1}}\right)^2 < d.$$

Пусть теперь b — произвольное (неотрицательное) вещественное число и пусть $\hat{p} = (p_1, \dots, p_s)$ — произвольная точка множества $[\varphi \leq b]$ в многообразии M^s . Тогда в силу оценки (1) множество $C_i \subset M$, являющееся образом множества $[\varphi \leq b]$ при естественной проекции произведения M^s на его i -й множитель, ограничено. Так как это множество, очевидно, замкнуто, то, в силу полноты пространства M , оно компактно. Поскольку

$$[\varphi \leq b] \subset C_1 \times C_2 \times \dots \times C_s,$$

тем самым доказано, что

для любого $b \in \mathbf{R}$ подмножество $[\varphi \leq b]$ многообразия M^s компактно, т. е. (неотрицательная) функция φ является отображением компактного характера многообразия M^s в числовую ось $\mathbf{R}$.

Заметим теперь, что хотя многообразие $\hat{M}$ и зависит от числа a (ибо от a зависит число s), но эта зависимость «постоянна снизу», т. е. для любого $a' > a$ мы можем считать, что многообразие $\hat{M}$ совпадает с многообразием $\hat{M}'$, отвечающим числу a . В соответствии с этим мы можем считать, что функция φ совпадает с функцией φ' , построенной для числа a' , и что гомотопическая эквивалентность

$$\alpha: [J \leq a] \rightarrow [\varphi \leq b]$$

является ограничением $\alpha' \mid_{[J \leq a]}$ гомотопической эквивалентности

$$\alpha': [J \leq a'] \rightarrow [\varphi' \leq b'],$$

соответствующей числу a' .

Зафиксировав некоторое число $a' > a$, мы теперь предположим, что точки p и q многообразия M не сопряжены ни на какой геодезической $\gamma \in [J \leq a']$, т. е. что коранг $\lambda^0(\gamma)$

любой такой геодезической равен нулю. Тогда в силу утверждения 1) теоремы редукции все критические точки функции φ' , принадлежащие множеству $[\varphi' \leq b']$, будут ее невырожденными критическими точками.

В силу доказанных выше утверждений отсюда непосредственно вытекает, что функция φ и число b удовлетворяют всем условиям доказанного в начале п. 4 гл. 6 предложения (существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $[\varphi \leq b + \varepsilon]$ компактно, множество $[b < \varphi \leq b + \varepsilon]$ не содержит критических точек функции φ и все критические точки этой функции, принадлежащие множеству $[\varphi \leq b]$, невырождены). Поэтому множество $[\varphi \leq b]$ (а потому, в силу теоремы редукции, и множество $[J \leq a]$) гомотопически эквивалентно некоторому конечному клеточному разбиению. Таким образом,

если для некоторого $a' > a$ точки p и q многообразия M не сопряжены ни на какой геодезической $\gamma \in [J \leq a']$, то подпространство $[J \leq a]$ пространства $\Omega(p, q)$ гомотопически эквивалентно некоторому конечному клеточному разбиению K .

При этом

клетки разбиения K находятся во взаимно однозначном соответствии с геодезическим $\gamma \in [J \leq a]$, причем размерность каждой клетки равна индексу соответствующей геодезической.

В частности, мы видим, что

при выполнении указанного выше условия пространство $[J \leq a]$ содержит лишь конечное число геодезических.

Предположим теперь, что точки p и q многообразия M не сопряжены вообще ни на какой проходящей через них геодезической. Тогда предыдущее утверждение будет верно при любом $a \in \mathbf{R}$ и, в частности, при любом целом $n \geq 0$ множество $[J \leq n]$ будет гомотопически эквивалентно некоторому конечному клеточному разбиению K_n . Покажем, что разбиения K_n и гомотопические эквивалентности

$$\varphi_n: [J \leq n] \rightarrow K_n$$

можно выбрать так, чтобы для любого $n \geq 0$ разбиение K_n было подразбиением разбиения K_{n+1} :

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \dots,$$

а гомотопическая эквивалентность

$$\varphi_n : [J \leq n] \rightarrow K_n$$

была ограничением $\varphi_{n+1}|_{[J \leq n]}$ гомотопической эквивалентности

$$\varphi_{n+1} : [J \leq n + 1] \rightarrow K_{n+1}.$$

Действительно (см. аналогичные рассуждения в п. 4 гл. 6), пусть для некоторого $n \geq 1$ разбиение K_{n-1} и гомотопическая эквивалентность φ_{n-1} уже построены (начало индукции обеспечивается тем, что, как легко видеть, $K_0 = \emptyset$). Согласно теореме редукции множество $[J \leq n]$ гомотопически эквивалентно некоторому множеству вида $[\varphi \leq b]$, причем, согласно сделанному выше замечанию, соответствующая гомотопическая эквивалентность $[J \leq n] \rightarrow [\varphi \leq b]$ обладает тем свойством, что ее ограничение на множестве $[J \leq n - 1]$ представляет собой гомотопическую эквивалентность $[J \leq n - 1] \rightarrow [\varphi \leq b']$, что b' — число b , соответствующее числу $a = n - 1$. Поскольку, согласно результатам п. 4 гл. 6, множество $[\varphi \leq b]$ гомотопически эквивалентно множеству $[\varphi \leq b']$, к которому последовательно приклеено конечное число замкнутых шаров (находящихся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками $\hat{p} \in [b' < \varphi \leq b]$, т. е. с геодезическими $\gamma \in [n - 1 < J \leq n]$), отсюда в силу результатов п. 3 гл. 2 непосредственно вытекает, что множество $[J \leq n]$ гомотопически эквивалентно множеству $[J \leq n - 1]$, к которому последовательно приклеены те же шары, а потому и разбиению K_{n-1} с соответствующим образом приклеенными к нему этими шарами. Но, согласно результатам п. 4 гл. 3, результат последнего приклеивания в свою очередь гомотопически эквивалентен некоторому клеточному разбиению K_n , содержащему разбиение K_{n-1} в качестве подразбиения. Компонуя эти гомотопические эквивалентности (из которых первую можно выбрать совпадающей с эквивалентностью φ_{n-1} на множестве $[J \leq n - 1]$, а вторую — совпадающей с тождественным отображением на разбиении K_{n-1}), мы и получим искомую гомотопическую эквивалентность

$$\varphi_n : [J \leq n] \rightarrow K_n.$$

Пусть теперь K — свободное объединение разбиений K_n . Согласно результатам п. 2 гл. 3 это объединение является

клеточным разбиением, содержащим разбиения K_n в качестве подразбиений. Определим отображение

$$\varphi: \hat{\Omega}(p, q) \rightarrow K,$$

считая, что

$$\varphi|_{[J \leq n]} = \varphi_n$$

для любого $n \geq 0$. Ясно, что это отображение однозначно определено и непрерывно.

Поскольку пространство $\hat{\Omega}(p, q)$, будучи метрическим пространством, паракомпактно и поскольку оно является объединением внутренностей $[J < n]$ множеств $[J \leq n]$, оно представляет собой гомотопический предел подпространств $[J \leq n]$. С другой стороны, разбиение K также является гомотопическим пределом подразбиений K_n . Так как отображение

$$\varphi: \hat{\Omega}(p, q) \rightarrow K,$$

по построению, обладает тем свойством, что для любого $n \geq 0$ определенное им отображение

$$\varphi_n: [J \leq n] \rightarrow K_n$$

является гомотопической эквивалентностью, отсюда следует, что отображение φ также является гомотопической эквивалентностью. Тем самым доказано, что

для любых точек p и q риманова пространства M , не сопряженных ни на одной проходящей через эти точки геодезической, пространство $\hat{\Omega}(p, q)$ гомотопически эквивалентно счетному клеточному разбиению, клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с геодезическими $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$, причем размерность каждой клетки равна индексу соответствующей геодезической.

Это утверждение можно рассматривать как венец всей теории Морса. Как правило, во всех приложениях теории Морса достаточно ссылаться лишь на эту теорему, не вникая в метод ее доказательства.

З а м е ч а н и е. Аналогичные (несколько более общие результаты) можно получить, пользуясь вместо теоремы Морса из п. 3 гл. 6 теоремой Еотта из п. 5 гл. 6. Однако соответствующая теорема формулируется в достаточной степени неуклюже, поскольку никаких простых условий на точки p

и q , обеспечивающих слабую невырожденность критических точек функции φ , не известно. Мы ее поэтому проводить здесь не будем. На практике теоремой Ботта пользуются, заново проводя в каждом конкретном случае все изложенные выше рассуждения.

Ясно, что все результаты этого пункта без труда переносятся и на случай пространств $\hat{\Omega}(p, N)$ (см. замечание в конце п. 3). Детальное проведение этого перенесения мы оставляем читателю в качестве упражнения.

5. Приложения к топологии. Теорема Фрейденталя

Согласно п. 4 гл. 8 для любой точки p произвольного риманова пространства M существуют точки q , не сопряженные с точкой p ни на какой соединяющей эти точки геодезической. Отсюда, комбинируя основную теорему п. 4 с результатами пп. 1 и 2, мы немедленно получаем, что

для любой точки p риманова (связного и полного) пространства M пространство петель $\Omega = \Omega(p)$ гомотопически эквивалентно счетному клеточному разбиению, клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с геодезическими $\gamma \in \Phi$, соединяющими точку p с некоторой точкой $q \in M$, обладающей тем свойством, что точки p и q не сопряжены ни на какой соединяющей их геодезической; размерность каждой клетки при этом равна индексу соответствующей геодезической.

Пространства петель важны для топологии в первую очередь из-за тесной связи, существующей между гомотопическими группами $\pi_n(X, x_0)$ произвольного линейно связного пространства X в некоторой его точке x_0 и гомотопическими группами $\pi_n(\Omega, 0_{x_0})$ его пространства петель Ω , вычисленными в точке 0_{x_0} (представляющей собой вырожденную петлю в точке x_0). Чтобы описать эту связь, нам будет удобно несколько видоизменить данное в п. 4 гл. 2 определение гомотопических групп.

Пусть I^n — *единичный n -мерный куб* (произведение n экземпляров отрезка I). Точками этого куба являются последовательности

$$(t^1, \dots, t^n)$$

n вещественных чисел, удовлетворяющих для любого $i = 1, \dots, n$ неравенствам

$$0 \leq t^i \leq 1.$$

Точки куба I^n , для которых хотя бы одна из координат t^i , $i = 1, \dots, n$, равна нулю или единице, составляют, по определению, *границу* I^n этого куба. Легко видеть, что существуют непрерывные отображения

$$\sigma : (I^n, I^n) \rightarrow (S^n, u_0)$$

куба I^n на сферу S^n , переводящие границу I^n в точку u_0 и гомеоморфно отображающие внутренность $I^n \setminus I^n$ куба I^n на множество $S^n \setminus u_0$. Мы выберем (и раз навсегда зафиксируем) некоторое такое отображение σ_0 .

С помощью выбранного отображения σ_0 мы каждому отображению

$$\varphi : (S^n, u_0) \rightarrow (X, x_0) \quad (1)$$

можем сопоставить некоторое отображение

$$\psi : (I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0), \quad (2)$$

положив

$$\psi = \varphi \circ \sigma. \quad (3)$$

Легко видеть, что таким образом мы можем получить все отображения вида (2), т. е. любое такое отображение имеет вид (3) при соответствующим образом подобранном (очевидно, единственном) отображении (1). Кроме того, ясно, что два отображения (1) тогда и только тогда гомотопны относительно u_0 , когда соответствующие отображения (2) гомотопны относительно I^n . Все это означает, что

элементами группы $\pi_n(X, x_0)$ мы можем считать гомотопические классы относительно I^n непрерывных отображений

$$(I^n, I^n) \rightarrow (X, x_0).$$

В частности, элементы группы $\pi_n(\Omega, 0_{x_0})$ задаются всевозможными отображениями

$$\psi : (I^n, I^n) \rightarrow (\Omega, 0_{x_0}). \quad (4)$$

Но любое такое отображение определяет некоторое отображение

$$h\psi : (I^{n+1}, I^{n+1}) \rightarrow (X, x_0),$$

для которого

$$h\psi(t^1, \dots, t^n, t^{n+1}) = \psi(t^1, \dots, t^n)(t^{n+1}), \quad (5)$$

причем тем самым мы получаем, как легко видеть, взаимно однозначное соответствие между отображениями (4) и отображениями (5). Переходя к гомотопическим классам, мы немедленно получим отсюда, что

группа $\pi_n(\Omega, 0_{x_0})$, $n \geq 0$, изоморфна группе $\pi_{n+1}(X, x_0)$.

Во многих случаях сформулированная в начале этого пункта теорема позволяет (когда пространство X является полным римановым пространством M) вычислить группы $\pi_n(\Omega, 0_{x_0})$ (хотя бы для некоторых значений n) или, на худой конец, получить ту или иную информацию о их строении. В силу только что доказанного утверждения мы тем самым автоматически получим соответствующие группы $\pi_n(X, x_0)$ (или хотя бы докажем некоторые их свойства).

Мы проиллюстрируем эти общие замечания на простейшем (но наиболее интересном) случае, когда пространство X является m -мерной ($m \geq 2$) сферой S^m (снабженной римановой метрикой, индуцированной метрикой объемлющего евклидова пространства R^{m+1}).

Максимальными геодезическими сферы S^m являются, как легко видеть, ее большие круги, пробегаемые бесконечное число раз. Пусть p — произвольная точка сферы S^m и пусть γ — ее максимальная геодезическая, проходящая (при $t=0$) через точку p . Параметр (пропорциональный длине дуги) на этой геодезической мы выберем так, чтобы при $t=2$ получалась точка p^* сферы S^m , диаметрально противоположная точке p (следовательно, эта точка будет получаться и при любом t вида $4n+2$, тогда как при $t=4n$ мы будем получать исходную точку p). При $t=1$ (а потому и при любом t вида $4n+1$) мы будем получать, очевидно, точку p_1 , в которой рассматриваемый большой круг пересекает экватор S^{m-1} сферы S^m (здесь мы данную точку p сферы S^n считаем ее «полюсом»).

Пусть A — произвольный вектор, касающийся экватора S^{m-1} в точке p_1 . Простые элементарно геометрические соображения показывают, что существует одна и только одна однопараметрическая группа вращений

$$\theta_\tau : S^m \rightarrow S^m$$

сферы S^m , состоящая из вращений, оставляющих на месте точки p и p_* , и обладающая тем свойством, что вектор A является касательным вектором траектории $\theta_\tau(p_1)$ этой группы, проходящей через точку p_1 . Мы определим вариацию $\varphi(t, \tau)$ геодезической γ , полагая

$$\theta(t, \tau) = \theta_\tau(\gamma(t)).$$

Ясно, что эта вариация является якобиевой вариацией и что ассоциированное с ней поле Якоби $X_A(t)$ равно нулю в точках p и p^* (т. е. при $t = 0, \pm 4, \pm 8, \dots$ и $t = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots$). Кроме того, вектор $X_A(1)$ совпадает, очевидно, с данным вектором A . Тем самым мы определили некоторое отображение

$$(S^{m-1})_{p_1} \rightarrow \Lambda_\gamma(0) \quad (6)$$

касательного пространства сферы S^{m-1} в точке p_1 в пространство $\Lambda_\gamma(0)$ всех полей Якоби на геодезической γ , равных нулю при $t = 0$. Без труда проверяется, что это отображение линейно. Кроме того, его композиция с отображением

$$\Lambda_\gamma(0) \rightarrow (S^m)_{p_1},$$

сопоставляющим каждому полю $X(t) \in \Lambda_\gamma(0)$ вектор $X(1) \in (S^m)_{p_1}$, является, согласно сказанному выше, тождественным отображением пространства $(S^{m-1})_{p_1}$. Следовательно, отображение (6) мономорфно, так что его образ $\Sigma_\gamma \subset \Lambda_\gamma(0)$ является $m - 1$ -мерным подпространством m -мерного пространства $\Lambda_\gamma(0)$. Поля $X_A(t)$, принадлежащие этому подпространству, обладают, очевидно, тем свойством, что для любого $t \in \mathbf{R}$, не имеющего вида $4n$ и $4n + 2$, вектор $X_A(t)$ отличен от нуля и не касается геодезической γ (и даже ей ортогонален). Поэтому особое поле Якоби $t\dot{\gamma}(t)$ подпространству Σ_γ не принадлежит. Поскольку $\dim \Lambda_\gamma(0) = m$, отсюда немедленно вытекает, что любое поле $X(t) \in \Lambda_\gamma(0)$ является суммой некоторого поля $X_A(t) \in \Sigma_\gamma$ и некоторого кратного $a t\dot{\gamma}(t)$ поля $t\dot{\gamma}(t)$. Так как для любого $t \neq 0$ вектор $t\dot{\gamma}(t)$ отличен от нуля и не коллинеарен с вектором $X_A(t)$, такое поле может быть равно нулю в некоторой точке $t_0 \in \mathbf{R}$ только тогда, когда $a = 0$, т. е. когда $X(t) = X_A(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Так как в этом случае число t_0 необходимо имеет вид $4n$ или $4n + 2$, то тем самым полностью доказано, что

с точкой $t = 0$ оси $\mathbf{R}$ сопряжены (по отношению к данной геодезической γ) лишь точки вида $t = 4n$ и $t =$

$= 4n + 2$, причем индекс каждой из этих точек равен $m - 1$ (размерности пространства Σ_γ).

В частности,

любая точка $q \neq p^*$ не сопряжена с точкой p ни на какой геодезической, соединяющей эти точки.

Кроме того,

индекс каждой геодезической, соединяющей точки p и $q \neq p^*$, равен $k(m - 1)$, где k — число отличных от нуля значений параметра, при которых эта геодезическая проходит через точки p и p^* .

Поскольку для каждого $k \geq 0$ существует, очевидно, одна и только одна геодезическая, соединяющая точки p и $q \neq p^*$ и k раз проходящая через точки p и p^* , отсюда в виду общей теоремы, сформулированной в начале этого пункта, непосредственно вытекает, что

пространство Ω петель сферы S^m (в некоторой ее точке) гомотопически эквивалентно некоторому счетному клеточному разбиению K , имеющему по одной клетке в каждой из размерностей $0, m - 1, 2(m - 1), \dots, k(m - 1), \dots$ (и не содержащему никаких других клеток).

Поскольку, как мы знаем (см. п. 4 гл. 3), для любого клеточного разбиения K группа $\pi_n(K)$ изоморфна группе $\pi_n(K^{n+1})$ (мы опускаем указания на отмеченные точки) и является эпиморфным образом группы $\pi_n(K^n)$, и поскольку при $n < 2(m - 1)$ остов K^n указанного выше клеточного разбиения гомеоморфен, очевидно, сфере S^{m-1} (ибо эта сфера является единственным клеточным разбиением, содержащим две клетки размерностей 0 и $m - 1$ соответственно), мы немедленно получаем отсюда, что

для любого $n < 2m - 3$ группа $\pi_{n+1}(S^m)$ изоморфна группе $\pi_n(S^{m-1})$, а группа $\pi_{2m-3}(S^m)$ является эпиморфным образом группы $\pi_n(S^{m-1})$.

Эта замечательная теорема известна как теорема Фрейденталля.

З а м е ч а н и е. Метод (использующий группы вращений), с помощью которого мы выше вычислили индексы геодезических на сфере S^m , имеет общий характер и применим к любому полному риманову пространству M , на котором действует достаточно большая группа изометрических пре-

образований (такие пространства называются *вариационно полными*). В частности, этот метод применим ко всем классическим группам Ли и к широкому классу их фактор-пространств. При этом оказывается удобным рассматривать пространства $\hat{\Omega}(p, q)$ и для случая, когда точки p и q сопряжены на соединяющих их геодезических. Именно, во многих случаях при таком «плохом» выборе точек p и q совокупность N всех кратчайших геодезических, соединяющих эти точки, естественным образом определяется как гладкое многообразие (например, на сфере S^n совокупность всех кратчайших, соединяющих диаметрально противоположные точки p и p^* , представляет собой $m - 1$ -мерную сферу). При некоторых условиях (обеспечивающих, грубо говоря, то, что геодезические $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$ являются слабо невырожденными критическими точками функционала длины) мы можем применить сформулированную в конце п. 5 гл. 6 теорему и (через посредство общей теоремы редукции) тем самым доказать, что пространство $\hat{\Omega}(p, q)$ (а потому и пространство петель Ω) гомотопически эквивалентно многообразию N , к которому последовательно приклеено некоторое число замкнутых шаров. При этом размерности указанных шаров не меньше наименьшего из индексов не кратчайших геодезических $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$. Пусть h_0 — этот наименьший индекс. Тогда из сказанного непосредственно вытекает, что

для любого $n < h_0 - 1$ группа $\pi_{n+1}(M)$ изоморфна группе $\pi_n(N)$.

Это утверждение представляет собой весьма далекое обобщение теоремы Фрейденталя (к которой оно сводится в случае $M = S^m$). С его помощью можно, например, вычислить так называемые стационарные гомотопические группы всех классических групп Ли. Поскольку эти вычисления требуют основательного знакомства с теорией групп Ли (и, по существу, к теории Морса не относятся), мы здесь излагать их не будем.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что обобщенная теорема Фрейденталя справедлива и без упомянутых выше условий (обеспечивающих слабую невырожденность геодезических). Однако такое усиление этой теоремы мало интересно, поскольку во всех известных до сих пор случаях ее применения эти условия выполнены.

6. Приложения к геометрии римановых пространств. Теоремы Морса и Картана

Сопоставив основную теорему п. 4 с результатами Дополнения к гл. 6, мы немедленно получим, что

если в полном римановом пространстве M существуют такие точки p и $q \neq p$, что

1) они не сопряжены ни на одной соединяющей их геодезической;

2) для любого $n \geq 0$ число a_n геодезических $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$, имеющих индекс n , конечно,

то числа Бетти $b_n = b_n(\Omega M)$ пространства петель ΩM над пространством M определены и связаны с числами a_n неравенствами

$$b_n - b_{n-1} + \dots + (-1)^n b_0 \leq a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^n a_0, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

В частности,

для любого $n \geq 0$ имеет место неравенство $b_n \leq a_n$,

откуда следует, что

если числа Бетти b_n определены и отличны от нуля для бесконечного числа значений n (или если хотя бы для одного n число b_n не определено), то на пространстве M существует бесконечно много геодезических, соединяющих любые две точки p и $q \neq p$, не сопряженные ни на какой соединяющей их геодезической.

Пусть, например, многообразие M гомотопически эквивалентно сфере S^m . Поскольку, как легко видеть, пространства петель над гомотопически эквивалентными пространствами гомотопически эквивалентны, пространство ΩM в этом случае гомотопически эквивалентно пространству ΩS^m и потому имеет те же числа Бетти. Но из данного в предыдущем пункте описания пространства ΩS^m непосредственно вытекает, что при $m > 2$ его числа Бетти

$$b_n(\Omega S^m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ делится на } m - 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и потому отличны от нуля для бесконечного числа значений n . Следовательно,

через любые две точки p и q (не сопряженные ни на какой соединяющей их геодезической) произвольного полного риманова пространства M , гомотопически эквивалентного сфере S^m , $m > 2$, проходит бесконечно много геодезических.

Эта теорема была впервые доказана Морсом.

З а м е ч а н и е. Используя мощные методы современной алгебраической топологии, Серр доказал, что для любого многообразия M , не стягиваемого по себе в точку, числа Бетти b_n его пространства петель отличны от нуля для бесконечного числа значений n . Следовательно, теорема Морса справедлива не только для пространств, гомотопически эквивалентных сфере, но и для любых римановых полных пространств, не стягивающихся по себе в точку. Доказательство теоремы Серра выходит за рамки этой книги.

Риманово пространство M мы будем называть *пространством неположительной кривизны*, если для любой точки $p \in M$ и любых векторов $A, B \in M_p$

$$R_p(A, B, A, B) \geq 0.$$

З а м е ч а н и е. Это название оправдывается тем, что, как легко можно показать, для любой поверхности трехмерного евклидова пространства число $R_p(A, B, A, B)$ не зависит от выбора векторов A, B и равно взятой с обратным знаком полной кривизне этой поверхности в точке p .

Легко видеть, что

любые две точки полного риманова пространства неположительной кривизны не сопряжены ни на какой соединяющей их геодезической γ .

Действительно, пусть $X(t)$ — произвольное поле Якоби на геодезической γ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), X(t) \right) &= \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} X(t), X(t) \right) + \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) = \\ &= R_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t), X(t), \dot{\gamma}(t)) + \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

так что в каждой точке $t \in \mathbf{R}$ функция $\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), X(t) \right)$ монотонно возрастает и притом строго, если только $\frac{\nabla X}{dt}(t) \neq 0$. Следовательно, если $X(t_0) = X(t_1) = 0$ для некоторых

значений t_1 и t_2 параметра t , то на отрезке $[t_1, t_2]$ поле $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ тождественно равно нулю. Но тогда равно нулю и поле $X(t)$.

Из этого предложения немедленно вытекает, что
в каждом односвязном полном римановом пространстве M неположительной кривизны любые две точки p и q соединены только одной геодезической.

Действительно, поскольку ни на одной геодезической $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$ нет точек, сопряженных с точкой p , индекс каждой такой геодезической равен нулю. Поэтому пространство $\hat{\Omega}(p, q)$ гомотопически эквивалентно нульмерному клеточному разбиению K , клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с геодезическими $\gamma \in \hat{\Omega}(p, q)$. С другой стороны, условие односвязности ($\pi_1(M) = 0$) пространства M означает, что пространство Ω петель пространства M связно ($\pi_0(\Omega) = 0$). Но тогда связно и пространство $\hat{\Omega}(p, q)$, гомотопически эквивалентное пространству Ω , а следовательно, и разбиение K . Однако связное нульмерное клеточное разбиение необходимо состоит только из одной точки. Следовательно, $\hat{\Omega}(p, q)$ содержит только одну геодезическую.

Рассмотрим теперь экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : M_p \rightarrow M.$$

Согласно только что доказанному предложению это отображение биективно (взаимно однозначно). Кроме того, поскольку ни одна точка ни одной проходящей через точку p геодезической не сопряжена с точкой p , это отображение не имеет критических точек и потому является локальным диффеоморфизмом. Поскольку локально диффеоморфное биективное отображение является диффеоморфизмом, мы тем самым доказали, что
любое односвязное полное риманово пространство неположительной кривизны диффеоморфно евклидову пространству.

Эта замечательная теорема принадлежит Э. Картану. Она является одной из многочисленных теорем, связывающих топологические свойства римановых пространств со свойствами его тензора кривизны. Читатель может найти другие теоремы такого типа в соответствующей литературе.

ИСТОРИЧЕСКИЙ И ЛИТЕРАТУРНЫЙ КОММЕНТАРИЙ

Глава 1

Классическим сочинением по общей теории топологических пространств является книга Хаусдорф [1]; см. также Бурбаки [1] и первую главу книги Лефшец [1].

К п. 1. Понятие свободного объединения пространств в учебной литературе до сих пор, по-видимому, не рассматривалось. Насколько автору известно, оно впервые появилось (в неявном виде) в работе Уайтхед [1].

Устойчиво нормальные пространства в литературе называются также бинормальными.

К п. 2. Понятие паракомпактного пространства принадлежит Дьедонне. За последние годы оно подверглось весьма детальному изучению в ряде работ в основном иностранных авторов. Из литературы на русском языке можно указать статью Стоун [1] и, в частности, примечания переводчика к этой статье.

Компактные пространства были введены (под названием бикompактных пространств) П. С. Александровым и П. С. Урысоном, а секвенциально компактные пространства (под названием компактных пространств) — М. Фреше. Регулярные финально компактные пространства называются также пространствами Линделёфа. Доказательство их нормальности, по существу, воспроизводит доказательство известной теоремы А. Н. Тихонова о нормальности регулярных пространств со счетной базой. Их паракомпактность впервые доказана Моритой; см. Морита [1]. Каонные пространства называются также k -пространствами или пространствами Келли. Теорема о локально компактных паракомпактных пространствах (для метрических пространств) принадлежит П. С. Александрову; см. Александров [1]. Известен

целый ряд ее вариантов, незначительно отличающихся друг от друга; см., например, Бурбаки [1], стр. 125 — 128, а также Урысон и Александров [1], стр. 947 — 954.

К п. 3. Полного доказательства теоремы Титце на русском языке не существует. В книге Хаусдорф [1] она доказана лишь для случая $|g(x)| \leq 1$. Доказательство, приведенное в книге Лефшец [1], содержит пробел.

К п. 4. В литературе шаровые окрестности часто называются также сферическими окрестностями.

К п. 5. На важную роль отображений отождествления впервые обратил внимание, по-видимому, Уайтхед; см., например, Уайтхед [2]. Отображения компактного характера называются также собственными отображениями. Теорема о топологическом произведении отображений отождествления принадлежит, по существу, Уайтхеду (см. Уайтхед [2]) и Даукеру.

К п. 6. См. Уайтхед [1], [2].

Глава 2

С основными понятиями теории гомотопий можно познакомиться по любому учебнику алгебраической топологии; см., например, Лефшец [1], Стинрод и Эйленберг [1]. Имеется также монография, специально посвященная этой теории; см. Ху Сы-цзян [1]. См. также Болтянский [1] и Постников [1].

К пп. 2 — 4. Все изложенные здесь результаты принадлежат Уайтхеду; см. Уайтхед [1]. См. также Постников [1].

К п. 4. На русском языке имеется ряд прекрасных изложений основ теории гомотопических групп; см., например, Болтянский [1] и Стинрод [1].

Глава 3

Клеточные разбиения (под названием CW -комплексов) введены и изучены Уайтхедом; см. Уайтхед [1]. Их паракомпактность доказана Миядзаки; см. Миядзаки [1]. См. также Постников [2]. Теорема о топологическом произведении локально счетных разбиений принадлежит Даукеру; см. Джеймс [1], стр. 29 — 30.

Глава 4

Гладкие многообразия впервые были четко определены Уитни, положившим в основу их определения понятие системы локальных координат. Принятое в тексте определение, базирующееся на понятии гладкой функции, восходит к Г. Вейлю.

На русском языке определение и основные свойства гладких многообразий неоднократно излагались с самых различных точек зрения; см., Понтрягин [1], де Рам [1], Уитни [1], Шевалле [1]. Изложение в тексте ближе всего к изложению в книге Хелгасон [1].

Оригинальное изложение основ теории гладких многообразий (включающее бесконечномерный случай) см. Ленг [1].

К п. 2. См. Неванлинна Р. [1] и Неванлинна Ф. [1]. См. также Уитни [1], стр. 97 — 101.

К п. 4. Теорема об открытых выпуклых множествах принадлежит к числу тех «общеизвестных» фактов, доказательства которых никто до сих пор не потрудился изложить.

К. пп. 5 — 7. Принятая нами трактовка понятий векторного поля и линейной дифференциальной формы принадлежит Шевалле; см. Шевалле [1]. См. также Хелгасон [1].

К пп. 8 — 9. Понятие тензора и тензорного поля прошло довольно долгий путь развития и в настоящее время может рассматриваться с самых различных точек зрения (например, с точки зрения теории расслоенных пространств тензорное поле представляет собой сечение некоторого векторного расслоения, а с точки зрения теории представлений групп каждый тензор является не чем иным, как вектором некоторого пространства представления полной линейной группы). В этой книге понятие тензора играет чисто служебную роль. Подробное изложение тензорного исчисления (с классических позиций локальной римановой геометрии) можно найти, например, в книге Рашевский [1].

К п. 10. Изложенное в этом пункте доказательство представляет собой специализацию доказательства одной общей теоремы Стинрода о существовании сечений некоторых расслоений; см. Стинрод [1], § 12. Другое доказательство, использующее теорему о существовании гладких разложений единицы, см., например, в книге Шварц [1], стр. 38 — 39.

Глава 5

К п. 2. См. Хелгасон [1], стр. 40.

К п. 3. См. Номидзу [1], стр. 16 — 19, а также Милнор [1], стр. 19 — 21.

К п. 5. Доказательство существования трубчатых окрестностей использует одно соображение Годемана; см. Ленг [1], стр. 106 — 109.

К п. 6. По поводу теоремы вложения компактных многообразий см. Понтрягин [1], стр. 19 — 20. По поводу теоремы Сарда см. де Рам [1], стр. 29 — 31, и Понтрягин [1], стр. 25 — 29.

К п. 7. См. де Рам [1], стр. 31 — 36. Первоначальное доказательство теоремы вложения, основывающееся на несколько других идеях, можно найти, например, в книге Уитни [1], стр. 161 — 166.

Глава 6

Во всем, что касается невырожденного случая, мы в этой главе весьма близко следуем изложению Милнора; см. Милнор [1], гл. I.

К п. 1. Понятие невырожденного критического многообразия принадлежит Ботту; см. Ботт [1], стр. 321.

К п. 2. См. Милнор [1], § 6, и Понтрягин [1], стр. 34 — 38, где доказаны несколько более точные утверждения.

К п. 3. См. Милнор [1], § 3.

К п. 4. См. Милнор [1], § 4.

К п. 5. См. Ботт [1], стр. 325 — 326.

К дополнению. См. Милнор [1], § 5. Определение и основные свойства чисел Бетти можно найти, например, в книге Хилтон и Уайли [1]; см. также Стинрод и Эйленберг [1].

Глава 7

Основным руководством по римановой геометрии на русском языке является книга Рашевский [1]. Прекрасный очерк основных идей римановой геометрии в их историческом развитии представляет собой книга Каган [1].

Теории пространств аффинной связности в ее классическом аспекте посвящена книга Норден [1].

С современной точки зрения понятие аффинной связности рассмотрено у Номидзу [1]. См. также Лихнерович [1].

Наше изложение ближе всего примыкает к книге Хелгасон [1]. Оно почти без изменений заимствовано из книги Постников [3], гл. 2 и 3.

К п. 1. Следует иметь в виду, что наш тензор кривизны R отличается знаком от тензора кривизны, как он определен, например, в книге Рашевский [1].

К п. 5. Впервые теорема Уайтхеда была доказана в статье Уайтхед [3].

К п. 6. Об уравнениях Картана см. Картан [1], Приложение III.

К п. 11. В конце соответствующего пункта книги Постников [3] содержится грубая ошибка.

Глава 8

Эта глава также воспроизводит (с некоторыми дополнениями) соответствующую главу из книги Постников [3]. Помимо этой книги, теория индексов сопряженных точек изложена на русском языке лишь в лекциях Милнора; см. Милнор [1]. Однако Милнор с самого начала вместо функционала длины рассматривает функционал энергии (действия). Хотя это видоизменение и приводит к довольно значительным техническим упрощениям, но при этом несколько теряется геометрическая наглядность.

К п. 1. Материал этого пункта общеизвестен; см., например, Рашевский [1], § 10.

К п. 2. Здесь мы следуем изложению Зисмана; см. Зисман [1].

К п. 3. См. также Зисман [1]. С точки зрения механики уравнение Якоби (3) является не чем иным, как уравнением в вариациях для уравнений Эйлера—Лагранжа; см., например, Уиттекер [1], § 186, где это уравнение явно выписано (в координатной форме).

К п. 4. См. Зисман [1] и Милнор [1], § 18.

К пп. 4—6. По существу, в этих пунктах излагается (для частного случая уравнения Якоби) известный вариационный метод решения краевых задач для самосопряженных

линейных дифференциальных уравнений, сводящий решение таких уравнений к отысканию минимума соответствующего квадратичного функционала. Изложения этого метода в общем виде на русском языке, по-видимому, не существует. Для одномерного случая этот метод можно найти, например, в книге Лаврентьев и Люстерник [1], §§ 81 — 82, где содержится также материал, тесно примыкающий к пп. 3 — 4. См. также Ахиезер [1], стр. 155 — 158. Изложению этого метода для уравнений в частных производных посвящена монография Михлин [1].

К пп. 8 — 12. Эти пункты содержат изложение собственно метода Морса. Мы здесь довольно близко следуем Зисману; см. Зисман [1].

К п. 13. См. Ботт [1]. Здесь мы, по существу, переходим от функционала длины к функционалу действия.

К Дополнению. Метод доказательства основного неравенства (4) сообщен автору М. Г. Крейном и М. И. Вишиком. По поводу второй фундаментальной формы подмногообразия см., например, Схоутен—Стройк [1], раздел III, § 12

Глава 9

К п. 1. Пространство X^I является частным случаем пространств непрерывных отображений X^Y произвольного пространства Y в пространство X . Общие теоремы о такого рода пространствах можно найти в книге Ху Сы-цзян [1], гл. 3, п. 9.

К п. 2. См. Постников [3], гл. 5, п. 6, Зейферт и Трельфалль [1], § 13, а также Милнор [1], § 17.

К п. 3. Теорема редукции (в том виде, как она здесь сформулирована) принадлежит Ботту; см. Ботт [1]. См. также Постников [3], гл. 5.

К п. 4. Ср. Милнор [1], § 16.

К п. 5. Доказательство теоремы Фрейдентала впервые было опубликовано Фрейденталем; см. Фрейденталь [1]. К настоящему времени имеется довольно много различных доказательств этой теоремы; см., например, Ху Сы-цзян [1] и Понтрягин [1], § 8. О вариационно полных пространствах см., например, Ботт и Самельсон [1]. Обобщенная

теорема Фрейденталя впервые доказана в статье Ботт [1]. Также она применена к вычислению стационарных гомотопических групп классических групп Ли. Доказательство этой теоремы без предположения о слабой невырожденности геодезических см. Милнор [1], § 19.

К п. 6. См. Милнор [1], § 17. Теорема Серра доказана в работе Серр [1], а теорема Картана — в книге Картан [1], Прибавление III. Связям между топологией и кривизной посвящена обширная журнальная и монографическая литература; см., например, Яно и Бохнер [1], а также Милнор [1], § 19.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С. (Aleksandroff P.)

- [1] Über die Metrisation der in kleinen kompakten topologischen Räume, Math. Ann. **92**, 1924, 294 — 301.

Александров П. С. и Урысон П. С.

- [1] О компактных топологических пространствах. В сб. П. С. Урысон, «Труды по топологии и другим областям математики», т. II, 854 — 963, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

Ахиезер Н. И.

- [1] Лекции по вариационному исчислению, М., Гостехиздат, 1955.

Болтянский В. Г.

- [1] Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. ин-та АН **47**, 1955.

Ботт Р. (Bott R.)

- [1] The stable homotopy of the classical groups, Ann. of Math. **70**, № 2, 1959, 313 — 337.

Ботт Р. и Самельсон Х. (Bott R. and Samelson H.)

- [1] Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math. **80**, 1958, 962 — 1029.

Бурбаки Н.

- [1] Общая топология. Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.

Джеймс И. М.

- [1] Приведенные степени пространств, сб. «Математика» **1:3**, 1957, 3 — 33.

Зейферт Г. и Трельфалль В.

- [1] Вариационное исчисление в целом, М., ИЛ, 1947.

Зисман М. (Zisman M.)

- [1] La théorie de Marston Morse, I. Géométrie différentielle, Séminaire H. Cartan, 1959/60, exp. 14.

Каган В. Ф.

- [1] Геометрические идеи Римана и их современное развитие, М.—Л., ГТТИ, 1933; перепечатана в сб. В. Ф. Каган, Очерки по геометрии, изд. Моск. ун-та, 1963, под названием «Геометрические идеи Римана и их дальнейшее развитие».

Картан Э.

- [1] Геометрия римановых пространств, М. — Л., ОНТИ, 1936.

Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А.

- [1] Основы вариационного исчисления, т. I, ч. 2, М.—Л., ОНТИ, 1935.

✓ Л е н г С.

- [1] Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., «Мир», 1967.

Л е ф ш е ц С.

- [1] Алгебраическая топология, М., ИЛ, 1949.

Л и х н е р о в и ч А.

- [1] Теория связностей в целом и группы голономий, М., ИЛ, 1960.

✓ М и л н о р Дж.

- [1] Теория Морса, М., «Мир», 1965.

М и х л и н С. Г.

- [1] Проблема минимума квадратичного функционала, М.—Л., Гостехиздат, 1952.

М и я д з а к и Х. (Miyazaki H.)

- [1] The paracompactness of CW -complexes, *Tohoku Math. J.* 4, 1952, 309 — 313.

М о р и т а К. (Morita K.)

- [1] Star-finite coverings and the star-finite property, *Math. Japonicae* 1, 1948, 60 — 68.

Н е в а н л и н н а Р. (Nevanlinna R.)

- [1] Über die Umkehrung differenzierbarer Abbildungen, *Suomalaisen tiedeakatemia toimituksia*, ser. A, № 185, Helsinki, 1955.

Н е в а н л и н н а Ф. (Nevanlinna F.)

- [1] Über die Umkehrung differenzierbarer Abbildungen, *Suomalaisen tiedeakatemia toimituksia*, ser. A, № 245, Helsinki, 1957.

✓ Н о м и д з у К.

- [1] Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., ИЛ, 1960.

Н о р д е н А. П.

- [1] Пространства аффинной связности, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

П о н т р я г и н Л. С.

- [1] Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, *Труды Матем. ин-та АН* 45, 1955.

П о с т н и к о в М. М.

- [1] Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, *Труды Матем. ин-та АН* 46, 1955.
[2] О паракомпактности клеточных разбиений, *УМН* 20:5 (125), 1965, 226 — 230.
[3] Вариационная теория геодезических, М., «Наука», 1965.

✓ д е Р а м

- [1] Дифференцируемые многообразия, М., ИЛ, 1956.

Р а ш е в с к и й П. К.

- [1] Риманова геометрия и тензорный анализ, М., «Наука», 1967.

Серр Ж.-П.

- [1] Сингулярные гомологии расслоенных пространств, В сб. «Расслоенные пространства и их приложения», М., ИЛ, 1958, 9 — 114.

Стинрод Н.

- [1] Топология косых произведений, М., ИЛ, 1953.

Стинрод Н. и Эйленберг С.

- [1] Основания алгебраической геометрии, М., ИЛ, 1958.

Стоун А.

- [1] Паракомпактность и произведение пространств, сб. «Математика» 5:5, 1961, 3 — 11.

Схоутен И. А. и Стройк Д. Дж.

- [1] Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II, М., ИЛ, 1948.

Уайтхед Дж. Г. К. (Whitehead J. H. C.).

- [1] Combinatorial homotopy. I, Bull. Amer. Math. Soc. 55, 1949, 213 — 245.
[2] Note on a theorem due to Borsuk, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 1948, 1125 — 1132.
[3] Convex regions in the geometry of paths, Quart. Journ. Math. (2), 3, 1932, 33 — 42, и (2), 4, 1933, 226 — 227.

Уитни Х.

- [1] Геометрическая теория интегрирования, М., ИЛ, 1960.

Уиттекер Е. Т.

- [1] Аналитическая динамика, М.—Л., ОНТИ, 1937.

Фрейденталь Х. (Freudenthal H.)

- [1] Über die Klassen der Sphärenabbildungen, Comp. Math. 5, 1937, 299 — 314.

Хаусдорф Ф.

- [1] Теория множеств, М.—Л., ОНТИ, 1937.

Хелгасон С.

- [1] Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., «Мир», 1964.

Хилтон П. и Уайли С.

- [1] Теория гомологии, М., «Мир», 1966.

Ху Сы-цзян

- [1] Теория гомотопий, М., «Мир», 1964.

Шварц Л.

- [1] Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения, М., «Мир», 1964.

Шевалле К.

- [1] Теория групп Ли, т. I, М., ИЛ, 1948.

Яно К. и Бохнер С.

- [1] Кривизна и числа Бетти, М., ИЛ, 1957.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома невырожденности метрики 46
 — о распространении гомотопии 82
 — симметричности 46
 — счетности вторая 11
 — — первая 11
 — треугольника 46
 Алгебра ростков 191

База 11
 — открытых множеств 11
 Базис голономный 234
 — нормальный 389
 — ортонормированный 399

Вариация длины дуги вторая 427
 — — — первая 425
 — с закрепленными концами 422
 — якобиева 430
 Вектор, касающийся многообразия 274
 — поля 220
 Векторы базисные касательные 261
 Вершина 139
 Внутренность множества 10
 Вычисление индекса 495

Геодезическая 378
 — ломаная 456
 Гессиан 313
 Гладкость 188
 — отображения 297
 Гомеоморфизм 55
 — относительный 71

Гомоморфизм 102
 Гомотопия 78
 — клеточная 171
 — относительно подпространства 84
 — отображения пар 78
 — стационарная 79
 Градиент 251
 Граница клетки 138
 — куба 544
 Группа диффеоморфизмов однопараметрическая 265
 — локальная, однопараметрическая локальных диффеоморфизмов 267

Деформация пространства 89
 Диффеоморфизм 191
 — координатный 198
 Дифференциал отображения 227
 — функции 234
 Дифференцирование алгебры 212
 — векторного поля вдоль кривой ковариантное 365
 — вдоль векторного поля ковариантное 359
 — , ковариантное на поверхности 366
 — тензорного поля вдоль кривой ковариантное 377
 Длина кривой 402

Задание кривой параметрическое 256
 — поверхности параметрическое 262

- Замкнутость многообразия 293
 Замыкание 12
 Значение функции критическое 313
 — — — изолированное 333
 — — — компактного характера 333
 — — — невырожденное 333
- Изоморфизм 102
 Инвариант аддитивный 354
 — подаддитивный 354
 Индекс геодезической 537
 — квадратичной формы 315
 — невырожденного критического многообразия 318
 — точки 315
 Интеграл Гильберта 451
 — поля ковариантный 444
- Квазиполиэдр 185
 Класс гомотопический 79
 Клетка 136
 — n -мерная относительная 177
 — открытая 136
 Ковектор многообразия 234
 Композиция 55
 Компонента векторного поля на поверхности 262
 — линейной связности 56
 — поля 219, 257
 — связности 36
 — тензора 242
 — тензорного поля 240
 — — — на кривой 259
 — формы 234
 Конец пути 56
 Координаты локальные 198
 — нормальные в точке 385
 Коранг геодезической 537
 — квадратичной формы 314
 — точки 315
 Коэффициенты связности 360
 — формы 234
 Кривая 255
 — вырожденная 255
 — гладкая 255
 — интегральная 268
 — кратчайшая 406
- Кривая кусочно гладкая 255
 — — регулярная 258
 — непрерывная 254
 — регулярная 258
 —, — в точке 258
 — стационарной длины 425
 Кривые концевые 422
 — эквивалентные 403
 Куб n -мерный единичный 543
- Лемма вариационного исчисления основная 425
 — Морса 322
 — сходимости 413
 — Урысона 38
- Матрица отображения 229
 Метрика 46
 — внутренняя 406
 Метрики, эквивалентные в точке 409
 Многообразие векторов, ортогональное многообразию 289
 — гладкое 187
 — дополнительное 323
 — касательных векторов 223
 — m -мерное гладкое 198
 — невырожденное критическое 317
 — ортогональное 286
 — связное 255
 Множество всюду плотное 12
 — коинцидентности 37
 — нигде не плотное 12
 — счетное 12
 — функционально замкнутое 39
 — — открытое 39
 Мономорфизм 102
- Начало пути 56
 Неравенство Коши — Буняковского 531
 — Морса 353
 Носитель поля 272
 — функции 37
 Нуль множества 102

- Образ непрерывный 56
 Объединение подпространств
 свободное 15
 — пространств свободное 17
 Ограничение отображения 80
 — связности 360
 — формы 232
 Окрестность 10
 — вектора нормальная 381
 — координатная 198
 — нормальная 286
 — сферическая 553
 — точки нормальная 381
 — — — выпуклая 410
 — — — сферическая 406
 — шаровая 553
 ϵ -окрестность шаровая 46
 Остов 138
 Отображение биективное 55
 — вложения 80
 — гладкое 191
 — гомотопически инъективное 90
 — — надъективное 90
 — — тождественное 89
 — диффеоморфное 191
 — — в точке 192
 — инъективное 55
 — клеточное 168
 — компактного характера 61, 553
 — конечное 78
 — координатно ограниченное 298
 — локально диффеоморфное 192
 — — компактное 62
 — — конечномерное 298
 — — счетно-компактное 62
 — — эпиморфное 214, 233
 — надъективное 55
 — начальное 78
 — непрерывное 54
 — ограниченное по k -й координате 306
 — ограничения 211, 213
 — отождествления 58
 — перепараметризации 508
 — постоянное 54
 — регулярное 230
 —, — в точке 229
 — ретрагирующее 81
 — свертывания 247
 Отображение собственное 553
 — характеристическое 137, 139
 — частичное 512
 —, экспоненциальное в точке 381
 Отображения ϵ -близкие 307
 — клеточно гомотопные 171
 Отрезок единичный 14
 — конечный 255
 — кривой 255
 — элементарный 262
 Пара 71
 — клеточная 164
 — компактная 71
 — пространства 71
 — хаусдорфова 71
 Перенос вдоль кривой параллельный 369
 Петля пространств 517
 Поверхность n -мерная 260
 — — гладкая 260
 — регулярная 278
 — уровня 278
 Подмногообразие 274
 — гладкое 274
 Подмножество замкнутое 11
 — компактно замкнутое 28
 Подпокрытие 19
 Подпредмногообразие гладкого многообразия 201
 Подпредразбиение 141
 Подпространство 13
 — насыщенное 58
 — открытое 360
 Покрытие 19
 — замкнутое 19
 — звездно конечное 19
 — локально конечное 19
 — открытое 19
 — пространства 19
 — точечно конечное 19
 Поле векторное 212
 — —, ассоциированное с вариацией 422
 — — гладкое 223
 — —, кусочно гладкое на кривой 443
 — — минимальное 447
 — — на кривой 257

- Поле векторное на поверхности 260
 — — непрерывное 223
 — векторов, касательных к кривой 257
 —, гладко зависящее от параметра 446
 — гладкое 243
 — градиента 251
 — дважды дифференцируемое 444
 — дифференцируемое 444
 — ковекторное гладкое 236
 — — непрерывное 236
 — коэффициентов 353
 — линейных преобразований 243
 — метрического тензора 250
 — параллельных векторов 369
 — — тензоров 371
 — разрывное 443
 — риманова тензора кривизны 397
 — тензора кривизны 361
 — — кручения 361
 — тензорное 237
 — — гладкое 242
 — — на кривой 259
 — — — поверхности 260
 — — непрерывное 242
 — Якоби 431
 — — ломаное 454
 — — особое 442
 Полиэдр клеточный 152
 Последовательность сходящаяся 13
 — фундаментальная 52
 Предбаза 11
 Предел гомотопический 125
 — последовательности 13
 — слабый гомотопический 119
 Предмногообразие гладкое 189
 —, — в точке 191
 — диффеоморфное 192
 Предразбиение клеточное 139
 — конечномерное 140
 — локально конечное 142
 — — счетное 142
 Продолжение тензорного поля 262
 Проектирование вдоль вектора 302
 Проектор 302
 Проекция естественная 70
 Произведение тензоров 245
 — топологическое 18, 62
 Производная частная 215
 Пространства гомеоморфные 55
 — гомотопически эквивалентные 89
 k -пространство 552
 Пространство n -асферическое 87
 — аффинной связности 359
 — бикompактное 552
 — бинормальное 552
 — вариационное полное 548
 — вполне хаусдорфово 14
 — второй категории 12
 — дискретное 10
 — каонное 29, 552
 — касательное 220
 — Келли 552
 — компактное 21, 552
 — — проективное 344
 — Линделёфа 552
 — линейно связное 56
 — локально компактное 32
 — — счетно компактное 32
 — метризуемое 48
 — метрическое 46
 — нормальное 14
 — ограниченное 48
 — первой категории 12
 — петель 517
 — полное 53
 — путей 508
 — регулярное 14
 — — финально компактное 552
 — репрезентативное 117
 — риманово 187, 249
 — — полное 413
 — свободно объединяемое 17
 — связное 36
 — m -связное 87
 — секвенциально компактное 22, 552
 — сепарабельное 12
 — со счетной базой 11
 — счетно компактное 30
 — счетного веса 11
 — — локального веса 10
 — топологическое 10
 — устойчиво нормальное 19, 552
 — финально компактное 21

Пространство хаусдорфово 14

Пути пространства 56

— эквивалентные 109

Путь обратный 113

Разбиение клеточное 145

Разложение единицы 43

— — на множестве гладкое 206

Размерность 137, 140

Ранг квадратичной формы 314

Распространение семейства 153

— функции 40

Расстояние 46

— между точками риманова пространства 405

Регулярность отображения 298

Ретракт 81

— деформационный 92

Свертывание полное 248

— тензоров 246

Связность аффинная 358

— риманова 393

Семейство подмножеств локально конечное 15

—, подчиненное покрытию 206

Система координат, ассоциированная с функцией 315

— —, жестко ассоциированная с функцией 320

— окрестностей фундаментальная 10

Соединение точек 255

Спектр групп 120

Стягивание подпространства в точку 75

Сумма топологическая 18, 56, 62

Сфера единичная 49

Тело 138

Тензор кривизны 362

— кручения 361

— метрический 250

Теорема аппроксимации 309

— Ботта 347

— Брауэра — Урысона 40

— вложения 296

— Морса 339

Теорема Морса об индексе 469

— о замене локальных координат 200

— — клеточных отображениях 171

— — подчиненных отображениях 174

— об изоморфизме 459

— — обратных функций 193

— — одноточечной компактификации 32

— редукции 530, 538

— Сарда 298

— Стоуна 50

— Титце 40

— Уайтхеда 185

— Фрейденталя 547

Тождество Бианки 361

Топология 10

— евклидова 11

— естественная 46

— индуцированная 13

— компактно открытая 508

— отождествления 69

— слабая 143

Точка внутренняя 10

— излома поля 443

— изолированная 10

— конечная 255

— кривой 254

— критическая 230, 312

— — невырожденная 322

— начальная 255

— прикосновения 12

— разрыва 443

— слабо невырожденная критическая 318

— фокальная 490

Точки сопряженные 435

Траектория группы 266, 268

Условие полноты риманова пространства 417

Фактор-пространство 70

Форма Ботта квадратичная 478

— линейная дифференциальная 231

— Морса квадратичная 463

Форма связности 391
Функтор ковариантный 103
Функции, независимые в точке 281
Функция гладкая 189
— — на комплексном проективном пространстве 345
— непрерывная 37
— Урысона 38
— — гладкая 203

Характеристика эйлера 355

Числа Бетти 353

Шар единичный 48
— — открытый 49

Экватор 104

Эквивалентности взаимно обратные 89

Эквивалентность гомотопическая 89

— обратная 89

— слабая гомотопическая 116

Якобиан отображения 192, 229

Михаил Михайлович Постников

Введение в теорию Морса

М., 1971 г., 568 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *С. Н. Емельянова, И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 16/VI 1969 г. Подписано к печати 26/XI 1970 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Физ. печ. л. 17,75. Условн. печ. л. 29,82. Уч.-изд. л. 27,34. Тираж 10 000 экз. Т-15 518. Цена книги 1 р. 90 к. Заказ 1058.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

Отпечатано в гос. типогр. «Вайздас», Вильнюс, ул. Страждялио 1. Заказ № 4947.



М.А. ПОСЕТНИКОВ • ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОРЕСА